Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics

The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

2025

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 7

No. 2

Olomouc 2025

ISSN 2694-8133

Univerzita Palackého v Olomouci
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

ve spolupráci s

Jednotou českých matematiků a fyziků
pobočný spolek Olomouc

Elementary Mathematics Education Journal

ročník 7, číslo 2

2025

Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

in cooperation with

The Union of Czech Mathematicians and Physicists
Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 7, No. 2

2025

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Vydavatel: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Česká republika

Předseda redakční rady: David Nocar (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika)

Redakční rada: Daniela Bímová (Technická univerzita v Liberci, Česká republika), Csaba Csíkos (Eötvös Loránd Tudományegyetem, Maďarsko), Radka Dofková (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Ján Gunčaga (Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko), Pavol Hanzel (Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Slovensko), Vlastimil Chytrý (Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, Česká republika), Michaela Kaslová (Univerzita Karlova, Česká republika), Eszter Herendiné Kónya (Debreceni Egyetem, Maďarsko), Janka Kopáčová (Katolícka univerzita v Ružomberku, Slovensko), Radek Krpec (Ostravská univerzita, Česká republika), Josef Molnár (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika & Jednota českých matematiků a fyziků, pobočný spolek Olomouc), David Nocar (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Bohumil Novák (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Eva Nováková (Masarykova Univerzita, Česká republika), Edita Partová (Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko), Šárka Pěchoučková (Západočeská univerzita v Plzni, Česká republika), Milan Pokorný (Trnavská univerzita v Trnave, Slovensko), Alena Prídavková (Prešovská univerzita v Prešove, Slovensko), Jana Příhonská (Technická univerzita v Liberci, Česká republika), Grażyna Rygał (Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy im. Jana Długosza w Częstochowie, Polsko), Libuše Samková (Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Česká republika), Iveta Scholtzová (Prešovská univerzita v Prešove, Slovensko), Ewa Swoboda (Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Jarosławiu im. ks. Bronisława Markiewicza, Polsko), Ilona Olahne Teglasi (Eszterházy Károly Egyetem, Maďarsko), Martina Uhlířová (Univerzita Palackého v Olomouci, Česká republika), Patrik Voštinár (Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Slovensko), Katarína Žilková (Univerzita Komenského v Bratislave, Slovensko)

Redakce:
David Nocar (výkonný redaktor, editor), Radka Dofková (redaktor – editor), Martina Uhlířová (redaktor – příjem článků), Květoslav Bártek (redaktor – web administrátor)

Adresa a kontakty:
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Informace pro autory:
Časopis uveřejňuje články k aktuálním problémům z teorie elementární matematiky, o inovacích, trendech a výzkumech v primárním a preprimárním matematickém vzdělávání. Jednotlivé články jsou anonymně posuzovány dvěma odborníky v recenzním řízením typu „double-blind peer review“. Další informace a podrobné pokyny pro autory jsou k dispozici na webu: http://emejournal.upol.cz.

Za kvalitu obrázků, jazykovou správnost, dodržení bibliografické normy a dodržování publikační etiky odpovídají autoři jednotlivých článků.

Časopis vychází dvakrát ročně.

Ročník 7, číslo 2

Eds. © David Nocar, Radka Dofková, 2025
© Univerzita Palackého v Olomouci, 2025

ISSN 2694-8133

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Publisher: Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Czech Republic

Editor-in-chief: David Nocar (Palacký University Olomouc, Czech Republic)

Editorial Board: Daniela Bímová (Technical University of Liberec, Czech Republic), Csaba Csíkos (Eötvös Loránd University, Hungary), Radka Dofková (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Ján Gunčaga (Comenius University in Bratislava, Slovakia), Pavol Hanzel (Matej Bel University, Slovakia), Vlastimil Chytrý (Jan Evangelista Purkyně University in Ústí nad Labem, Czech Republic), Michaela Kaslová (Charles University, Czech Republic), Eszter Herendiné Kónya (University of Debrecen, Hungary), Janka Kopáčová (Catholic University in Ružomberok, Slovakia), Radek Krpec (University of Ostrava, Czech Republic), Josef Molnár (Palacký University Olomouc, Czech Republic & The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch), David Nocar (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Bohumil Novák (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Eva Nováková (Masaryk University, Czech Republic), Edita Partová (Comenius University in Bratislava, Slovakia), Šárka Pěchoučková (University of West Bohemia, Czech Republic), Milan Pokorný (Trnava University, Slovakia), Alena Prídavková (University of Prešov, Slovakia), Jana Příhonská (Technical University of Liberec, Czech Republic), Grażyna Rygał (Jan Dlugosz University in Czestochowa, Poland), Libuše Samková (University of South Bohemia in v České Budějovice, Czech Republic), Iveta Scholtzová (University of Prešov, Slovakia), Ewa Swoboda (State Higher School of Technology and Economics in Jarosław, Poland), Ilona Olahne Teglasi (Eszterhazy Karoly University, Hungary), Martina Uhlířová (Palacký University Olomouc, Czech Republic), Patrik Voštinár (Matej Bel University, Slovakia), Katarína Žilková (Comenius University in Bratislava, Slovakia)

Redaction:
David Nocar (executive redactor, editor), Radka Dofková (redactor – editor), Martina Uhlířová (redactor – receiving articles), Květoslav Bártek (redactor – web administrator)

Address and contacts:
Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Czech Republic
emej@upol.cz

Information for authors:
The journal publishes articles on current issues in the theory of elementary mathematics, about innovation, trends and research in primary and pre-primary mathematics education. Each article is reviewed by two anonymous experts ("double-blind peer review"). More information and other instructions for authors are available at: http://emejournal.upol.cz.

The authors of the articles are responsible for the quality of the images, language accuracy, compliance with bibliographic standards and adherence to publication ethics.

The journal is published twice a year.

Vol. 7, No. 2

Eds. © David Nocar, Radka Dofková, 2025
© Palacký University Olomouc, 2025

ISSN 2694-8133

Obsah

Renáta ZEMANOVÁ: *Kosočtverec v představách studentů učitelství pro 1. st. ZŠ* 7

Karel PASTOR: *Ryze klokaní úlohy* 14

Jakub LIPTÁK: *Investigating relevant contexts for the RME approach in primary school teacher training: The case of sport activities for learning mathematics* 21

Michaela PETŘÍČKOVÁ, Miroslava JANEČKOVÁ: *Comparison of pupils' self-concepts in mathematics in the context of the transition to the lower-secondary school* 33

Isaac OLOPADE, Emmanuel LAKA, Sunday SANGONIYI, Oluwakorede MATILUKURO: *Impact of parental attitude on students' motivation to learn mathematics* 42

Hana VANTUCHOVÁ: *Abaku* 52

Marek MOKRIŠ: *Analýza konceptov jednoduché geometrické telesá a technológia rozšírenej reality v kurikulálnych dokumentoch na Slovensku* 59

Nasrudeen Ayinde MALIK, Kennedy Otuniuya AKUDO, Adeneye, A. O. AWOFALA, Rianot Temitope YUSSUF: *Perception and attitude of pupils towards the use of Eko-Excel tablet for mathematics learning* 69

Mária KUĽHOVÁ, Alena PRÍDAVKOVÁ: *Scaffolding a rozšírená realita ako didaktické podporné prostriedky pri porozumení matematických konceptov* 79

Květoslav BÁRTEK, Eva BÁRTKOVÁ, David NOCAR: *Možnosti a limity LLM v geometrické přípravě budoucích učitelů 1. stupně základních škol* 89

Content

Renáta ZEMANOVÁ: *Rhombus in images of student teachers for 1st grade of elementary schools* 7

Karel PASTOR: *Authentic kangaroo problems* 14

Jakub LIPTÁK: *Investigating relevant contexts for the RME approach in primary school teacher training: The case of sport activities for learning mathematics* 21

Michaela PETŘÍČKOVÁ, Miroslava JANEČKOVÁ: *Comparison of pupils' self-concepts in mathematics in the context of the transition to the lower-secondary school* 33

Isaac OLOPADE, Emmanuel LAKA, Sunday SANGONIYI, Oluwakorede MATILUKURO: *Impact of parental attitude on students' motivation to learn mathematics* 42

Hana VANTUCHOVÁ: *Abaku* 52

Marek MOKRIŠ: *Analysis of concepts of elementary geometric solids and augmented reality in curriculum documents in Slovakia* 59

Nasrudeen Ayinde MALIK, Kennedy Otuniuya AKUDO, Adeneye, A. O. AWOFALA, Rianot Temitope YUSSUF: *Perception and attitude of pupils towards the use of Eko-Excel tablet for mathematics learning* 69

Mária KUĽHOVÁ, Alena PRÍDAVKOVÁ: *Scaffolding and augmented reality as didactic support tools for understanding mathematical concepts* 79

Květoslav BÁRTEK, Eva BÁRTKOVÁ, David NOCAR: *Opportunities and limits of LLMs in the geometric preparation of pre-service primary school teachers* 89

KOSOČTVEREC V PŘEDSTAVÁCH STUDENTŮ UČITELSTVÍ PRO 1. ST. ZŠ

Renáta ZEMANOVÁ
Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
renata.zemanova@osu.cz

Abstrakt

V článku analyzujeme představy budoucích učitelů 1. st. ZŠ o kosočtverci, a to prostřednictvím řešení konstrukční úlohy určené žákům 3.–5. ročníku ZŠ. Gradovaná úloha ve dvou obtížnostních variantách zadává dva nesousední vrcholy kosočtverce užitím zjednodušeného zápisu kartézských souřadnic a požaduje takto zadaný kosočtverec sestrojit. Před zadáním testu studentům jsme popsali gradační parametry úlohy, možné strategie řešení a predikovali strategie, které studenti použijí. Studentská řešení analyzujeme s ohledem na volbu obtížnostní varianty, počet nalezených řešení, správnost řešení a strategie řešení. Zvláštní pozornost věnujeme tvarům, které studenti považují za kosočtverec – vyskytuje se zde kromě kosočtverce čtverec, obdélník a kosodélník. Cílem studie je poukázat na klíčové miskoncepce, které studenti i po absolvování základního kurzu planimetrie stále mají.

Klíčová slova: 1. st. ZŠ, geometrie, kosočtverec, geometrické konstrukce, čtvercová mříž, kartézská soustava souřadnic, gradovaná úloha

RHOMBUS IN IMAGES OF STUDENT TEACHERS FOR 1ST GRADE OF ELEMENTARY SCHOOLS

Abstract

In the article, we analyze the ideas of the future 1st of grade elementary school teachers about a rhombus, through the solution of a construction problem intended for students in grades 3–5 of elementary school. The graded problem in two difficulty variants specifies two non-adjacent vertices of a rhombus using simplified notation of Cartesian coordinates and requires the construction of the rhombus thus specified. Before assigning the test to the students, we described the gradation parameters of the problem, possible solution strategies, and predicted the strategies that the students would use. We analyze the students' solutions with respect to the choice of difficulty variant, the number of solutions found, the correctness of the solution, and the solution strategy. We pay special attention to the shapes that the students consider to be a rhombus - in addition to the rhombus, there are also squares, rectangles, and rhombuses. The aim of the study is to point out key misconceptions that students still have even after completing a basic course in planimetry.

Keywords: 1st grade of elementary school, geometry, rhombus, geometric constructions, square lattice, Cartesian system, graded problem

1. Úvod

Budoucí učitelé oboru Učitelství pro 1. st. na Pedagogické fakultě Ostravské univerzity studují geometrii ve dvou semestrech 2. ročníku, ve 4. ročníku pak navazují jedním semestrem didaktiky geometrie. Vstupní znalosti a dovednosti studentů se v této oblasti velmi liší, zejména v závislosti na typu absolvované střední školy (Zemanová, 2024) a době, která od ukončení studia střední školy uběhla. V předmětu geometrie se jak teoreticky, tak prakticky věnují kompletnímu geometrickému obsahu v souladu s výstupem daným RVP ZV po 5. ročníku, včetně přesahů na vyšší stupeň. Součástí obsahu zimního semestru 2. ročníku je planimetrie, tedy i ujasnění či doplnění mentálního schématu n-úhelníků v posloupnosti n-úhelník – konvexní n-úhelník – čtyřúhelník – rovnoběžník – kosočtverec, a to včetně vlastností těchto útvarů. Současně máme zkušenost, že nejen žáci, studenti, ale i mnoho ostatních dospělých má o kosočtverci chybnou nebo nedostatečnou představu. Mnohdy si představují kosočtverec jako „pootočený“ čtverec, setkali jsme se dokonce se souhlasným tvrzením celé skupiny účastníků semináře pro učitele mateřských škol, když jsme model kosočtverce před nimi otáčeli, že „teď je to čtverec a teď je to kosočtverec“. Jsme si vědomi úskalí rovinné geometrie, jejíž pojmy není možné v reálném prostoru modelovat. Nicméně se můžeme alespoň pokusit didakticky důslednými postupy zabránit nejčastějším miskoncepcím. Správný a zdůvodněný postup budování mentálního schématu kosodélníku, resp. všech rovnoběžníků, je jednou možností.

Tým autorů v publikaci Kritická místa matematiky základní školy (Vondrová, N. a kol., 2015) vymezuje kritická místa jako „*oblasti, v nichž žáci často a opakovaně selhávají, jinak řečeno, které nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a také aby mohla být tvořivě užívána v každodenním životě“* (Vondrová, N. a kol., 2015, s. 5). Výzkumem ověřili, že jedním z takových kritických míst jsou konstrukční úlohy. Nezabývají se sice konkrétně konstrukcí kosočtverce, nicméně identifikují příčiny žákovských problémů během řešení úlohy, z nichž některé souvisely i s řešitelskými strategiemi našich studentů, např. „*Žák neumí pracovat s nekonkrétním rozměrem, nechápe, co u konstrukční úlohy znamená slovo libovolný či obecný*“ (Vondrová, N. a kol., 2015, s. 24), „*Žák je v zajetí prototypů geometrických objektů, díky čemuž je v řešení úlohy neúspěšný*“ (Vondrová, N. a kol., 2015, s. 25).

2. Metodologie

Využili jsme gradovanou úlohu z Baterie gradovaných úloh (Králová, M. a kol., 2023, str. 138), autory určenou pro 3.–5. ročník ZŠ:

Narýsujte kosočtverec ABCD, když je dána jeho úhlopříčka AC

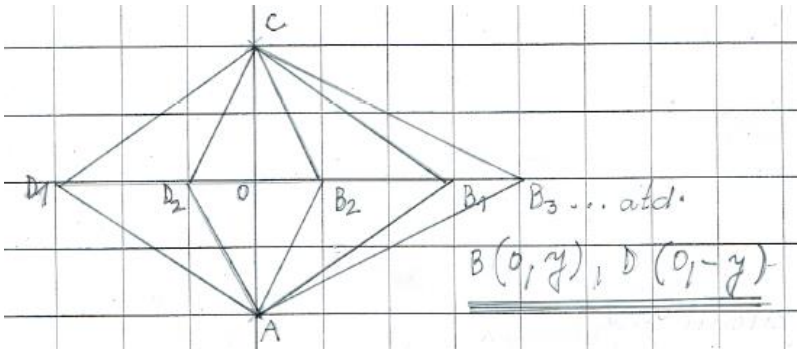
- *varianta a (lehčí) – A* (0, 2↓)*, C* (0, 2↑)*,*
- *varianta b (obtížnější) – A* (2←, 1↑)*, C* (2→, 1↓)

Tuto úlohu jsme zadali studentům 2. ročníku oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ jako součást závěrečného testu v předmětu Geometrie. Studenti řešili úlohu 15.1.2025, celkem 25 studentů. Volili právě jednu ze dvou nabízených variant, přičemž varianta a) byla hodnocena 3 body, varianta b) byla hodnocena 5 body. Zvolenou úroveň měli do práce vyznačit. Mohli pracovat s pravoúhlým trojúhelníkem s ryskou, kružítkem, psacími potřebami a měli k dispozici čtvercovou mříž.

