

KOSOČTVEREC V PŘEDSTAVÁCH STUDENTŮ UČITELSTVÍ PRO 1. ST. ZŠ

Renáta ZEMANOVÁ

Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)

renata.zemanova@osu.cz

Abstrakt

V článku analyzujeme představy budoucích učitelů 1. st. ZŠ o kosočtverci, a to prostřednictvím řešení konstrukční úlohy určené žákům 3.–5. ročníku ZŠ. Gradovaná úloha ve dvou obtížnostních variantách zadává dva nesousední vrcholy kosočtverce užitím zjednodušeného zápisu kartézských souřadnic a požaduje takto zadaný kosočtverec sestavit. Před zadáním testu studentům jsme popsali gradační parametry úlohy, možné strategie řešení a predikovali strategie, které studenti použijí. Studentská řešení analyzujeme s ohledem na volbu obtížnostní varianty, počet nalezených řešení, správnost řešení a strategie řešení. Zvláštní pozornost věnujeme tvarům, které studenti považují za kosočtverec – vyskytuje se zde kromě kosočtverce čtverec, obdélník a kosodélník. Cílem studie je poukázat na klíčové miskoncepce, které studenti i po absolvování základního kurzu planimetrie stále mají.

Klíčová slova: 1. st. ZŠ, geometrie, kosočtverec, geometrické konstrukce, čtvercová mříž, kartézská soustava souřadnic, gradovaná úloha

RHOMBUS IN IMAGES OF STUDENT TEACHERS FOR 1ST GRADE OF ELEMENTARY SCHOOLS

Abstract

In the article, we analyze the ideas of the future 1st of grade elementary school teachers about a rhombus, through the solution of a construction problem intended for students in grades 3–5 of elementary school. The graded problem in two difficulty variants specifies two non-adjacent vertices of a rhombus using simplified notation of Cartesian coordinates and requires the construction of the rhombus thus specified. Before assigning the test to the students, we described the gradation parameters of the problem, possible solution strategies, and predicted the strategies that the students would use. We analyze the students' solutions with respect to the choice of difficulty variant, the number of solutions found, the correctness of the solution, and the solution strategy. We pay special attention to the shapes that the students consider to be a rhombus - in addition to the rhombus, there are also squares, rectangles, and rhombuses. The aim of the study is to point out key misconceptions that students still have even after completing a basic course in planimetry.

Keywords: 1st grade of elementary school, geometry, rhombus, geometric constructions, square lattice, Cartesian system, graded problem

1. Úvod

Budoucí učitelé oboru Učitelství pro 1. st. na Pedagogické fakultě Ostravské univerzity studují geometrii ve dvou semestrech 2. ročníku, ve 4. ročníku pak navazují jedním semestrem didaktiky geometrie. Vstupní znalosti a dovednosti studentů se v této oblasti velmi liší, zejména v závislosti na typu absolvované střední školy (Zemanová, 2024) a době, která od ukončení studia střední školy uběhla. V předmětu geometrie se jak teoreticky, tak prakticky věnují kompletnímu geometrickému obsahu v souladu s výstupem daným RVP ZV po 5. ročníku, včetně přesahů na vyšší stupeň. Součástí obsahu zimního semestru 2. ročníku je planimetrie, tedy i ujasnění či doplnění mentálního schématu n -úhelníků v posloupnosti n -úhelník – konvexní n -úhelník – čtyřúhelník – rovnoběžník – kosočtverec, a to včetně vlastností těchto útvarů. Současně máme zkušenost, že nejen žáci, studenti, ale i mnoho ostatních dospělých má o kosočtverci chybnou nebo nedostatečnou představu. Mnohdy si představují kosočtverec jako „pootočený“ čtverec, setkali jsme se dokonce se souhlasným tvrzením celé skupiny účastníků semináře pro učitele mateřských škol, když jsme model kosočtverce před nimi otáčeli, že „teď je to čtverec a teď je to kosočtverec“. Jsme si vědomi úskalí rovinné geometrie, jejíž pojmy není možné v reálném prostoru modelovat. Nicméně se můžeme alespoň pokusit didakticky důslednými postupy zabránit nejčastějším miskoncepcím. Správný a zdůvodněný postup budování mentálního schématu kosodélníku, resp. všech rovnoběžníků, je jednou možností.