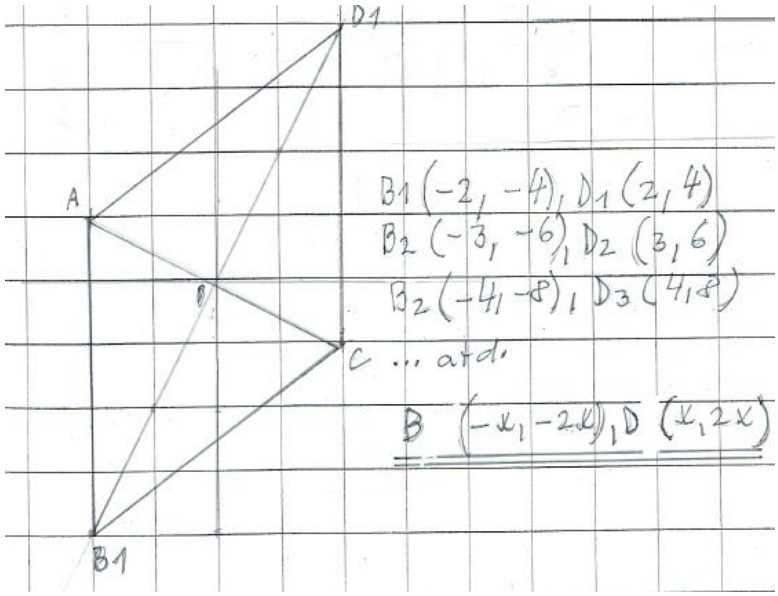
Obě varianty úlohy zadávají kosočtverec mřížovou úhlopříčkou (krajní body leží v průsečících přímek čtvercové mříže), jejíž střed leží v počátku soustavy. Gradačním parametrem je úhel, který svírá úhlopříčka s osami soustavy. Úhlopříčka kosočtverce varianty a) leží v osách, úhlopříčka kosočtverce varianty b) svírá s osami jiný úhel než 90°, resp. 0.

Obě varianty úlohy mají nekonečně mnoho řešení. Vrcholy *B* a *D* se posouvají po úhlopříčce, která je kolmá k úhlopříčce *AC* (respektive leží na ose úsečky *AC*). Každá dvojice

bodů *B* a *D* je osově souměrná podle přímky, v níž leží úhlopříčka *AC*, resp. středově souměrná podle středu úhlopříčky *AC*. Řešením varianty a) je kosočtverec *ABCD*, kde *B* (0, *y*), *D* (0, –*y*), řešením varianty b) je kosočtverec *ABCD*, kde *B* (–*x*, –2*x*), *D* (*x*, 2*x*), pro *x*, *y* ∈ ℤ, pokud má být výsledný kosočtverec mřížový, nebo pro *x*, *y* ∈ ℝ, pokud tato podmínka splněna být nemusí. Obrázky 1, 2.



Obrázek 1. Řešení úlohy, varianta *a*)



Obrázek 2. Řešení úlohy, varianta *b*)

Předpokládali jsme, že studenti použijí některou ze tří řešitelských strategií:

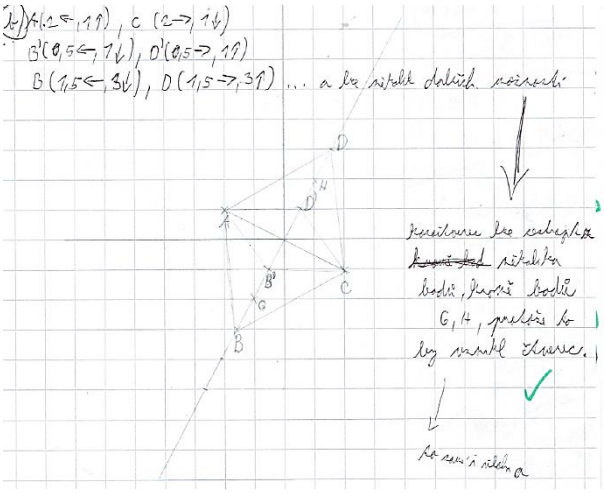
- „zkusmo“ s následnou kontrolou, zda se jedná o kosočtverec, značíme strategie A,
- s využitím znalosti, že úhlopříčky kosočtverce se půlí, jsou kolmé a nejsou shodné vést středem úsečky *AC* kolmici, vyloučit na ní vrcholy čtverce (úhlopříčky shodné) a všechny dvojice navzájem středově souměrných bodů se středem souměrnosti v bodě *O* jsou hledané vrcholy *B*, *D* kosočtverce *ABCD*, značíme strategie B,
- s využitím znalosti, že hledané vrcholy *B*, *D* jsou vrcholy navzájem shodných rovnoramenných trojúhelníků *ACD*, *ACB* sestrojit průniky kružnic se středy v bodech *A*, *C* a shodnými poloměry většími než polovina úsečky *AC*, vyloučit z nich vrcholy čtverce (úhly *ADC*, *ABC* jsou pravé) a všechny ostatní průniky jsou hledané vrcholy *B*, *D* kosočtverce *ABCD*, značíme strategie C.

Analýzu řešení jednotlivých respondentů (studentů a žáků) budeme provádět s ohledem na následující jevy:

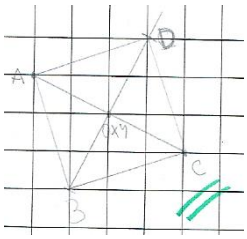
- řešená obtížnost (*a* / *b*),
- počet správných řešení,
- strategie řešení (A / B / C).

3. Analýza výsledků

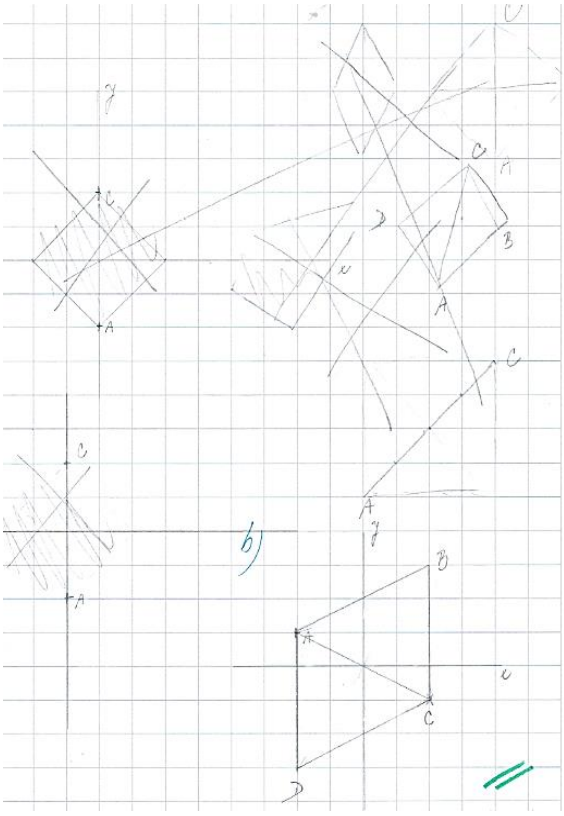
Studenty jsme označili 01–25. Úroveň *a* (lehkou) řešil 1 student (24), úroveň *b* (obtížnější) zbývajících 24 studentů. Všechna správná řešení nenašel žádný student, několik správných řešení našel jeden student (01) a právě jedno správné řešení našlo 16 studentů (02–17). Student 01, který jako jediný našel více správných řešení, popisuje „*Kosočtverec lze sestrojit z několika bodů, kromě bodů G, H, protože to by vznikl čtverec.*“ Jeho konstrukci uvádíme na obrázku 3, pro analýzu počítáme čtyři řešení, jak vyznačil body na polopřímce *GB*. Zbývajících 8 studentů (18–25) uvedlo chybná řešení, vždy právě jedno, a to kosodélník, čtverec nebo obdélník. Všechny kosodélníky, které byly řešením čtyř studentů 18–21 vypadaly stejně, viz obrázek 5 (ilustruje i bezradnost studenta při řešení úlohy). Oba čtverce, které byly řešením dvou studentů 22 a 25, vypadaly stejně, viz obrázky 4, 7. Obdélník, který byl řešením jednoho studenta 24, uvádíme na obrázku 6.



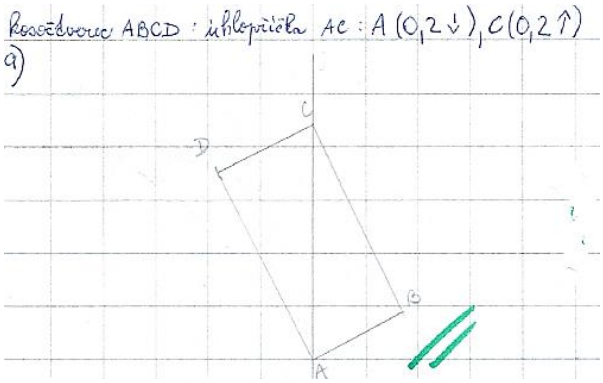
Obrázek 3. Správné řešení, student 01



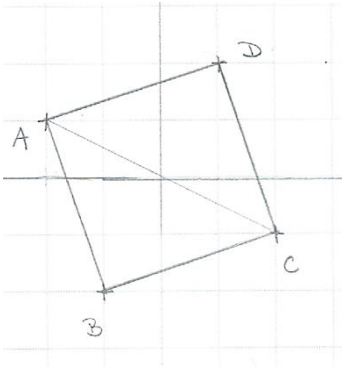
Obrázek 4. Chybné řešení – čtverec, student 22



Obrázek 5. Chybné řešení – kosodélník, student 20



Obrázek 6. Chybné řešení – obdélník, student 24



Obrázek 7. Chybné řešení – obdélník, student 25

Ve strategiích řešení úlohy identifikujeme všechny předpokládané způsoby řešení (A, B, C). Způsob A byl nejobtížněji identifikovatelný, nicméně je pravděpodobný ve dvou chybných řešeních (24 – obr. 4, 25 – obr. 7). Způsob B použilo nebo se snažilo použít 14 studentů (správně 9 studentů 03–11, chybně 5 studentů 18, 19, 21–23, chyba byla dána omylem ve vlastnostech úhlopříček), způsob C použilo 8 studentů (01, 02, 12–17). Identifikaci jsme provedli pozorováním použité konstrukce, obzvláště jsme si všímali využití kružnic, které bylo v testech snadno rozpoznatelné. Skupina studentů, která tuto strategii používala, navíc našla ve většině případů nemřížové řešení úlohy, tedy vrcholy *B*, *D* nebyly v mřížových bodech. Pouze 2 studenti (14, 15) z této skupiny volili mřížové vrcholy *B*, *D*. Strategii studenta 20, obr. 5, jsme nedokázali identifikovat.

V tabulce 1 uvádíme všechny výsledky přehledně. Ve sloupcích postupně identifikaci studenta (01–25), obtížnost (varianta *a*, *b*), počet řešení, správnost řešení (ano, ne), strategie řešení (A, B, C, ? – neidentifikováno).

Tabulka 1. Analýza výsledků

student	obtížnost	počet řešení	správnost řešení	výsledný tvar	strategie řešení
01	b	4	ano	kosočtverec	C
02	b	1	ano	kosočtverec	C
03	b	1	ano	kosočtverec	B
04	b	1	ano	kosočtverec	B
05	b	1	ano	kosočtverec	B
06	b	1	ano	kosočtverec	B
07	b	1	ano	kosočtverec	B
08	b	1	ano	kosočtverec	B
09	b	1	ano	kosočtverec	B
10	b	1	ano	kosočtverec	B
11	b	1	ano	kosočtverec	B
12	b	1	ano	kosočtverec	C
13	b	1	ano	kosočtverec	C
14	b	1	ano	kosočtverec	C
15	b	1	ano	kosočtverec	C
16	b	1	ano	kosočtverec	C
17	b	1	ano	kosočtverec	C

18	b	1	ne	kosodélník	B
19	b	1	ne	kosodélník	B
20	b	1	ne	kosodélník	?
21	b	1	ne	kosodélník	B
22	b	1	ne	čtverec	B
23	b	1	ne	kosodélník	B
24	a	1	ne	obdélník	A
25	b	1	ne	čtverec	A

4. Závěr

Studenti, kteří nenalezli žádné správné řešení, používali buď metodu „zkusmo“ nebo se snažili využít vlastností úhlopříček kosočtverce, které neznali správně. Za kosočtverec považovali kosodélník, příp. čtverec nebo obdélník v nevodorovné poloze. Předpokládáme, že vlastnosti kosočtverce (všechny strany shodné, žádný vnitřní úhel pravý) neověřovali. Zde spatřujeme možnost nápravy v důsledné práci s rovnoběžníky v nevodorovných polohách, zobecňování vlastností rovnoběžníků včetně vlastností jejich úhlopříček a důraz na ověřování výsledků – zkoušku, která má v geometrických úlohách jiný charakter než v aritmetických.

Ukazujeme, že studenti nejsou zdatní v diskuzích geometrických řešení, spokojí se s jediným nalezeným řešením. To by bylo možné tolerovat u žáků 1. stupně, nikoli však jejich budoucích učitelů. Možnost nápravy vidíme ve větším zastoupení (jakýchkoli, nejen geometrických) úloh v učebních materiálech od 1. st. ZŠ, které nemají žádné nebo naopak více řešení, později nekonečně mnoho řešení a v následné diskuzi řešení. Výzvy pro žáky / studenty a související argumentace by měla být rozvíjena od počátku jejich vzdělávacího procesu tak, aby se později naučili řešení zobecnit pomocí formálního jazyka a dobře mu porozumět.

Oba závěry korespondují se zjištěními a doporučeními týmu autorů (Vondrová a kol., 2015), aby učitele (1) „*předcházeli tendencím žáků upínat se na prototypy a nabízeli jim útvary v různých polohách, s různými rozměry, různě značené tak dlouho, dokud nepochopí, které vlastnosti útvaru jsou nutné a které jsou nadbytečné*“ (Vondrová a kol., 2015, s. 26), (2) kladli explicitní důraz na odlišnost geometrických objektů jako obecných (abstraktních) pojmů a jejich reprezentací obrázky. Zatímco v aritmetice „jakékoli číslo“ lze zapsat obecně pomocí písmene a následně s ním takto pracovat, v geometrii „jakýkoli objekt“ nakreslit obecně nelze, vždy použijeme jen reprezentanta.

Výsledky šetření využijeme ve výuce vysokoškolských předmětů Didaktika geometrie a Průběžná profesní praxe z matematiky, jež jsou povinnou součástí studijního plánu oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ. Také s nimi budeme pracovat v dalším vzdělávání učitelů 1. st. ZŠ, zejména provázejících učitelů, jejichž průběžné studium zabezpečujeme. Nicméně tyto výsledky mohou být dobrým východiskem jakéhokoliv vzdělávání budoucích i současných učitelů a dalšího výzkumu.

Acknowledgements

Tento článek vznikl za finanční podpory Evropské unie v rámci projektu REFRESH – Research Excellence For REgion Sustainability and High-tech Industries, reg. č. CZ.10.03.01/00/22_003/0000048, prostřednictvím Operačního programu Spravedlivá transformace.