Tým autorů v publikaci Kritická místa matematiky základní školy (Vondrová, N. a kol., 2015) vymezuje kritická místa jako „*oblasti, v nichž žáci často a opakovaně selhávají, jinak řečeno, které nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a také aby mohla být tvořivě užívána v každodenním životě*“ (Vondrová, N. a kol., 2015, s. 5). Výzkumem ověřili, že jedním z takových kritických míst jsou konstrukční úlohy. Nezabývají se sice konkrétně konstrukcí kosočtverce, nicméně identifikují příčiny žakovských problémů během řešení úlohy, z nichž některé souvisely i s řešitelskými strategiemi našich studentů, např. „*Žák neumí pracovat s nekonkrétním rozměrem, nechápe, co u konstrukční úlohy znamená slovo libovolný či obecný*“ (Vondrová, N. a kol., 2015, s. 24), „*Žák je v zajetí prototypů geometrických objektů, díky čemuž je v řešení úlohy neúspěšný*“ (Vondrová, N. a kol., 2015, s. 25).

2. Metodologie

Využili jsme gradovanou úlohu z Baterie gradovaných úloh (Králová, M. a kol., 2023, str. 138), autory určenou pro 3.–5. ročník ZŠ:

Narýsujte kosočtverec ABCD, když je dána jeho úhlopříčka AC

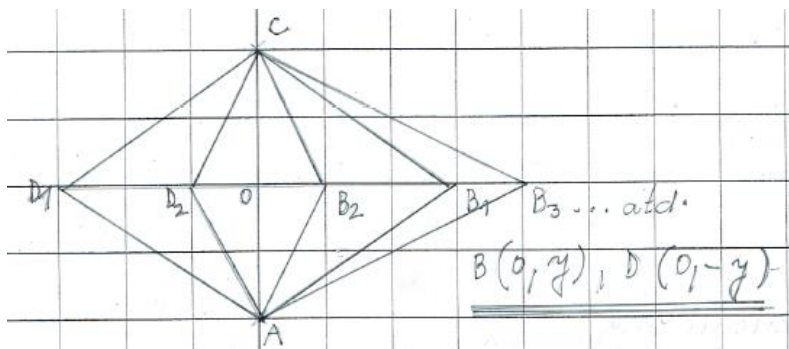
- *varianta a (lehčí)* – $A(0, 2\downarrow)$, $C(0, 2\uparrow)$,
- *varianta b (obtížnější)* – $A(2\leftarrow, 1\uparrow)$, $C(2\rightarrow, 1\downarrow)$

Tuto úlohu jsme zadali studentům 2. ročníku oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ jako součást závěrečného testu v předmětu Geometrie. Studenti řešili úlohu 15.1.2025, celkem 25 studentů. Volili právě jednu ze dvou nabízených variant, přičemž varianta a) byla hodnocena 3 body, varianta b) byla hodnocena 5 body. Zvolenou úroveň měli do práce vyznačit. Mohli pracovat s pravoúhlým trojúhelníkem s ryskou, kružítkem, psacími potřebami a měli k dispozici čtvercovou mříž.