Literatura

Králová, M. a kol. (2023) *Baterie gradovaných úloh*. Praha: H-mat, o.p.s. Dostupné z https://www.h-mat.cz/sites/default/files/kestazeni/Hmat_BATERIE_GRADACE_FINAL.pdf

Vondrová, N. (2015) Kritická místa matematiky základní školy: metodický portál pro učitele. Praha: PedF UK. Dostupné z https://mdisk.pedf.cuni.cz/Nada/Manuál%20Kritická%20místa%20matematiky%20na%20základní20%škole%20final.pdf

Zemanová, R. (2024). Gradované série úloh ve vysokoškolské geometrii. *Elementary Mathematics Education Journal*, *6*(2), 43–54.

RYZE KLOKANÍ ÚLOHY

Karel PASTOR
Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)
karel.pastor@upol.cz

Abstrakt

Ryze klokaní úlohou rozumíme takovou úlohu ze soutěže Matematický klokan, která ve svém zadání obsahuje motiv klokana.

Bude nás zajímat výskyt ryze klokaních úloh jak s ohledem na jednotlivé kategorie soutěže (Cvrček, Klokánek, Benjamín, Kadet, Junior a Student), tak i na jejich bodové ohodnocení (trojbodové, čtyřbodové a pětibodové).

V příspěvku ukážeme příklady ryze klokaních úloh z nejmladších kategorií (Cvrček a Klokánek).

Klíčová slova: soutěž Matematický klokan, Cvrček, Klokánek, ryze klokaní úlohy.

AUTHENTIC KANGAROO PROBLEMS

Abstract

We define authentic kangaroo problems as problems from the Mathematical Kangaroo competition that explicitly feature a kangaroo motif in their wording.

We will be interested in the occurrence of authentic kangaroo problems both about the individual categories of the competition (Pre-Ecolier, Ecolier, Benajmin, Cadet, Junior, and Student) and their point evaluation (three-point, four-point, and five-point).

The paper presents examples of such problems from the youngest categories (Pre-Ecolier and Ecolier).

Keywords: Mathematical Kangaroo competition, Pre-Ecolier, Ecolier, authentic kangaroo problems.

1. Úvod

Matematický klokan je mezinárodní matematická soutěž, které se účastní velké množství žáků základních a středních škol, například v roce 2025 jich bylo 420 653 (Matematický klokan, 2025). Počet soutěžících koresponduje s jedním ze dvou hlavních cílů soutěže (Molnár, 2019), kterým je popularizace matematiky. Důvody, proč je soutěž tak oblíbená, byly již několikrát popsány, viz například (Novák et al., 2005), (Molnár, 2019) nebo (Vaněk et al., 2018). Připomeňme, že i slabší žáci při této soutěži zažívají radost ze správně vyřešeného příkladu, ať už se k němu doberou správnou úvahou, výpočtem nebo odhadem, která z pěti nabízených možností by mohla být řešením.

Pro úlohy předkládané soutěžícím se vžil název „klokanské“ (Novák et al., 2005). Jak uvádějí autoři článku (Vaněk et al., 2018, s. 340), „klokanské úlohy by měly splňovat následující podmínky:

- jsou přiměřené věku řešitelů,
- musejí zaujmout, být motivující,
- nejedná se o typicky školské úlohy,
- pro jejich řešení není potřeba znalosti složitého matematického aparátu, stačí školské znalosti a dobrý nápad, tzn. existuje velmi krátké a elegantní řešení,
- na jejich vyřešení postačí nejvýše 5 minut, tříbodové je možné většinou řešit tzv. „z hlavy“,
- lze je formulovat jako úlohu s výběrem odpovědi,
- zadání musí být jednoznačné a co nejkratší.“

Druhou podmínku, tedy aby úloha zaujala, lze jistě naplnit různými způsoby. Jedním z nich může být přítomnost klokana v textu úlohy. Na takové úlohy se v našem článku zaměříme a mimo jiné budeme sledovat jejich výskyt v jednotlivých kategoriích soutěže Matematický klokan v ČR.

Ryze klokaní úlohou rozumíme takovou úlohu ze soutěže Matematický klokan, která ve svém zadání obsahuje motiv klokana – ať už jako zvířete, slova, nebo součásti názvu objektu či události. Tento motiv může být vyjádřen slovně nebo obrazově.

2. Statistiky

Budeme analyzovat všechny dosavadní ročníky soutěže Matematický klokan, které v České republice proběhly v letech 1995–2025. Úlohy z let 1995 až 1999 je možné najít v publikacích vydaných v roce 2000 nebo 2001 (Calábek et al., 2001; Emanovský et al., 2001; Horenský et al., 2001; Novák et al., 2000; Růžičková et al., 2000). Úlohy z let 2000 až 2004 lze najít v (Calábek & Švrček, 2007; Hodaňová et al., 2007; Horenský et al., 2007; Novák & Kubátová, 2007; Uhlířová, 2007). Na oficiálním webu soutěže (Matematický klokan, 2025) je pak možné dohledat soutěžní úlohy z let 2004 až 2025.

V tabulce 1 je uvedeno, kolik úloh se řešilo v jednotlivých kategoriích a v jednotlivých letech. Můžeme si všimnout, že počty úloh se postupně měnily a že od roku 2013 máme současnou podobu, kdy v kategorii Cvrček soutěžící řeší 18 úloh a ve zbývajících kategoriích 24 úloh.

Tabulka 1. Počty soutěžních úloh v jednotlivých letech

	1995	1996	1997	1998-2001	2002-2004	2005-2012	2013-2025
Cvrček	-	-	-	-	-	12	18
Klokánek	30	25	15	24	24	24	24
Benjamín	30	30	30	30	24	24	24
Kadet	30	30	30	30	24	24	24
Junior	30	30	30	30	24	24	24
Student	30	30	30	30	24	24	24

S výjimkou kategorie Klokánek v letech 1996 a 2000 byla v každé kategorii soutěže Matematický klokan třetina úloh ohodnocena 3 body, třetina úloh 4 body a třetina úloh 5 body. Ve zmiňovaném roce 1996 bylo v kategorii Klokánek zadáno 10 trojbodových úloh, 10 čtyřbodových a 5 pětibodových úloh, v roce 2000 pak 8 trojbodových, 10 čtyřbodových a 6 pětibodových úloh.

V tabulce 2 jsou uvedeny všechny ryze klokaní úlohy, přičemž jsou rozděleny podle toho, v jaké kategorii se vyskytly a kolika body byly ohodnoceny. Například údaj 4 (2005) znamená, že se jedná o úlohu číslo 4 z roku 2005.

Tabulka 2. Ryze klokaní úlohy

	3 body	4 body	5 bodů
Cvrček	4 (2005), 3 (2015), 5 (2018), 3 (2019), 3 (2020), 1 (2021), 2 (2023), 1 (2025), 3 (2025)	7 (2006), 5 (2007), 6 (2009), 10 (2014), 11 (2016), 11 (2017), 11 (2021), 8 (2022), 9 (2022)	15 (2015)
Klokánek	1 (1996), 3 (1998), 1 (2000), 8 (2000), 1 (2002), 3 (2003), 4 (2005), 6 (2006), 3 (2007), 2 (2009), 1 (2011), 3 (2011), 1 (2013), 8 (2015), 3 (2016), 2 (2017), 1 (2018), 7 (2018), 5 (2022), 8 (2024), 7 (2025)	12 (1996), 14 (1996), 10 (1997), 15 (1999), 11 (2001), 14 (2002), 13 (2003), 15 (2014), 13 (2020), 10 (2022), 10 (2025)	29 (1995), 19 (1999), 20 (2003), 23 (2003), 19 (2005), 18 (2008), 19 (2014), 21 (2014), 22 (2020), 24 (2020), 17 (2023), 17 (2024)
Benjamín	26 (1995), 1 (1996), 5 (1997), 1 (1998), 2 (1998), 1 (2001), 3 (2002), 2 (2003), 7 (2005), 4 (2007), 1 (2012), 2 (2012), 7 (2012), 1 (2014), 1 (2015), 7 (2019), 8 (2024)	12 (1997), 13 (1998), 12 (1999), 17 (1999), 19 (2000), 14 (2007), 9 (2011), 15 (2012), 12 (2015), 16 (2015), 12 (2018)	24 (1996), 23 (2004), 23 (2005), 24 (2009), 22 (2015), 19 (2017)
Kadet	1 (1995), 4 (1995), 1 (1997), 3 (1997), 1 (1998), 2 (1998), 6 (1998), 2 (1999), 3 (1999), 10 (2000), 5 (2001), 4 (2002), 1 (2005), 5 (2005), 6 (2005), 8 (2005), 1 (2006), 5 (2006), 2 (2010), 3 (2010), 1 (2014), 2 (2020), 3 (2022)	12 (1996), 14 (1999), 14 (2005), 12 (2006), 14 (2016), 14 (2019), 12 (2024)	22 (2001), 20 (2004), 22 (2005), 17 (2008), 21 (2010), 20 (2015), 17 (2017), 21 (2021), 24 (2022), 22 (2023)
Junior	2 (1995), 5 (1995), 1 (1998), 9 (1999), 1 (2005), 2 (2005), 7 (2007), 7 (2017), 5 (2019)	18 (1998), 12 (2006), 9 (2012), 10 (2019), 11 (2024)	17 (2007), 22 (2008), 23 (2009), 24 (2016)
Student	1 (1995), 3 (2005), 8 (2019), 6 (2023)	12 (2009), 16 (2011), 16 (2012), 14 (2025)	18 (2014), 24 (2015), 21 (2021)

Předchozí informace můžeme dále zpracovat do tří následujících tabulek. Tabulka 3 ukazuje počty všech dosavadních soutěžních úloh a ryze klokaních úloh podle jednotlivých kategorií. Tabulka 4 pak tyto počty blíže specifikuje s ohledem na bodové ohodnocení úloh a tabulka 5 podle roku výskytu.

V tabulce 3 si můžeme všimnout, že ryze klokaní úlohy nejsou v jednotlivých kategoriích zastoupeny rovnoměrně (příslušná p-hodnota chí-kvadrát testu dobré shody vychází 0,0000075). Procentuálně jsou ryze klokaní úlohy zastoupeny nejvíce v kategorii Cvrček a nejméně v kategorii Student. Nejvíce ryze klokaních úloh soutěžící řešili v kategorii Klokánek.

Jak je vidět v tabulce 4, mezi ryze klokaními úlohami jsou nejvíce zastoupeny úlohy, které jsou ohodnoceny 3 body a nejméně se vyskytují pětibodové úlohy. V kategorii Student má rozdělení úloh podle bodového ohodnocení ze všech kategorií nejblíže k rovnoměrnému.

Tabulka 3. Souhrnné počty úloh v jednotlivých kategoriích

	počet všech úloh	počet ryze klokaních úloh
Cvrček	330	19 (11,45 %)
Klokánek	742	44 (5,93 %)
Benjamín	786	34 (4,33 %)
Kadet	786	40 (5,09 %)
Junior	786	18 (2,29 %)
Student	786	11 (1,40 %)
Součet	**4216**	**166 (3,94 %)**

Tabulka 4. Počet ryze klokaních úloh podle bodového ohodnocení

	úlohy za 3 body	úlohy za 4 body	úlohy za 5 bodů
Cvrček	9	9	1
Klokánek	21	11	12
Benjamín	17	11	6
Kadet	23	7	10
Junior	9	5	4
Student	4	4	3
Součet	**83**	**47**	**36**

Tabulka 5. Počet ryze klokaních úloh podle roku výskytu

1995	7	2003	5	2011	4	2019	6
1996	6	2004	2	2012	6	2020	5
1997	5	2005	14	2013	1	2021	4
1998	9	2006	6	2014	7	2022	6
1999	8	2007	6	2015	9	2023	4
2000	4	2008	3	2016	4	2024	5
2001	4	2009	5	2017	5	2025	5
2002	4	2010	3	2018	4		

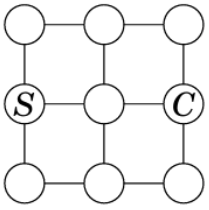
Tabulka 2 udává, že v šesti ročnících jak kategorie Klokánek, tak kategorie Kadet se soutěžící s ryze klokaní úlohou setkali hned na začátku soutěže, tj. v úloze 1.

Z tabulky 5 plyne, že ve všech dosavadních ročnících soutěže Matematický klokan se vyskytla alespoň jedna ryze klokaní úloha. Nejvíce jich bylo v roce 2005 a nejméně v roce 2013, kdy se jediná ryze klokaní úloha objevila v kategorii Klokánek.

3. Řešené příklady

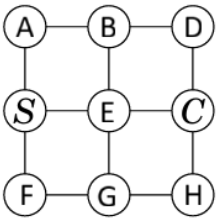
V této kapitole vyřešíme několik ryze klokaních úloh pro kategorie 1. stupně ohodnocených 5 body. Jak vyplývá z tabulky 2, v kategorii Cvrček se soutěžící dosud setkali s jedinou takovou úlohou.

Příklad 1 (kategorie Cvrček, rok 2015, úloha 15). Klokan Jirka umí skákat vždy jen na sousední políčko a nesmí se vracet. Kolika různými cestami se mohl dostat čtyřmi skoky ze *S* do *C*?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Řešení. Pro názornost popíšeme všechna políčka.



Budeme hledat všechny možnosti. Klokan Jirka má tři možnosti, jak zahájit svou cestu.

- Skočí na políčko A. Vzhledem k tomu, že se nesmí vracet, musí dále vstoupit na políčko B a pak jeho cesta buď pokračuje přes políčko D do C nebo přes políčko E do C.
- Skočí na políčko F. Vzhledem k tomu, že se nesmí vracet, musí dále vstoupit na políčko G a pak jeho cesta buď pokračuje přes políčko E do C nebo přes políčko H do C.
- Skočí na políčko E. V dalším skoku má dvě možnosti: buď skočí na políčko B a pak se na políčko C dostane přes políčko D nebo skočí na políčko G a poté se na políčko C dostane přes políčko H.

Postupně jsme získali 6 možností, které můžeme schematicky zapsat: S-A-B-D-C, S-A-B-E-C, S-F-G-E-C, S-F-G-H-C, S-E-B-D-C, S-E-G-H-C. Správnou odpovědí je D).

Pětibodových ryze klokaních úloh řešili soutěžící kategorie Klokánek v historii soutěže Matematický klokan celkem 12, podívejme se na tři z nich.

Příklad 2 (kategorie Klokánek, rok 2023, úloha 17). V řadě stojí vedle sebe 6 ježur a 2 klokani. Mají přidělená čísla 1 až 8. Mezi libovolnými třemi vedle sebe stojícími zvířaty je vždy právě jeden klokan. Které číslo má přidělené jeden z klokanů?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Řešení. Jelikož mezi libovolnými třemi vedle sebe stojícími zvířaty je vždy právě jeden klokan, musí mít klokan přidělené jedno z čísel 1, 2, 3 a také jedno z čísel 6, 7, 8. Klokani jsou pouze dva, tedy čísla 4 a 5 musí mít ježury. Vzhledem k tomu, že mezi zvířaty s přidělenými čísly 3, 4 a 5 musí být klokan, má jeden z klokanů přidělené číslo 3. Obdobně, mezi zvířaty s přidělenými čísly 4, 5 a 6 musí být klokan, tedy druhý klokan má přidělené číslo 6. Správnou odpovědí je C).