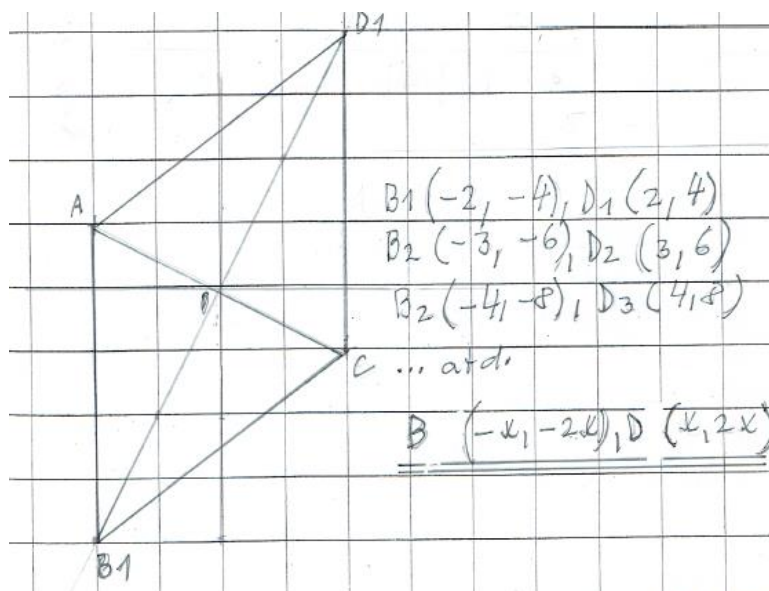
Obě varianty úlohy zadávají kosočtverec mřížovou úhlopříčkou (krajní body leží v průsečících přímků čtvercové mříže), jejíž střed leží v počátku soustavy. Gradačním parametrem je úhel, který svírá úhlopříčka s osami soustavy. Úhlopříčka kosočtverce varianty a) leží v osách, úhlopříčka kosočtverce varianty b) svírá s osami jiný úhel než 90° , resp. 0° .

Obě varianty úlohy mají nekonečně mnoho řešení. Vrcholy B a D se posouvají po úhlopříčce, která je kolmá k úhlopříčce AC (respektive leží na ose úsečky AC). Každá dvojice

bodů B a D je osově souměrná podle přímky, v níž leží úhlopříčka AC , resp. středově souměrná podle středu úhlopříčky AC . Řešením varianty a) je kosočtverec $ABCD$, kde $B(0, y)$, $D(0, -y)$, řešením varianty b) je kosočtverec $ABCD$, kde $B(-x, -2x)$, $D(x, 2x)$, pro $x, y \in \mathbb{Z}$, pokud má být výsledný kosočtverec mřížový, nebo pro $x, y \in \mathbb{R}$, pokud tato podmínka splněna být nemusí. Obrázky 1, 2.



Obrázek 1. Řešení úlohy, varianta a)



Obrázek 2. Řešení úlohy, varianta b)

Předpokládali jsme, že studenti použijí některou ze tří řešitelských strategií:

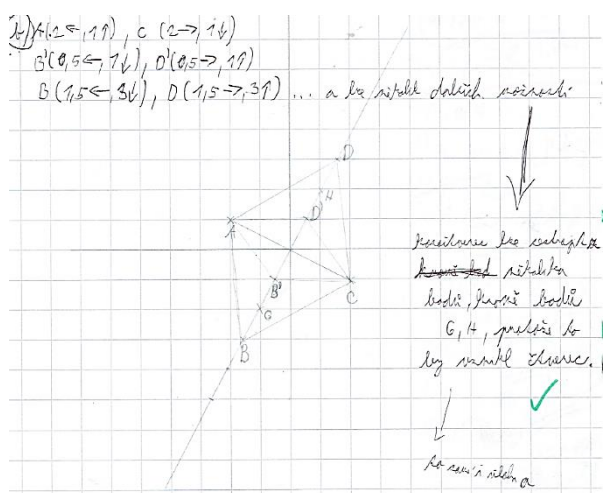
- „zkusmo“ s následnou kontrolou, zda se jedná o kosočtverec, značíme strategie A,
- s využitím znalosti, že úhlopříčky kosočtverce se půlí, jsou kolmé a nejsou shodné vést středem úsečky AC kolmici, vyloučit na ní vrcholy čtverce (úhlopříčky shodné) a všechny dvojice navzájem středově souměrných bodů se středem souměrnosti v bodě O jsou hledané vrcholy B, D kosočtverce $ABCD$, značíme strategie B,
- s využitím znalosti, že hledané vrcholy B, D jsou vrcholy navzájem shodných rovnoramenných trojúhelníků ACD , ACB sestavit průniky kružnic se středy v bodech A, C a shodnými poloměry většími než polovina úsečky AC , vyloučit z nich vrcholy čtverce (úhly ADC, ABC jsou pravé) a všechny ostatní průniky jsou hledané vrcholy B, D kosočtverce $ABCD$, značíme strategie C.