Příklad 3 (kategorie Klokánek, rok 2020, úloha 22). Olomouckého Běhu s klokanem se zúčastnilo několik týmů. Každý tým měl 5 nebo 6 běžců. Celkem se závodu zúčastnilo 43 závodníků. Kolik týmů se do soutěže zapojilo?

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Řešení. Úlohu můžeme vyřešit rozborem, kolik šestičlenných týmů je možné ze 43 závodníků vytvořit tak, aby zbývající závodníci mohli vytvořit pětičlenné týmy.

Jelikož $43 - 0 \cdot 6$ není dělitelné 5, situace s žádným vytvořeným šestičlenným týmem by zadání úlohy nevyhovovala. Stejně tak dělitelné 5 nejsou výrazy $43 - 1 \cdot 6$ a $43 - 2 \cdot 6$, tedy nemohl být vytvořen jeden šestičlenný tým a ani dva šestičlenné týmy. Ovšem $43 - 3 \cdot 6 = 25$, což je číslo dělitelné 5 beze zbytku. Ze 43 závodníků je tak možné vytvořit 3 šestičlenné týmy a 5 pětičlenných týmů, což je dohromady 8 týmů. Tato možnost je i v nabídce odpovědí a jelikož víme, že právě jedna odpověď je správná, můžeme řešení úlohy ukončit a konstatovat, že správnou odpovědí je D).

Příklad 4 (kategorie Klokánek, rok 2020, úloha 24). Adam nahrazoval v zápise KAN − ROO + GA stejná písmena stejnými číslicemi a různá písmena různými číslicemi od 1 do 9. Urči, kterou největší hodnotu výpočtu mohl získat.

A) 925 B) 933 C) 939 D) 942 E) 948

Řešení. Vidíme, že KAN a GA by měly být co největší. Na místo stovek v KAN dosadíme největší možnou číslici, tedy 9. Dále bychom měli na místo desítek v KAN a GA dosadit dvě další největší číslice, tj. 8 a 7. Jelikož na místě jednotek v GA se vyskytuje stejné písmeno jako na místě desítek v KAN, zvolíme pro A číslici 8 a pro G číslici 7. Z dosud nepoužitých číslic je nyní nejvyšší 6, proto ji dosadíme na místo jednotek v KAN.

Naopak ROO by mělo být co nejmenší, proto za R dosadíme 1 a za O dosadíme 2. Dostáváme tak číselný výraz $986 - 122 + 78 = 942$, správnou odpovědí je D).

4. Závěr

Definovali jsme ryze klokaní úlohy, které mají potenciál svou přítomností motivu klokana soutěžící zaujmout, což je jedna z podmínek „klokanských úloh“. Po příslušném statistickém šetření jsme dospěli k poznání, že ryze klokaních úloh se procentuálně dosud nejvíce vyskytlo v kategorii Cvrček a že (v rámci celé soutěže Matematický klokan) se nejvíce vyskytují mezi úlohami tříbodovými. Předložili jsme několik řešených ryze klokaních úloh, přičemž jsme se zaměřili na nejmladší kategorie.

Nabízí se otázka, kolik ryze klokaních úloh by se mohlo v zadání soutěže jednotlivých kategorií objevit, aby se zvýšila jeho atraktivita. Podle názoru autora by se v zadání mohly objevit jedna či dvě takové úlohy, což odpovídá dosavadnímu stavu.

Literatura

Calábek, P., Švrček, J., Zdráhal, T., & Molnár, J. (2001). *Počítejte s klokanem – kategorie „Student“, sbírka úloh s řešením pro 3. a 4. ročník SŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 1995–1999*. Prodos.

Calábek, P., & Švrček, J. (2007). *Počítejte s klokanem – kategorie „Student“, sbírka úloh s řešením pro 3. a 4. ročník SŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 2000–2004*. Prodos.

Emanovský, P., Hodaňová, J., Horenský, R., & Molnár, J. (2001). *Počítejte s klokanem – kategorie „Kadet“, sbírka úloh s řešením pro 8. a 9. ročník ZŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 1995–1999*. Prodos.

Hodaňová, J., Vaněk, V., & Horenský, R. (2007). *Počítejte s klokanem – kategorie „Kadet“, sbírka úloh s řešením pro 8. a 9. ročník ZŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 2000–2004*. Prodos.

Horenský, R., Rys, P., Zhouf, J., & Molnár, J. (2001). *Počítejte s klokanem – kategorie „Junior“, sbírka úloh s řešením pro 1. a 2. ročník SŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 1995–1999*. Prodos.

Horenský, R., Rys, P., Zhouf, J., & Molnár, J. (2007). *Počítejte s klokanem – kategorie „Junior“, sbírka úloh s řešením pro 1. a 2. ročník SŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 2000–2004*. Prodos.

Matematický klokan. (2025). Oficiální web soutěže Matematický klokan ČR. https://matematickyklokan.upol.cz

Molnár, J. (2019). Matematický klokan není jen nějaká obyčejná soutěž. *Řízení školy (Odborný měsíčník pro ředitele škol)*, 4(2019). https://www.rizeniskoly.cz/casopisy/matematicky-klokan

Novák, B., Molnár, J., Stopenová, A., & Uhlířová, M. (2000). *Počítejte s klokanem – kategorie „Klokánek“, sbírka úloh s řešením pro 4. a 5. ročník ZŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 1995–1999*. Prodos.

Novák, B., Molnár, J., Kubátová, E., & Navrátilová, D. (2005). *Deset let s Matematickým klokanem*. Univerzita Palackého v Olomouci.

Novák, B. & Kubátová, E. (2007). *Počítejte s klokanem – kategorie „Klokánek“, sbírka úloh s řešením pro 4. a 5. ročník ZŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 2000–2004*. Prodos.

Růžičková, B., Kopecký, M., & Molnár, J. (2000). *Počítejte s klokanem – kategorie „Benjamín“, sbírka úloh s řešením pro 6. a 7. ročník ZŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 1995–1999*. Prodos.

Vaněk, V., Calábek, P., & Nocar, D. (2018). České stopy v Matematickém klokanovi. *Matematika–Fyzika–Informatika*, *27*(5), 334–346. https://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/425

Uhlířová, M. (2007). *Počítejte s klokanem – kategorie „Benjamín“, sbírka úloh s řešením pro 6. a 7. ročník ZŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 2000–2004*. Prodos.

INVESTIGATING RELEVANT CONTEXTS FOR THE RME APPROACH IN PRIMARY SCHOOL TEACHER TRAINING: THE CASE OF SPORT ACTIVITIES FOR LEARNING MATHEMATICS

Jakub LIPTÁK
University of Presov, Faculty of Education (Slovakia)
jakub.liptak@unipo.sk

Abstract

Learning mathematics should lead toward the enhancement of the mathematical literacy of students, which refers to the use of mathematics in real-life situations. As a means, contextual problems in mathematics education incorporate various contexts to demonstrate how mathematics relates to real life. Those problems are presented in textbooks or designed by teachers, who should be proficient in posing proper contextual problems. To do so, they should undergo training on teaching mathematics within the real-life context. The paper investigates the relevance of real-life contexts in the views of 58 prospective primary school teachers. The results indicate that the teacher trainees have a high preference for contexts like finance, nature and low preference for contexts like arts and construction, suggesting that the participants tend to prefer more general and familiar contexts than those that require specialized knowledge. Based on the results, the study proposes learning activities grounded in specific situations; thus, following the Realistic Mathematics Education (RME) approach. The designed learning activities, as a part of a training course developmental process, serve as the foundation for further research.

Keywords: teacher training, RME, interdisciplinary education, sport activities, contextual problems

1. Introduction

The purpose of mathematics education is to equip students with the ability to solve quantitative problems, teach them to identify various patterns, and stimulate their thinking skills. To give students a purpose for learning mathematics, it should be connected to a familiar context so that they can see the usefulness of mathematics in the world. The primary method for achieving this goal involves solving word problems. These problems refer to existing or imaginable contexts, are associated with the school setting, take the form of a combination of written or spoken text, and may be coupled with other forms of information, such as pictures, tables, graphs, etc. (Verschaffel et al., 2000). Besides word problems, contextualization of mathematics can be achieved by applying dramatization in education through role-playing or by working on projects. The educational approaches that highlight the importance of interconnecting the content to be learned with students' real-life experiences share a common philosophy rooted in situated learning. The situated learning frames learning as participation in socially organised practices rather than the mere acquisition of decontextualised knowledge (Lave & Wenger, 1991). In this view, context is not an “add-on” but constitutive of what is learned, because concepts and strategies develop through participation in communities of practice. Steaming from the same philosophy, two frameworks emerged, namely contextual teaching and learning (CTL) and realistic mathematics education (RME).

Contextual teaching and learning is an educational approach based on activities related to contexts pupils may have experience with or that are relevant to students. Similarly, the Realistic Mathematics Education emphasises learning mathematics as a human activity, using contexts which pupils can imagine (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1999). The RME approach has been adapted in many countries, but slightly differing in details (Revina & Leung, 2019), while still declaring six distinguishable principles for teaching mathematics (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014), namely the activity principle, the reality principle, the level principle, the intertwinement principle, the interactivity principle, and the guidance principle.

The RME approach makes learners more likely to become active participants in the learning process (Đokić, 2019) and understand mathematics compared to a conventional approach (Öksüz et al., 2022; Remiswal & Dorisno, 2021) and prepares them to tackle real-world problems (Koerunnisa et al., 2025). Moreover, connecting mathematics with a real-life context may help students to gain knowledge about that context (Jannah et al., 2021).

Over the years, a myriad of research on the RME approach has been carried out. The findings indicate a positive influence of the RME on primary school students, particularly in:

- Developing problem-solving skills in students (Nurjamaludin et al., 2021; Sutarni & Aryuana, 2023; Tumangger et al., 2024; Widana, 2021),
- Enhancing the learning outcomes of students in mathematics (Alim et al., 2024; Irdawati et al., 2019; Isnaintri et al., 2024; Simamora et al., 2024)
- Enhancing mathematical abilities (Juandi et al., 2022; Tamur et al., 2020), particularly by enhancing higher-order thinking skills (Ariati & Juandi, 2022), critical thinking skills (Cahyaningsih & Nahdi, 2021; D. Jannah et al., 2024; Koerunnisa et al., 2025), mathematical reasoning ability (Ariati et al., 2023), and communication abilities in mathematics (Putri et al., 2022),
- Developing mathematical literacy (Fauzan et al., 2024; Taqiya & Juandi, 2023),
- Increasing confidence of students in learning mathematics (Abdurohim et al., 2025; Karaca & Özkaya, 2017).

The research mentions applying the RME approach across the primary mathematics curriculum (Kurnaedi et al., 2024; Prahmana et al., 2020). Namely, the application of the RME approach was specified in teaching fractions (Halimah & Kurniawati, 2022; Sembiring et al., 2008; Solomon et al., 2021), multiplication and division (Duyen & Loc, 2022; Setiadi, 2020; Trisnani & Sari, 2021), common divisor and multiple (Fachrurazi, 2017), ratio and proportion (Risdiyanti et al., 2024), addition and subtraction (Fauzi et al., 2021; Lubis, 2023; Zaranis, 2016), basic statistics (Hakim & Setyaningrum, 2024), and geometry (Trimurtini et al., 2020).

The RME is an approach that can be applied in primary mathematics using various means, such as board games with contextual problems (Fauzi et al., 2021; Laurens et al., 2017), traditional physical games (Peni, 2017), e-comics (Yulaichah et al., 2024), digital stories (Çopur & Tümkaya, 2024; Risdiyanti & Prahmana, 2021), ICT (Zaranis, 2016), textbooks (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021) and other emerging methods, such as audiobooks (Sari et al., 2023).

Regarding the context used in the RME when applied in primary mathematics, some studies are available. In arithmetic, mathematics is often delivered integrating buying-selling and banking activities (Rahayu et al., 2021). Besides, numeracy may be developed by integration of activities with an agricultural context (Cahyadewi et al., 2025). Another frequent context in teaching primary mathematics is culinary activities (Umasugi et al., 2022) that provide various opportunities for integrating arithmetic, geometry, and data handling.

Generally, any context imaginable for students can be used when applying the RME approach. However, the context may limit the mathematical topics to be learned and affect the

motivation level among different learners. This study aims to investigate the proper contexts applicable to the RME approach in training prospective primary school teachers as a base for designing a training course in teaching mathematics via the RME approach.

2. Methods

The purpose of this study is to investigate prospective primary school teachers' preferences for contexts that facilitate mathematics learning through the RME approach. Based on the results, learning activities based on a relevant context will be proposed. These can be viewed as a form of hypothetical learning trajectories, as they will consist of learning objectives and hypothesised learning processes expected from students (Simon, 1995). The initiative is part of a process to develop a training course for prospective primary school teachers, aiming to enhance their knowledge of applying the RME approach in primary mathematics education (see Chart *1*).

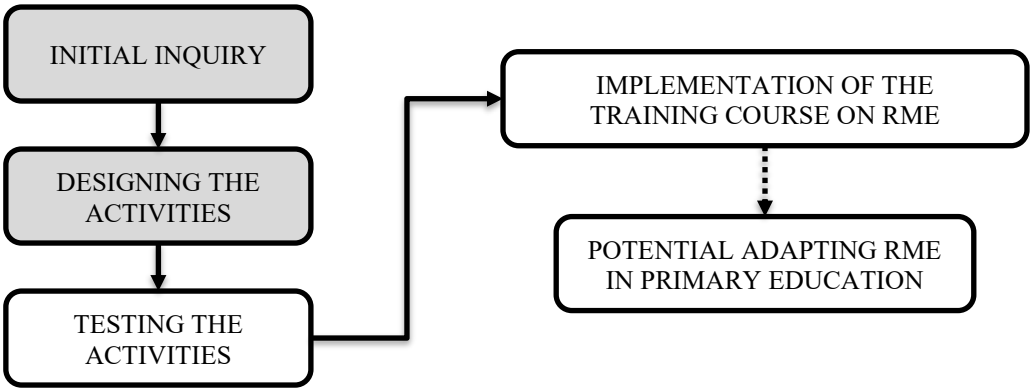


Chart 1. The course developmental process

The study covers the initial investigation, selection of the learning content, and development of activities. Two main research questions were formed beforehand:

- What real-based contexts are the most relevant for teacher trainees in terms of mathematics education?
- What kind of learning environment associated with a relevant context may be developed to support the learning of mathematics of teacher trainees, while simultaneously arming them with methods applicable in their future educational careers?

To investigate the context relevant to teacher trainees, a simple questionnaire with 10 items associated with different contexts was designed and shared among 58 prospective primary school teachers. The participation in the study was voluntary, and participants were informed about the purpose of the data collection. All participants whose data have been collected and analysed expressed their consent to process their answers for scientific purposes. The questionnaire was administered online via Google Forms. Participants were allowed to select any number of items offered. Moreover, they were given the option to list other contexts not included in the questionnaire provided.

The data collected by the form were exported and analysed in MS Excel software, using tools of simple descriptive statistics. Initially, the data was manually checked for any outliers. That resulted in the exclusion of three answers from further analysis because they included all options provided; thus, they did not show a particular preference among the options at all. The remaining 55 answers were coded, and a frequency table was created to serve as a basis for statistical analysis.

3. Results

The results show that participants express distinct preferences towards different contexts, which ought to be incorporated in teaching and learning mathematics (see Chart *2*).

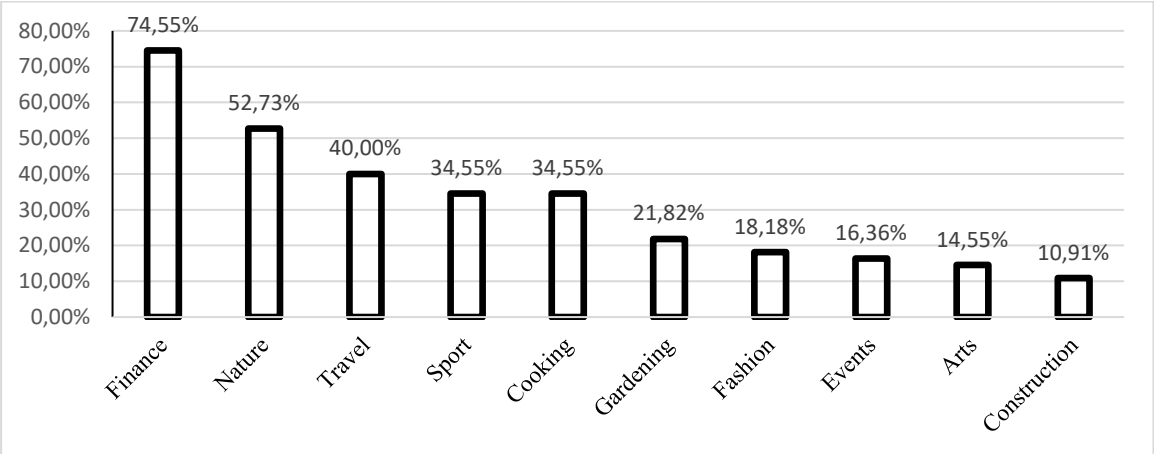


Chart 2. Context preference among prospective teachers in mathematics education

The overwhelming preference for Finance (74.55%) suggests that prospective teachers recognize financial literacy as both a key life skill and an accessible source of mathematical tasks. Everyday situations such as managing pocket money, shopping, or budgeting offer straightforward problem contexts for children, which may explain the high score. Also, these contexts are familiar to children and can be easily translated into classroom problem situations. The second most frequently selected context, Nature (52.73%), offers multiple natural contexts (e.g., animals, plants, landscape, weather) that may be associated with mathematical problem-solving activities in schools. Such context is likely familiar to pupils through their out-of-school experiences. The context of nature could also be linked to sustainability trends, increased environmental awareness, and the integration of science and mathematics in outdoor learning activities. Travel (40%) was selected by over two-fifths of respondents. This may be due to inherent mathematical affordances, such as measuring distances, planning routes, or working with time and cost (also related to the Finance context). In addition, travel-related contexts are often engaging for pupils, who may enjoy the imaginative aspect of "journeys" in problem tasks. The moderate representation of Sport and Cooking (both 34.55%) suggests that prospective teachers acknowledge the motivational power of these contexts, as both are concrete, experiential, and linked to measurement, counting, and proportional reasoning. Sport offers opportunities for elementary data handling and performance comparison, while cooking naturally involves fractions, proportions, and measurement. Gardening (21.82%) was less frequently chosen, which may reflect differences in personal experience. While gardening provides rich mathematical opportunities (growth rates, geometry of planting, measurement), it may not be perceived as universally relevant for teachers and pupils living in modern urban settings. On the other hand, gardening and farming are gaining popularity due to the search for organically grown products. Similarly, Fashion (18.18%), Events (16.36%), and Arts (14.55%) were ranked low. These areas might be undervalued because they are primarily associated with creativity and social activities rather than mathematics. However, each offers untapped potential: symmetry and patterns in fashion and arts, or scheduling and resource allocation in events. Finally, Construction was the least frequently chosen context (10.91%). This result could be attributed to limited familiarity or confidence with technical and spatial mathematics among participants. While construction contexts are rich in geometry and measurement,

prospective teachers may feel less prepared to integrate such content into primary-level mathematics teaching.

In summary, the results show a clear preference for contexts that are perceived as highly practical (finance, travel) or directly observable in everyday life (nature, sport, cooking). Contexts requiring more specialized knowledge or less present in daily routines (construction, arts, fashion) were given limited preference. The results indicated that not all contexts are equally favourable. Applying the Pareto principle (the 80:20 rule), based on the participants' answers, the vital contexts for learning mathematics using the RME approach are finance, nature, travel, sport, and cooking (see Chart *3*).

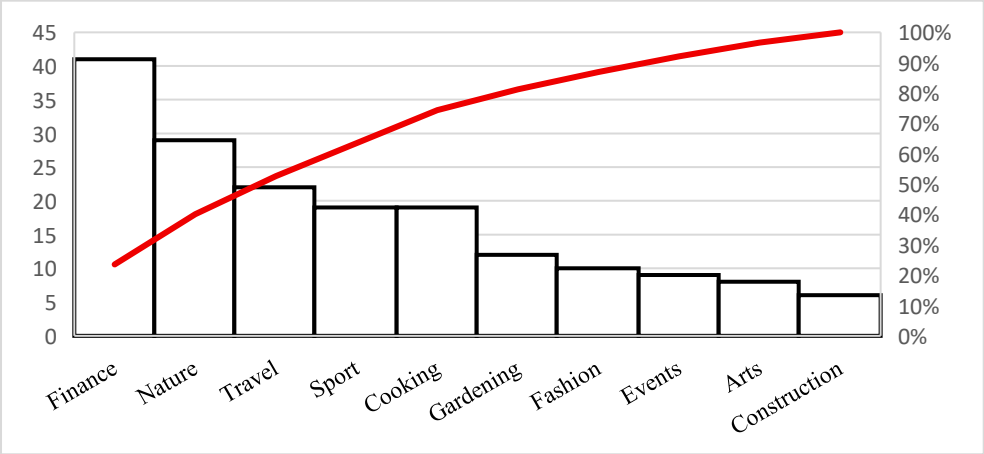


Chart 3. The Pareto chart of the obtained results

Based on the results, the study proposes learning activities using the concept of sport, one of the vital ones. For the general popularity, suitability for a wide range of population, and technical availability, the following activities have been proposed, combining mathematics and realistic situations occurring in table tennis.

3.1. Activities design

Professional training for prospective primary school teachers differs worldwide. The general requirements, however, ask for earning contextual and pedagogical knowledge, whereas the contextual knowledge should be greater than that of the primary school students. The teachers should be mathematically literate, thus operate with whole numbers, decimals, fractions, percentages, and be able to solve problems involving these and elementary equations, measurement and geometry, combinatorics, probability, and statistics. Based on this premise, the following activities have been designed.

Learning activity 1: Players engage in a rally, bouncing a ball on the table from one side to the other. They aim to keep the ball on the table as long as possible, counting the number of times the ball passes over the net in the middle of the table. Players individually count the number of successful strokes aloud or by inner voice. If they are tasked with recording the total number of strokes, the estimate can be obtained by multiplying the number of their own successful strokes by 2. The activity can also be a basis for further data recording and handling, involving probability and statistics.
Learning objectives: Count numbers starting from 1. Multiply the whole number by 2.

Learning activity 2: In a match based on the official rules, players are supposed to switch serving every two serves. Sometimes players may lose track of who is supposed to serve next.

This can be determined by the divisibility of the sum of the score in the game by 4. If the sum of the scores is divisible by 4 or yields a remainder of 1, the next serving player is the one who started serving in the game. Players sum up the score and must determine the remainder after dividing the sum by 4. Doing so should enhance their arithmetic knowledge and demonstrate a direct use of mathematics in solving a real-life situation. Further, potential methods can be discussed with students if players switch in serving after three, four, or more serves.
Learning objectives: Add two whole numbers. Divide whole numbers by 4.

Learning activity 3: Players in the group stage of the tournament play against each other. The progress of players into the K.O. stage is determined by the number of wins and the rate of winning and losing games in the matches played. Considering the second situation, it must be compared to determine which rate yields the greater coefficient. To compare the ratio of won and lost games, they may be instructed to look for the simplest form, find a common denominator (possibly the least common multiple), and convert them to equivalent fractions. Further, the scores of players can be compared considering the games, sets, and points, which provide much material for mathematical activities.
Learning objectives: Construct a ratio to compare quantities. Compare ratios (fractions) using various methods.

Learning activity 4: Players engaged in long-term contests are rated based on the percentage of games won. Similarly, the players can be assessed after each match by the percentage of rallies won. This suggests recording the scores of their games and matches, which can also be utilised in various data handling activities.
Learning objectives: Convert between fractions, decimals, and percentages. Visualise and interpret data that uses percentages.

Learning activity 5: The players are divided into multiple groups based on their success rate. After they play each other in the groups, the percentage of matches won is calculated. To create a ranking of all players based on the results, each group is allocated a particular coefficient that is further used to produce the final combined ranking. Players compute it using linear functions to determine how good a player must be in a lower league to match the ranking of a player from a higher league. During the learning process, they learn how to visualise functions and interpret line charts.
Learning objectives: Find the value of y in a simple linear function when x is known. Draw a function line. Find the critical values (intercepts of graphs) comparing two or more functions.

Learning activity 6: After each player has played enough matches for their ranking to be determined, they can calculate the probability of winning against any player by applying the Bradley-Terry model or the Elo rating. During a tournament, some students pretend to be analysts. Their role is, among other possible things, to determine the probability of winning for players. In their calculations, they use the ratings of players when inserting them into formulas.
Learning objectives: Calculate formulas using two variables. Determine probability. Understand the function concept.

Learning activity 7: Players attempt to complete a specific task, e.g. hit the target positioned on the table. They have a certain number of attempts. Each player may have a different number of attempts. Expressing who was more precise in shooting cannot be obtained from absolute numbers, but they must come with another option – the ratio. To compare the success of players, they need to express their successful attempts using ratios and percentages. Further, data can be visualised and probability can be determined.

Learning objectives: Construct a ratio to compare quantities. Compare ratios (fractions) using various methods. Graphically visualise data involving percentages.

Learning activity 8: Players are asked to hit the target on the table from different distances. At each distance, they are given the same number of attempts, and their successful shots are recorded. Next, the discussion on proportionality between the distance and the successful shots can be held. Namely, questions like "how many shots would you score if you were twice the current distance from the target?" can be addressed to students. This would lead to creating functions, making predictions, evaluating these predictions and so on.
Learning objectives: Graphing functions. Identifying trends. Making predictions and evaluating predictions.

4. Conclusion

Research findings over the years demonstrate the effectiveness of the RME approach in enabling meaningful mathematics learning, as the literature review in this paper presents. The approach proposes that students' understanding should originate from contexts that are relevant to them. The present study examined the preferences of prospective primary school teachers for relevant contexts in the RME approach (research question 1). The vital contexts were revealed, namely finance, nature, travel, sports, and cooking. Therefore, these contexts may be proper for training prospective teachers to apply the RME in teaching mathematics. The training may consist of two parts: experiencing curriculum materials and developing curriculum materials, as teachers praise using the RME approach when they participate in developing curriculum materials (Sembiring et al., 2008). To familiarise trainees with the RME approach, several activities stemming from situations occurring in sports, particularly table tennis, were proposed, which will be further tested for feasibility in a teacher training course on the RME (research question 2). The proposed learning activities are hands-on or directly linked to physical activities that students would participate in. Designing them also fills a gap, as there is a lack of research documenting the use of sports activities for learning mathematics. The learning activities tend to be authentic; therefore, they may enhance the motivation and interest of students in learning mathematics. It is also believed that the potentially successful application of the learning activities among prospective teachers would teach them a strategy for using the RME approach and foster their appreciation and understanding of mathematics.

Acknowledgements

Funded by the EU NextGenerationEU through the Recovery and Resilience Plan for Slovakia under the project No. 09I03-03-V05-00006.

References

Abdurohim, R., Wahyudin, D., & Susanti, L. (2025). Research trends on RME and self-confidence in the Mathematics education curriculum. *Inovasi Kurikulum*, *22*(1), 465–492. https://doi.org/10.17509/jik.v22i1.79455

Alim, J. A., Asih, S. R., & Putra, Z. H. (2024). The effectiveness of realistic mathematics education to enhance elementary students' learning outcomes and motivation. *Primary: Jurnal Pendidikan Guru Sekolah Dasar*, *13*(6), 242–251. https://doi.org/10.33578/jpfkip-v13i6.p242-251

Ariati, C., & Juandi, D. (2022). REALISTIC MATHEMATIC EDUCATION ON HIGHER-ORDER THINKING SKILL MATHEMATICS OF STUDENTS. *Kalamatika: Jurnal Pendidikan Matematika*, *7*(2), 219–236. https://doi.org/10.22236/KALAMATIKA.vol7no2.2022pp219-236

Ariati, C., Juandi, D., Hasanah, A., & Suparman, S. (2023). The Effect of Realistic Mathematics Education in Enhancing Indonesian Students' Mathematical Reasoning Ability: A Meta-Analysis. *JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika)*, *7*(2), 324–338. https://doi.org/10.31764/jtam.v7i2.12493

Cahyadewi, K. C., Pambudi, D. S., Lestari, N. D. S., Kurniati, D., & Kristiana, A. I. (2025). Development of Realistic Mathematics Education (RME) Integrating Agricultural Activities to Improve Numeracy Skills. *Jurnal Kependidikan: Jurnal Hasil Penelitian Dan Kajian Kepustakaan Di Bidang Pendidikan, Pengajaran Dan Pembelajaran*, *11*(1), 39–50. https://doi.org/10.33394/jk.v11i1.14060

Cahyaningsih, U., & Nahdi, D. S. (2021). The Effect of Realistic Mathematics Education on Elementary Students' Critical Thinking Skills. *Journal of Physics: Conference Series*, *1764*(1), 012127. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1764/1/012127

Çopur, E., & Tümkaya, S. (2024). The effect of digital stories prepared according to realistic mathematics education on students' mathematical achievements, anxiety and attitudes. *International Journal of Educational Spectrum*, *6*(1), 120–146. https://doi.org/10.47806/ijesacademic.1417162

Đokić, O. J. (2019). Attitudes of the fourth-grade primary school pupils on learning at geometry classes. *Inovacije u Nastavi - Časopis Za Savremenu Nastavu*, *32*(1), 30–52. https://doi.org/10.5937/inovacije1901030D

Duyen, N. T. H., & Loc, N. P. (2022). Developing Primary Students' Understanding of Mathematics through Mathematization: A Case of Teaching the Multiplication of Two Natural Numbers. *European Journal of Educational Research*, *11*(1), 1–16. https://doi.org/10.12973/eu-jer.11.1.1

Fachrurazi, F. (2017). PEMBELAJARAN MATEMATIKA REALISTIK DI SEKOLAH DASAR PADA MATERI FPB DAN KPK DENGAN MODEL PENYAJIAN PAKET MAKANAN. *Al Khawarizmi: Jurnal Pendidikan Dan Pembelajaran Matematika*, *1*(2), 113–122. https://doi.org/10.22373/jppm.v1i2.3425

Fauzan, A., Harisman, Y., Yerizon, Y., Suherman, S., Tasman, F., Nisa, S., Sumarwati, S., Hafizatunnisa, H., & Syaputra, H. (2024). Realistic mathematics education (RME) to improve literacy and numeracy skills of elementary school students based on teachers' experience. *Infinity Journal*, *13*(2), 301–316. https://doi.org/10.22460/infinity.v13i2.p301-316

Fauzi, I., Mauhibah, R., & Jupri, A. (2021). Learning Designs for the Addition and Subtraction of Two-Digit Numbers based on Realistic Mathematics Education Principles Using Snakes and Ladders Game. *Al Ibtida: Jurnal Pendidikan Guru MI*, *8*(1), 32–49. https://doi.org/10.24235/al.ibtida.snj.v8i1.7741

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Kluwer Academic Publishers, 101 Philip Drive, Norwell, MA 02061.