Analýzu řešení jednotlivých respondentů (studentů a žáků) budeme provádět s ohledem na následující jevy:

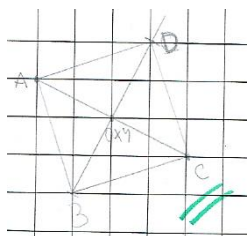
- řešená obtížnost (a / b),
- počet správných řešení,
- strategie řešení ($A / B / C$).

3. Analýza výsledků

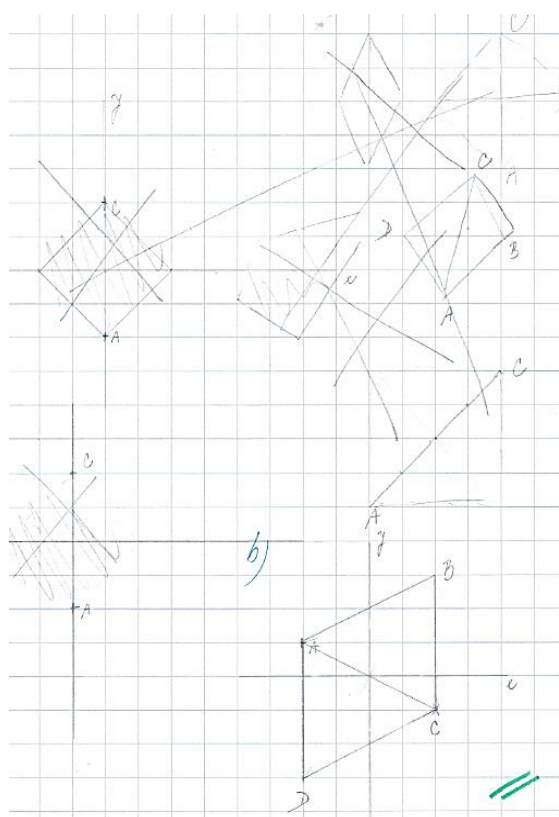
Studenty jsme označili 01–25. Úroveň a (lehkou) řešil 1 student (24), úroveň b (obtížnější) zbývajících 24 studentů. Všechna správná řešení nenašel žádný student, několik správných řešení našel jeden student (01) a právě jedno správné řešení našlo 16 studentů (02–17). Student 01, který jako jediný našel více správných řešení, popisuje „Kosočtverec lze sestavit z několika bodů, kromě bodů G, H , protože to by vznikl čtverec.“ Jeho konstrukci uvádíme na obrázku 3, pro analýzu počítáme čtyři řešení, jak vyznačil body na polopřímce GB . Zbývajících 8 studentů (18–25) uvedlo chybná řešení, vždy právě jedno, a to kosodélník, čtverec nebo obdélník. Všechny kosodélníky, které byly řešením čtyř studentů 18–21 vypadaly stejně, viz obrázek 5 (ilustruje i bezradnost studenta při řešení úlohy). Oba čtverce, které byly řešením dvou studentů 22 a 25, vypadaly stejně, viz obrázky 4, 7. Obdélník, který byl řešením jednoho studenta 24, uvádíme na obrázku 6.