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155–177. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4

Hakim, T. A., & Setyaningrum, W. (2024). Realistic mathematics education combined with guided discovery for improving middle school students' statistical literacy. *Journal of Honai Math*, *7*(2), 233–246. https://doi.org/10.30862/jhm.v7i2.564

Halimah, S., & Kurniawati, L. (2022). DEVELOPMENT OF MATHEMATICS TEACHING MATERIAL BASED ON REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION IN ELEMENTARY SCHOOL. *JIP Jurnal Ilmiah PGMI*, *8*(1), 34–42. https://doi.org/10.19109/jip.v8i1.8109

Irdawati, A., Marlina, R., Marlina, & Murni, I. (2019). Realistic Mathematics Education (RME) Approach to Enhance Mathematical Cognition of Elementary School Students. *Journal of Physics: Conference Series*, *1387*(1), 012140. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1387/1/012140

Isnaintri, E., Syamsuri, S., Nindiasari, H., & Yuhana, Y. (2024). The Effect of Realistic Mathematics Education (RME) Approach on Students' Mathematical Ability: A Meta-analysis Study. *Unnes Journal of Mathematics Education*, *13*(1), 66–80. https://doi.org/10.15294/p8ra2p86

Jannah, D., Tobroni, T., & Dewi, R. A. K. (2024). Improving Students' Critical Thinking Skills in Mathematics with The CTL Approach. *Journal of Mathematics Instruction, Social Research and Opinion*, *3*(3). https://doi.org/10.58421/misro.v3i3.233

Jannah, U. R., Subaidi, A., & Towafi, T. (2021). ISLAMIC VALUES IN MATHEMATICS LEARNING THROUGH THE REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION (RME) MODEL. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *10*(3), 1507–1517. https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i3.3679

Juandi, D., Kusumah, Y. S., & Tamur, M. (2022). A Meta-Analysis of the Last Two Decades of Realistic Mathematics Education Approaches. *International Journal of Instruction*, *15*(1), 381–400.

Karaca, S. Y., & Özkaya, A. (2017). The Effects of Realistic Mathematics Education on Students' Math Self Reports in Fifth Grades Mathematics Course. *International Journal of Curriculum and Instruction*, *9*(1), 81–103.

Koerunnisa, K., Rianto, R., Novita, S. D., Nurasih, Z., Abdullah, A., Aliah, A., Fallo, H., & Rasilah, R. (2025). The Influence of a Realistic Mathematical Approach on Student Learning in Elementary Schools. *Journal of Mathematics Instruction, Social Research and Opinion*, *4*(1), 105–114. https://doi.org/10.58421/misro.v4i1.282

Kurnaedi, E. P., Murti, R. C., & Afifah, N. (2024). Trend of Realistic Mathematics Education Research on Indonesian Elementary Schools between 2013 and 2022. *Indonesian Journal of Educational Research and Review*, *7*(1), 49–60. https://doi.org/10.23887/ijerr.v7i1.68391

Laurens, T., Batlolona, F. A., Batlolona, J. R., & Leasa, M. (2017). How Does Realistic Mathematics Education (RME) Improve Students' Mathematics Cognitive Achievement? *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(2), 569–578. https://doi.org/10.12973/ejmste/76959

Lave, J., & Wenger, E. (1991, September 27). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge Aspire Website; Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511815355

Lubis, M. S. (2023). Addition and Subtraction of Integers with a Realistic Mathematics Education Approach. *Jurnal Iqra' : Kajian Ilmu Pendidikan*, *8*(2), 495–512. https://doi.org/10.25217/ji.v8i2.3145

Nurjamaludin, M., Gunawan, D., Adireja, R. K., & Alani, N. (2021). Realistic Mathematics Education (RME) approach to increase student's problem solving skill in elementary school. *Journal of Physics: Conference Series*, *1987*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1987/1/012034

Öksüz, C., Eser, M. T., & Genç, G. (2022). The Review of The Effects of Realistic Mathematics Education on Students' Academic Achievement in Turkey: A Meta-Analysis Study. *International Journal of Contemporary Educational Research*, *9*(4), 662–677. https://doi.org/10.33200/ijcer.1053578

Peni, N. R. N. (2017). Influence of Jakri Game on Elementary School Studentsâ€™ Understanding and Interests on Word Problem: Using Realistic Mathematics Education. *Unnes Journal of Mathematics Education*, *6*(2), Article 2. https://doi.org/10.15294/ujme.v6i2.17248

Prahmana, R. C. I., Sagita, L., Hidayat, W., & Utami, N. W. (2020). TWO DECADES OF REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH IN INDONESIA: A SURVEY. *Infinity Journal*, *9*(2), 223–246. https://doi.org/10.22460/infinity.v9i2.p223-246

Putri, N. S., Juandi, D., & Jupri, A. (2022). The implementation effect of realistic mathematics education and contextual teaching and learning approaches on the students' mathematical communication ability: A meta-analysis. *Al-Jabar : Jurnal Pendidikan Matematika*, *13*(2), 383–400. https://doi.org/10.24042/ajpm.v13i2.13562

Rahayu, W., Prahmana, R. C. I., & Istiandaru, A. (2021). The Innovative Learning of Social Arithmetic using Realistic Mathematics Education Approach. *Jurnal Elemen*, *7*(1), 28–55. https://doi.org/10.29408/jel.v7i1.2676

Remiswal, R., & Dorisno, D. (2021). THE INFLUENCE OF CONTEXTUAL TEACHING AND LEARNING APPROACH AND STUDENTS' GENDER ON MATHEMATICS UNDERSTANDING AT GRADE IV SDN ALANG LAWAS, PADANG. *Jurnal PAJAR (Pendidikan Dan Pengajaran)*, *5*(4), 1134–1140. https://doi.org/10.33578/pjr.v5i4.8426

Revina, S., & Leung, F. K. S. (2019). How the Same Flowers Grow in Different Soils? The Implementation of Realistic Mathematics Education in Utrecht and Jakarta Classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(3), 565–589. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9883-1

Risdiyanti, I., & Prahmana, R. C. I. (2021). DESIGNING LEARNING TRAJECTORY OF SET THROUGH THE INDONESIAN SHADOW PUPPETS AND MAHABHARATA STORIES. *Infinity Journal*, *10*(2), 331–348. https://doi.org/10.22460/infinity.v10i2.p331-348

Risdiyanti, I., Zulkardi, Putri, R. I. I., Prahmana, R. C. I., & Nusantara, D. S. (2024). Ratio and proportion through realistic mathematics education and pendidikan matematika realistik Indonesia approach: A systematic literature review. *Jurnal Elemen*, *10*(1), 158–180. https://doi.org/10.29408/jel.v10i1.24445

Sari, A. D. I., Herman, T., Sopandi, W., Jupri, A., & Subayani, N. W. (2023). Analysis of Needs for the Development of Audiobooks Based on Realistic Mathematics Education for Fourth-

Grade Elementary School Students. *Al Ibtida: Jurnal Pendidikan Guru MI*, *10*(1), 91–104. https://doi.org/10.24235/al.ibtida.snj.v10i1.13040

Sembiring, R. K., Hadi, S., & Dolk, M. (2008). Reforming mathematics learning in Indonesian classrooms through RME. *ZDM*, *40*(6), 927–939. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0125-9

Setiadi, N. (2020). The Implementation of Realistic Mathematics Education (RME) to Support Indonesian 5th-Grade Students to Learn Multiplication and Division. *Southeast Asian Mathematics Education Journal*, *10*(1), 41–53. https://doi.org/10.46517/seamej.v10i1.98

Simamora, S., Juliana, Sembiring, H. M. S., Hs, D. W. S., Tanjung, D. S., & Prayuda, M. S. (2024). The Effect of the Realistic Mathematics Education (RME) Learning Model on the Second-Grade Elementary Students' Mathematics Learning Outcomes. *Jurnal PAJAR (Pendidikan Dan Pengajaran)*, *8*(5), 436–445. https://doi.org/10.33578/pjr.v8i5.9977

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114–145. https://doi.org/10.2307/749205

Solomon, Y., Hough, S., & Gough, S. (2021). The role of appropriation in guided reinvention: Establishing and preserving devolved authority with low-attaining students. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(2), 171–188. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09998-5

Sutarni, S., & Aryuana, A. (2023). Realistic Mathematics Education (RME): Implementation of Learning Models for Improving HOTS-Oriented Mathematics Problem-Solving Ability. *AL-ISHLAH: Jurnal Pendidikan*, *15*(2), 1213–1223. https://doi.org/10.35445/alishlah.v15i2.2127

Tamur, M., Juandi, D., & Adem, A. M. G. (2020). Realistic Mathematics Education in Indonesia and Recommendations for Future Implementation: A Meta-Analysis Study. *JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika)*, *4*(1), 17–27. https://doi.org/10.31764/jtam.v4i1.1786

Taqiya, F. A., & Juandi, D. (2023). Students' Mathematical Literacy with Realistic Mathematics Education (RME) Approach: Systematic Literature Review. *Mathematics Education Journal*, *7*(1), 60–72. https://doi.org/10.22219/mej.v7i1.24103

Trimurtini, T., Safitri, T. R., Sari, E. F., & Nugraheni, N. (2020). The effectivity of contextual teaching and learning (CTL) approach with Geoboard media on mathematics learning for four-grade elementary students. *Journal of Physics: Conference Series*, *1663*(1), 012050. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1663/1/012050

Trisnani, N., & Sari, E. F. (2021). Keefektifan Model Realistic Mathematics Education Berbantuan Media Dakon Terhadap Hasil Belajar Perkalian. *Scholaria: Jurnal Pendidikan Dan Kebudayaan*, *11*(2), 173–178.

Tumangger, W. R., Khalil, I. A., & Prahmana, R. C. I. (2024). The Impact of Realistic Mathematics Education-based Student Worksheet for Improving Students' Mathematical Problem-Solving Skills. *IndoMath: Indonesia Mathematics Education*, *7*(2), 196–215. https://doi.org/10.30738/indomath.v7i2.122

Umasugi, S. M., Sugiman, S., Jana, P., & Kraiviset, P. (2022). Realistic Mathematics Education (RME)-Based Learning Trajectory for Arithmetic Social Using Culinary Context of Yogyakarta. *Jurnal Kependidikan: Jurnal Hasil Penelitian Dan Kajian Kepustakaan Di*

Bidang Pendidikan, Pengajaran Dan Pembelajaran, *8*(4), 985–996. https://doi.org/10.33394/jk.v8i4.6176

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521–525). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_170

Van Zanten, M., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2021). Mathematics Curriculum Reform and Its Implementation in Textbooks: Early Addition and Subtraction in Realistic Mathematics Education. *Mathematics*, *9*(7), 752. https://doi.org/10.3390/math9070752

Verschaffel, L., Greer, B., & Corte, E. de. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Swets & Zeitlinger B.V.

Widana, I. W. (2021). Realistic Mathematics Education (RME) untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa di Indonesia. *Jurnal Elemen*, *7*(2), 450–462. https://doi.org/10.29408/jel.v7i2.3744

Yulaichah, S., Mariana, N., & Wiryanto, W. (2024). The Use of E-Comics Based on A Realistic Mathematical Approach to Improve Critical and Creative Thinking Skills of Elementary School Students. *IJORER : International Journal of Recent Educational Research*, *5*(1), 90–105. https://doi.org/10.46245/ijorer.v5i1.497

Zaranis, N. (2016). The use of ICT in kindergarten for teaching addition based on realistic mathematics education. *Education and Information Technologies*, *21*(3), 589–606. https://doi.org/10.1007/s10639-014-9342-8

COMPARISON OF PUPILS' SELF-CONCEPTS IN MATHEMATICS IN THE CONTEXT OF THE TRANSITION TO THE LOWER-SECONDARY SCHOOL

Michaela PETŘÍČKOVÁ, Miroslava JANEČKOVÁ
Jan Evangelista Purkyně University in Ústí and Labem, Faculty of Education (Czech Republic)
michalkapetrickova@seznam.cz, miroslava.janeckova@ujep.cz

Abstract

Academic self-concept shapes pupils' attitude toward individual subjects and overall academic performance. The study analyses the relationship between self-concept in mathematics and other domains of academic performance. Data were collected using the standardized SPAS questionnaire (*Student's Perception of Ability Scale*, Matějček, Vágnerová, 1992) and administered to Grade 5 and Grade 6 pupils. In Grade 5, self-concept in mathematics is significantly associated with higher self-confidence. In Grade 6, this link weakens and there is a gradual decline in self-concept across all examined domains. The transition from primary to lower-secondary education thus may lead not only to reduced confidence in mathematics but to lower academic performance and a diminished overall academic self-concept.

Keywords: Academic self-concept, Self-concept in mathematics, SPAS questionnaire, Transition to lower secondary school, Academic achievement, School performance

1. Introduction

Self-concept and academic achievement are two closely interrelated constructs that have gained an increasing attention in Czech education policy in recent years. The emphasis on supporting pupils' individual development and emotional well-being is evident both in the government's lead educational strategy document Strategy 2030+ (MŠMT, 2020) and in the curriculum-reform materials that articulate the future shape of the national curriculum and highlight factors influencing children's long-term relationship to learning (MŠMT, 2022). Recent surveys (MŠMT, 2020; OECD, 2019) further indicate a decline in pupils' willingness to attend school, a trend closely linked to self-concept, which in turn affects performance and academic success (Havlínová, Chmátalová, Slunečko, 2023). Self-concept is also tightly connected to pupils' motivation: a positive self-concept supports persistence, the approach to problem solving, and analytical thinking, which are the key aspects underpinning, among other things, the development of critical thinking (MŠMT, 2020).

Self-concept in mathematics, as one segment of the complex construct of academic self-concept, has increasingly drawn researchers' attention (e.g., Pajares, 2005; Usher, Pajares, 2009; Burnham, 2011; Smetáčková, 2016). In this area, a gradual decline has been observed alongside worsening overall academic outcomes (Eccles, Wigfield, 2000). Moreover, the Ústí nad Labem Region, where our study was conducted, is characterized by high rates of underachievement, grade repetition, and pronounced absenteeism (PAQ, 2023). All these factors are linked not only to academic self-concept but also to academic results and self-concept specifically in mathematics. A decline in self-concept in mathematics may also contribute to reduced pupils interested in STEM subjects (Rokos, Koldová, 2024), a concern echoed by other authors who indicate declining student interest in these fields (Trna, Trnová,

2015; Hašková, Bílek, Cakmakci, 2024; Skřivanová, 2025). Mathematics is a particularly salient component of STEM and underpins one of the two key literacies; logical–mathematical literacy is now assessed through expected learning outcomes in Grades 3, 5, and 9 (MŠMT, 2025).

2. Self-Concept of Academic Achievement in Mathematics

The construct of self-concept is a major research topic and is key to understanding the internal processes that shape human behaviour, action, and decision-making in specific situations. It is regarded as a foundation of the self (Smékal, 2009), has a dynamic nature through which it is continuously formed (Helus, 2018), and can be viewed as a summary of one's knowledge and beliefs about oneself (Výrost, Slaměník, 2008). Some authors treat self-concept as equivalent to self-reflection (Hartl, Hartlová, 2000) or as a term closely related to self-knowledge and self-evaluation (Macek, Šulcová, Konečná, 2009; Konečná, 2010; Průcha, Walterová, Mareš, 2013). Despite the diversity of these approaches, a common core emerges: a hypothetical construct describing self-concept as the content of consciousness primarily related to one's representation of the self (Průcha, Walterová, Mareš, 2013; Svoboda, Smolík, Tirpák, Uhrinová, 2020).

Mathematical self-concept is closely linked to self-evaluation, grounded not only in comparisons with individuals we admire and regard as embodying our aspirations (Haysová, 2009; Helus, 2018), but also in contrasts between our actual performance and an ideal performance (Smetáčková, 2016). It can be understood as an individual's belief in their capacities to solve specific mathematical problems and to do so successfully (Pajares, 2005; Smetáčková, 2016). Mathematical self-concept develops and forms mainly through four sources: repeated experiences of success; vicarious experiences of others' success, especially by close or similar others; persuasive feedback affirming one's capability; and the management of situational factors, notably emotions, stress, and somatic states (Bandura, 1997; Smetáčková, 2016). Key mathematical competencies are correlated with this form of self-concept, within these competencies, the aim is that, over the course of mathematics education, the pupils increase confidence in their abilities, deepen interest in mathematical applications, and develop a positive attitude towards mathematics (MŠMT, 2025). A positive self-concept in mathematics subsequently supports desirable academic outcomes: pupils then tend to approach new tasks with greater confidence and achieve higher success rates (Wigfield, Karpathian, 1991; Stringer, Heath, 2008; Helus, 2018).

A specific form of self-concept is academic self-concept, defined as the way a pupil perceives and evaluates themself in comparison with peers (Mertin, Krejčová et al., 2016). Self-concept in mathematics is therefore strongly shaped by this academic dimension and is reflected in pupils' overall approach to mathematics. With increasing age, school outcomes become more closely tied to academic self-concept and thus influence overall performance (Vágnerová, 2012). This is also captured by the *Big-Fish–Little-Pond Effect* (BFLPE): exposure to higher-achieving classmates is associated with lower academic self-concept, whereas exposure to lower-achieving classmates is associated with higher academic self-concept (Keller, Kim, Elwert, 2023). Accordingly, pupils surrounded by more successful classmates tend to report lower self-concept - even when their own performance is not poor (Marsh, 1984, as cited in Keller, Kim, Elwert, 2023). On the other hand, subject-specific academic self-concept fosters higher motivation, achievement, and supports pupil's broader personal development in the school environment (Mertin, Krejčová, 2016).

The article presents findings from a study conducted with the SPAS questionnaire (*Student's Perception of Ability Scale*; Matějček & Vágnerová, 1992). The research focuses on changes in academic self-concept in mathematics during the transition to lower secondary

education (Grade 6). The aim is to analyse the relationship between self-concept in mathematics and other domains of school performance—reading, orthography, writing, general abilities, and self-confidence - with the attention to differences by grade, gender, and between students with special educational needs (SEN) and their non-SEN peers. Data were collected from the same group of pupils in Grade 5 in the 2023/2024 school year and again in Grade 6 in 2024/2025.

3. Methodology

The study used the SPAS questionnaire (Matějček & Vágnerová, 1992). Data collection and analysis were conducted in consultation with an experienced child psychologist, who also provided training on scoring, interpretation, and reporting. The instrument assesses six domains - general abilities, mathematics, reading, orthography, writing, and self-confidence - addressing pupils' perceptions of their abilities, their performance in specific subjects, and their position within the peer group. Items in the test are dichotomous (Yes/No).

For the statistical analysis, nonparametric tests were used, specifically the Wilcoxon signed-rank test, the Wilcoxon rank-sum test, and the Kruskal–Wallis test. In addition, a Linear Mixed Model (LMM) was used to reflect that each pupil was assessed twice (in Grade 5 and Grade 6).

The research sample consisted of pupils in Grade 5 in the 2023/2024 school year. We obtained completed questionnaires from 215 children (111 boys, 104 girls). At the second administration one year later (2024/2025), involving the classes with same pupils now in Grade 6, data were obtained for 177 children (92 boys, 85 girls). For analytic purposes, the key group comprised only pupils with data from both administrations, enabling direct comparisons. In total, 145 pupils were present at both tests.

The raw scores were converted using the standardized ten-point STEN scale. STEN values were then derived from conversion tables that differ for boys and girls determined by age and total raw score. Higher STEN scores on the 1–10 scale indicate a higher level of self-concept in mathematics. Table 1 presents the percentage distribution of pupils together with their gender composition.

Table 1. The research sample

First Administration (2023/2024)		**Second Administration (2024/2025)**	
Boys	111 (52 %)	Boys	92 (52 %)
Girls	104 (48 %)	Girls	85 (48 %)
Total	215	Total	177

4. Results

The results are presented as follows: comparisons of self-concept across all tested domains between grades; differences in pupils' self-concept in mathematics after the transition to lower secondary school; grade-specific results by gender; comparisons between pupils with special educational needs (SEN) and those without SEN; and comparison of self-concept in mathematics with the other tested domains.

Figure 1 shows that Grade 5 pupils reported higher mean scores across all domains than the same pupils one year later, after the transition to lower secondary school. While the difference in academic self-concept was statistically significant ($p < .05$), the difference in self-concept in mathematics was not ($p > .05$). Nevertheless, there was a very small age-related decrease of 0.23 STEN points in self-concept in mathematics. Pupils in both grades rated their self-concept in mathematics at approximately the same (upper-average) level on the STEN scale.

Mathematics exhibits the highest mean scores in both grades, indicating a generally positive self-concept of pupils in this domain.

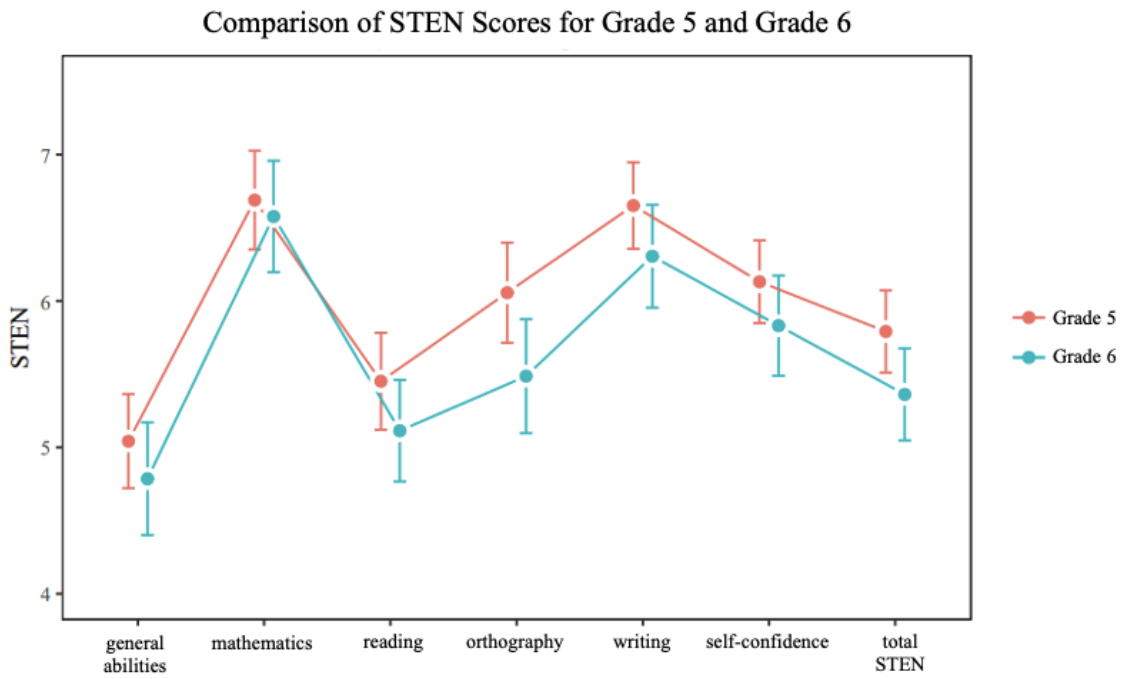


Chart 1. The mean scores in self-concept in all domains for both grades

In addition to Chart 1, Chart 2 depicts differences in pupils' self-concept in mathematics during the transition to lower secondary school. Specifically, it plots Grade 6 values against pupils' own Grade 5 values (i.e., Grade 6 − Grade 5). The chart displays, for each pupil, whether their self-concept in mathematics improved or declined in comparison with their younger self. Among the 145 pupils with matched observations, 36 obtained the same STEN value at both time points. The remaining scores span almost the full scale, indicating substantial heterogeneity: while some pupils showed marked decreases in self-concept in mathematics, others exhibited notable increases.

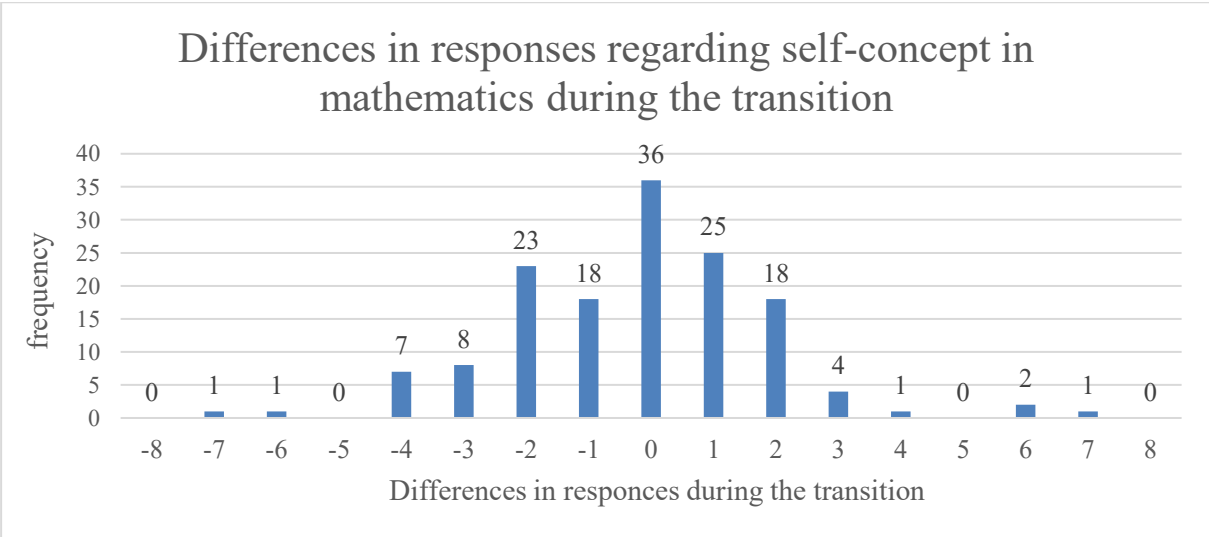


Chart 2. Differences between Grade 6 and Grade 5 responses in mathematics.

The next charts (3 and 4) present mean values by gender in Grades 5 and 6. In both grades, girls report a slightly more negative self-concept in mathematics than boys, and they show a more pronounced decline after the transition to lower secondary school (the mean decreased by 0.42 STEN points). On the contrary, boys exhibit a modest increase after the transition, with their mean rising by 0.14 STEN points. However, for neither group was the grade-to-grade change statistically significant at $\alpha = .05$ (girls: $p = .19352$; boys: $p = .37515$).

The charts also reveal domain-specific differences in which boys and girls excel. Boys achieved the highest STEN scores in mathematics (Grade 5: 7.20; Grade 6: 7.34), whereas girls recorded their highest mean STEN values in writing in both grades. In mathematics, girls' mean STEN values were in the average range (Grade 5: 6.14; Grade 6: 5.72). These differences were examined using the Wilcoxon rank-sum test; in the mathematics domain, a statistically significant difference between boys and girls was observed within each grade ($p < .05$).

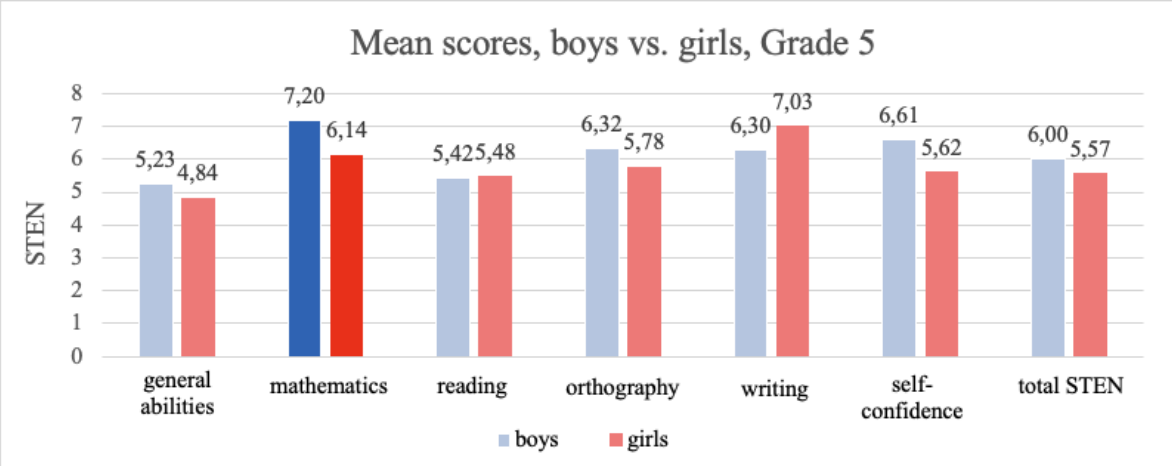


Chart 3. Gender differences in mean scores of self-concept, Grade 5

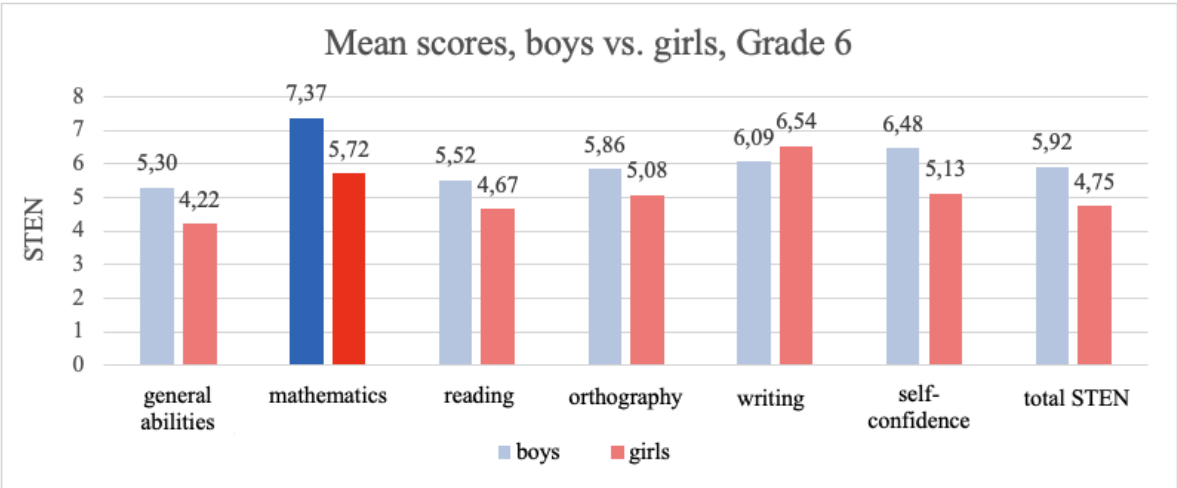


Chart 4. Gender differences in mean scores of self-concept, Grade 6

Comparisons of mean scores for pupils without SEN (non-SEN) and pupils with SEN (SEN) are shown in Charts 5 and 6. Although no statistically significant differences were detected between the groups across the transition to lower secondary school, the data suggest that pupils with SEN reported a more negative self-concept in mathematics than their peers

without SEN. After the transition, the between-group difference in self-concept in mathematics shifted in a more negative direction relative to Grade 5; on average, self-concept in mathematics declined by about 0.20 STEN points. The same pattern held when examining each group separately: both pupils with SEN and those without SEN showed small declines, neither of which was statistically significant.