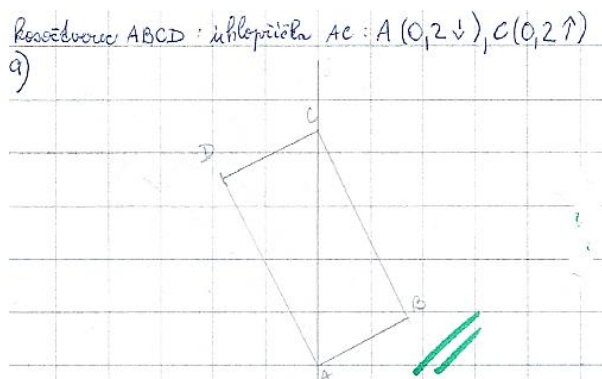
Obrázek 3. Správné řešení, student 01



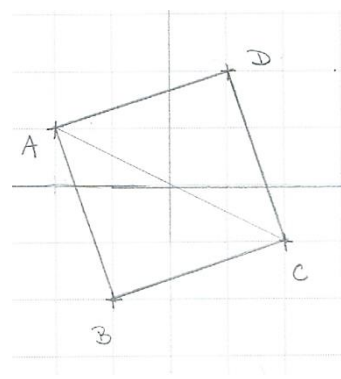
Obrázek 4. Chybné řešení – čtverec, student 22



Obrázek 5. Chybné řešení – kosodélník, student 20



Obrázek 6. Chybné řešení – obdélník, student 24



Obrázek 7. Chybné řešení – obdélník, student 25

Ve strategiích řešení úlohy identifikujeme všechny předpokládané způsoby řešení (A, B, C). Způsob A byl nejobtížněji identifikovatelný, nicméně je pravděpodobný ve dvou chybných řešeních (24 – obr. 4, 25 – obr. 7). Způsob B použilo nebo se snažilo použít 14 studentů (správně 9 studentů 03–11, chybně 5 studentů 18, 19, 21–23, chyba byla dána omylem ve vlastnostech úhlopříček), způsob C použilo 8 studentů (01, 02, 12–17). Identifikaci jsme provedli pozorováním použité konstrukce, obzvláště jsme si všímali využití kružnic, které bylo v testech snadno rozpoznatelné. Skupina studentů, která tuto strategii používala, navíc našla ve většině případů nemřížové řešení úlohy, tedy vrcholy B, D nebyly v mřížových bodech. Pouze 2 studenti (14, 15) z této skupiny volili mřížové vrcholy B, D . Strategii studenta 20, obr. 5, jsme nedokázali identifikovat.

V tabulce 1 uvádíme všechny výsledky přehledně. Ve sloupcích postupně identifikaci studenta (01–25), obtížnost (varianta a, b), počet řešení, správnost řešení (ano, ne), strategie řešení (A, B, C, ? – neidentifikováno).

Tabulka 1. Analýza výsledků

student	obtížnost	počet řešení	správnost řešení	výsledný tvar	strategie řešení
01	b	4	ano	kosočtverec	C
02	b	1	ano	kosočtverec	C
03	b	1	ano	kosočtverec	B
04	b	1	ano	kosočtverec	B
05	b	1	ano	kosočtverec	B
06	b	1	ano	kosočtverec	B
07	b	1	ano	kosočtverec	B
08	b	1	ano	kosočtverec	B
09	b	1	ano	kosočtverec	B
10	b	1	ano	kosočtverec	B
11	b	1	ano	kosočtverec	B
12	b	1	ano	kosočtverec	C
13	b	1	ano	kosočtverec	C
14	b	1	ano	kosočtverec	C
15	b	1	ano	kosočtverec	C
16	b	1	ano	kosočtverec	C
17	b	1	ano	kosočtverec	C

18	b	1	ne	kosodélník	B
19	b	1	ne	kosodélník	B
20	b	1	ne	kosodélník	?
21	b	1	ne	kosodélník	B
22	b	1	ne	čtverec	B
23	b	1	ne	kosodélník	B
24	a	1	ne	obdélník	A
25	b	1	ne	čtverec	A

4. Závěr

Studenti, kteří nenalezli žádné správné řešení, používali buď metodu „zkusmo“ nebo se snažili využít vlastností úhlopříček kosočtverce, které neznali správně. Za kosočtverec považovali kosodélník, příp. čtverec nebo obdélník v nevodorovné poloze. Předpokládáme, že vlastnosti kosočtverce (všechny strany shodné, žádný vnitřní úhel pravý) neověřovali. Zde spatřujeme možnost nápravy v důsledné práci s rovnoběžníky v nevodorovných polohách, zobecňování vlastností rovnoběžníků včetně vlastností jejich úhlopříček a důraz na ověřování výsledků – zkoušku, která má v geometrických úlohách jiný charakter než v aritmetických.

Ukazujeme, že studenti nejsou zdatní v diskuzích geometrických řešení, spokojí se s jediným nalezeným řešením. To by bylo možné tolerovat u žáků 1. stupně, nikoli však jejich budoucích učitelů. Možnost nápravy vidíme ve větším zastoupení (jakýchkoli, nejen geometrických) úloh v učebních materiálech od 1. st. ZŠ, které nemají žádné nebo naopak více řešení, později nekonečně mnoho řešení a v následné diskuzi řešení. Výzvy pro žáky / studenty a související argumentace by měla být rozvíjena od počátku jejich vzdělávacího procesu tak, aby se později naučili řešení zobecnit pomocí formálního jazyka a dobře mu porozumět.

Oba závěry korespondují se zjištěními a doporučeními týmu autorů (Vondrová a kol., 2015), aby učitele (1) „*předcházeli tendencím žáků upínat se na prototypy a nabízeli jim útvary v různých polohách, s různými rozměry, různě značené tak dlouho, dokud nepochopí, které vlastnosti útvaru jsou nutné a které jsou nadbytečné*“ (Vondrová a kol., 2015, s. 26), (2) kladli explicitní důraz na odlišnost geometrických objektů jako obecných (abstraktních) pojmů a jejich reprezentací obrázky. Zatímco v aritmetice „jakékoli číslo“ lze zapsat obecně pomocí písmene a následně s ním takto pracovat, v geometrii „jakýkoli objekt“ nakreslit obecně nelze, vždy použijeme jen reprezentanta.

Výsledky šetření využijeme ve výuce vysokoškolských předmětů Didaktika geometrie a Průběžná profesní praxe z matematiky, jež jsou povinnou součástí studijního plánu oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ. Také s nimi budeme pracovat v dalším vzdělávání učitelů 1. st. ZŠ, zejména provázejících učitelů, jejichž průběžné studium zabezpečujeme. Nicméně tyto výsledky mohou být dobrým východiskem jakéhokoliv vzdělávání budoucích i současných učitelů a dalšího výzkumu.

Acknowledgements

Tento článek vznikl za finanční podpory Evropské unie v rámci projektu REFRESH – Research Excellence For REgion Sustainability and High-tech Industries, reg. č. CZ.10.03.01/00/22_003/0000048, prostřednictvím Operačního programu Spravedlivá transformace.

Literatura

- Králová, M. a kol. (2023) *Baterie gradovaných úloh*. Praha: H-mat, o.p.s. Dostupné z https://www.h-mat.cz/sites/default/files/kestazeni/Hmat_BATERIE_GRADACE_FINAL.pdf
- Vondrová, N. (2015) Kritická místa matematiky základní školy: metodický portál pro učitele. Praha: PedF UK. Dostupné z <https://mdisk.pedf.cuni.cz/Nada/Manuál%20Kritická%20místa%20matematiky%20na%20základní%20škole%20final.pdf>
- Zemanová, R. (2024). Gradované série úloh ve vysokoškolské geometrii. *Elementary Mathematics Education Journal*, 6(2), 43–54.