However, in all SPAS domains - with the sole exception of mathematics in Grade 6 - statistically significant differences ($p < .05$) between pupils with SEN (SEN) and those without SEN (non-SEN) were observed when grades were analysed separately. This pattern is consistent with Chart 5 and 6, which likewise indicate between-group differences.

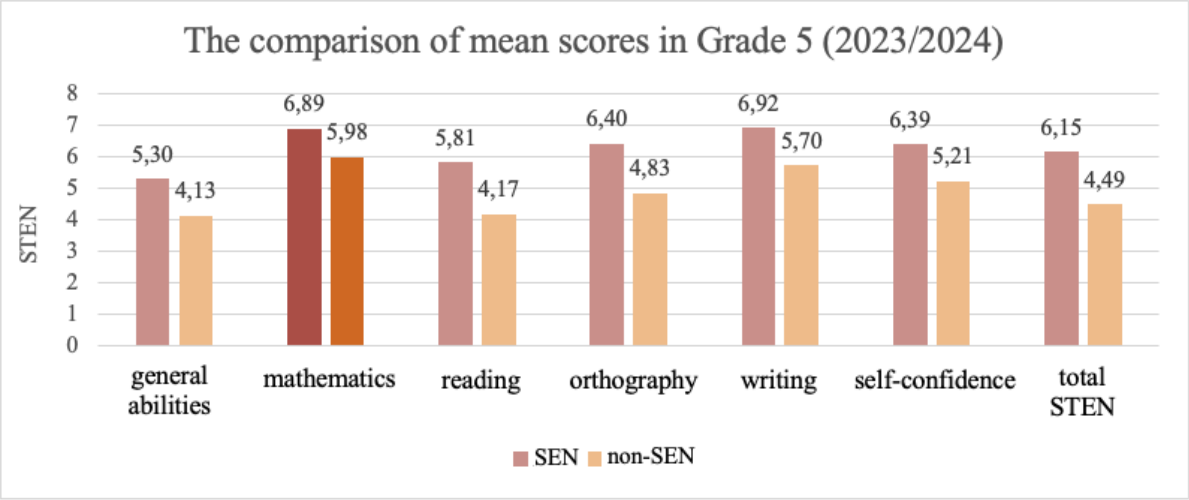


Chart 5. Means SEN (N=32) vs non-SEN (N=145) Grade 5

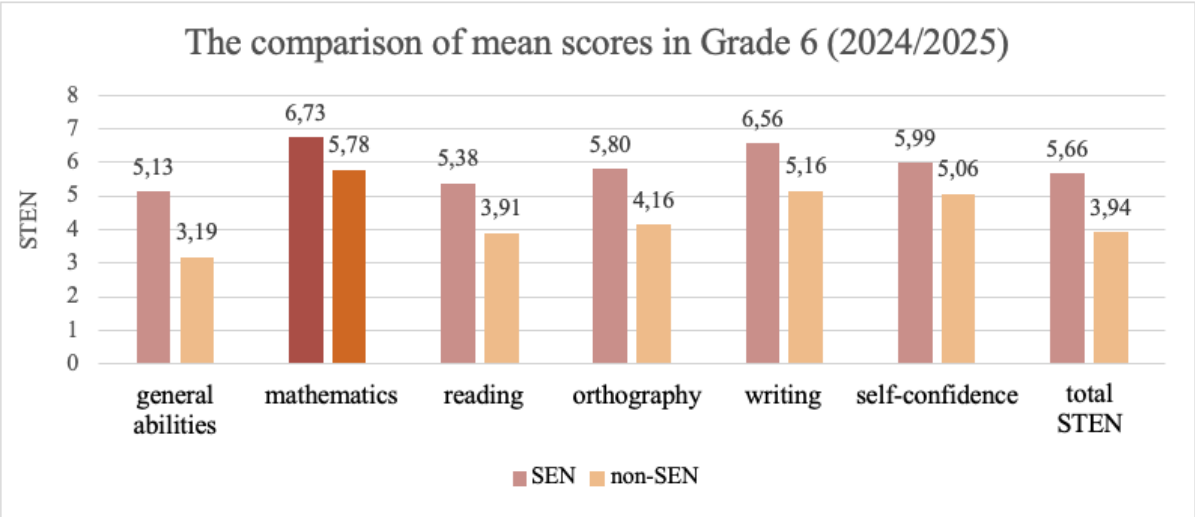


Chart 6. Means SEN (N=32) vs non-SEN (N=145) Grade 6

The final analysis examines how self-concept in mathematics across the primary-to-lower-secondary transition relates to the other SPAS scales. As shown in Table 2, statistically significant differences ($p < .05$) were found for nearly all domains relative to mathematics, with the sole exception of general abilities. The results indicate that the higher a pupil's STEN score on the academic self-concept scale, the higher their self-concept in mathematics. Academic self-concept thus emerged as the strongest predictor ($p < .05$). The language-related scales, such

as reading ($p < .05$), orthography ($p < .05$), and writing ($p < .05$), were also significant and each displayed a negative association with self-concept in mathematics. In other words, pupils who view their language abilities as stronger tend to rate their mathematical abilities somewhat lower, consistent with internal cross-domain comparison (e.g., "strong in Czech" versus "weaker in mathematics").

On contrary, no significant effects were found for gender, grade, special educational needs (SEN), self-confidence, or any interactions among these variables. In other words, when comparing self-concept in mathematics with the other scales, neither the transition from Grade 5 to Grade 6 nor a pupil's gender or SEN status had a significant impact on how pupils perceive their mathematical ability. On the other hand, the previously interpreted results point to the observed questionnaire scores themselves and indicate potential factors that may underlie more positive or negative constructions of self-concept in mathematics.

Table 2. Correlation between self-concept in mathematics and other scales.

Domain	F – statistics	p-value	Relationship to self-concept in mathematics
Reading	46,1570	**p<0,001**	Negative
Orthography	43,3651	**p<0,001**	Negative
Writing	14,8761	**p<0,001**	Negative
Academic self-concept	113,0492	**p<0,001**	Negative

5. Conclusion

The aim of the study was to determine how pupils' academic self-concept in mathematics changes across the transition to lower secondary school and how selected factors affect this change. The analysed factors were age, gender, special educational needs (SEN), and self-concept in other domains. The key finding is that the transition is associated with a decline in academic self-concept ($p < .05$). For self-concept in mathematics, the data suggested a slight decrease after the transition; however, this difference was not statistically significant. The pattern held across all examined groups except boys in the gender comparison, with a more pronounced decline observed among girls on all variables considered. Whereas boys showed higher levels in both grades, girls' mean levels were lower; moreover, boys' self-concept in mathematics increased slightly after the transition, while girls' self-concept in mathematics declined, pointing to a possible gender-related difference in the perception of one's mathematical ability.

Another focus of the study was differences in self-concept in mathematics between pupils without SEN and those with SEN. Pupils with SEN displayed lower levels of self-concept across all examined domains compared with their non-SEN peers. This difference was evident in both Grade 5 and Grade 6. However, the results for pupils with SEN remained within the average range of self-concept in mathematics, suggesting a certain stability.

The final area we examined was the direct comparison between mathematical self-concept and the other domains. The analysis indicated a positive association between pupils' academic self-concept and their self-concept in mathematics: the higher the global score, the higher the mathematics-specific score. At the same time, higher self-concept on language domains, particularly reading, orthography, and writing, were associated with lower values on mathematical self-concept.

References

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. W. H. Freeman and Company.

Burnham, J. R. (2011). *A Case Study of Mathematics Self-Efficacy in a Freshman Engineering Mathematics Course*. Washington State University.

Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2000). Schooling's influences on motivation and achievement. In S. Danziger & J. Waldfogel (Eds.), *Securing the future: Investing in children from birth to college* (pp. 153–181). Russell Sage Foundation.

Hartl, P., & Hartlová, H. (2000). *Psychologický slovník*. Portál.

Hašková, A., Bílek, M., & Cakmakci, G. (2024). Integration of STEM education into the undergraduate teacher training. *R&E-SOURCE, 1*(S1), 108–116. https://doi.org/10.53349/resource.2024.is1.a1246

Havlínová, H., Chmátalová, J., & Slunečko, D. (2023). *Pedagogické diagnostikování na 1. stupni základní školy s příklady inspirativní praxe*. Národní pedagogický institut České republiky. https://www.npi.cz/images/pedagogicke_diagnostikovani.pdf

Hayesová, N. (2009). *Základy sociální psychologie* (I. Štěpaníková, Trans.). Portál. (Original work published 1993).

Helus, Z. (2018). *Úvod do psychologie* (2. přepracované a doplněné vydání). Grada.

Keller, T., Kim, J., & Elwert, F. (2023). Peer effects on academic self-concept: A large randomized field experiment. *European Sociological Review, 39*(5), 759–774. https://doi.org/10.1093/esr/jcad001

Konečná, V. (2010). *Sebepojetí a sebehodnocení rozumově nadaných dětí*. Masarykova univerzita.

Macek, P., Šulová, L., & Konečná, V. (2009). Proměny vztahu k sobě v průběhu dětství a dospívání. In Poledňová, I. (Ed.) *Sebepojetí dětí a dospívajících v kontextu školy*. (s. 7–53). Muni Press.

Matějček, Z., & Vágnerová, M. (1992). *Dotazník sebepojetí školní úspěšnosti dětí (SPAS): Příručka.* Psychodiagnostika

Mertin, V., Krejčová, L., & kol. (2016). *Metody a postupy poznávání žáka: Pedagogická diagnostika* (2. doplněné a aktualizované vydání). Wolters Kluwer ČR.

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2020). *Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2030+*. https://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/strategie-2030

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2022). *Hlavní směry revize Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání* [Materiál k projednání bez rozpravy č. j.: MSMT-21618/2022-3]. Praha. https://revize.rvp.cz/files/iii-hlavni-smery-revize-rvp-zv-po-vpr-final-230111.pdf

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2025). Matematika a její aplikace. In *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Retrieved July 6, 2025, from https://prohlednout.rvp.cz/zakladni-vzdelavani/vzdelavaci-oblasti/mat

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2025). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* (č. j. MSMT-20704/2024-5). https://www.smocr.cz/Shared/Clanky/14893/43-2025-priloha-1465376301-2-rvp-zv-msmt-20704-2024-5.pdf

Národní pedagogický institut České republiky. (n.d.). *Koncept STEM*. NPI ČR. https://archiv-nuv.npi.cz/p-kap/koncept-stem.html

Pajares, F. (2005). Gender differences in mathematics self-efficacy beliefs. In A. M. Gallagher & J. C. Kaufman (Eds.), *Gender differences in mathematics: An integrative psychological approach* (pp. 294–315). Cambridge University Press. https://www.cambridge.org/core/books/gender-differences-in-mathematics/gender-differences-in-mathematics-selfefficacy-beliefs/38954AA60449E127687A6B80F7F3D332

PAQ Research. (2023). *Vyšla nová Mapa vzdělávání. Ukazuje, kde se (ne)daří i faktory vzdělávacího úspěchu*. PAQ Research. https://www.paqresearch.cz/post/nova-mapa-vzdelavani/

Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2013). *Pedagogický slovník* (7. aktualiz. a rozš. vydání). Portál.

Rokos, L., & Koldová, H. (2024). Integrace v přístupu STEM. In H. Koldová & T. Janík (Eds.), *Přístupy k integraci vzdělávacího obsahu z pohledu kurikula, výuky a učitelského vzdělávání* (pp. 31–49). Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

Skřivanová, K. (2025). *Komparace pojetí přírodovědné gramotnosti ve vybraných evropských zemích* [Diplomová práce, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem, Pedagogická fakulta]. Theses.cz. https://theses.cz/id/g8mu4p/

Smékal, V. (2009). *Pozvání do psychologie osobnosti: Člověk v zrcadle vědomí a jednání* (3. opr. vydání). Barrister & Principal.

Smetáčková, I. (2016). Matematické sebehodnocení žáků a žákyň ve 4. a 8. ročníku ZŠ. *Scientia in Educatione, 7*(1), 16–28. https://ojs.cuni.cz/scied/article/view/272/262

Stringer, R. W., & Heath, N. (2008). Academic self-perception and its relationship to academic performance. *Canadian Journal of Education / Revue canadienne de l'éducation, 31*(2), 327–345. https://www.jstor.org/stable/20466704

Svoboda, Z., Smolík, A., Tirpák, J., & Uhrinová, M. (2020). Sebepojetí školní úspěšnosti dětí v ústavní výchově. *GRANT Journal*, 9(2), 79–83.

Trna, J., & Trnová, E. (2015). *Moduly s experimenty v badatelsky orientovaném přírodovědném vzdělávání. Pedagogický vývoj a inovace*. Paido.

Usher, E. L., & Pajares, F. (2009). Sources of Self-Efficacy in Mathematics: A Validation Study. *Contemporary Educational Psychology, 34*(1), 89–101. https://www.researchgate.net/publication/222866594_Sources_of_self-efficacy_in_mathematics_A_validation_study

Vágnerová, M. (2012). *Vývojová psychologie: dětství a dospívání*. Karolinum.

Výrost, J., & Slaměník, I. (2008). *Sociální psychologie* (2. přepracované a rozšířené vydání). Grada.

Wigfield, A., & Karpathian, M. (1991). Who Am I and What Can I Do? Children's Self-Concepts and Motivation in Achievement Situations. *Educational Psychologist*, *26*(3–4), 233–261. https://doi.org/10.1080/00461520.1991.9653134

IMPACT OF PARENTAL ATTITUDE ON STUDENTS' MOTIVATION TO LEARN MATHEMATICS

Isaac OLOPADE[1], Emmanuel LAKA[1], Sunday SANGONIYI[2], Oluwakorede MATILUKURO[1]
[1] Federal University Wukari, Department of Mathematics (Taraba State, Nigeria)
[2] Emmanuel Alayande University of Education, Department of Mathematics (Oyo State, Nigeria)
isaac.olopade@fuwukari.edu.ng, laka@fuwukari.edu.ng, sangoniyiso@eauedoyo.edu.ng, motikorede@yahoo.com

Abstract

This study examined the impact of parental attitude on students' motivation to learn mathematics, focusing on the mediating role of parental involvement and the moderating effects of socioeconomic status (SES) and school context. A descriptive correlational design was used with a sample of 400 parent–student pairs from public and private secondary schools (pupils aged 11–14) in the Ogbomoso, Education Zone, Oyo State, Nigeria. Data were collected using the Parental Mathematics Attitude Scale (PMAS), Parental Involvement Index (PII), and Mathematics Motivation Inventory (MMI), and analyzed through correlation, multiple regression, and mediation–moderation analysis.

Results revealed a significant positive relationship between parental attitude and students' motivation ($r = 0.61$, $p < 0.01$). Parental attitude and involvement jointly predicted 46% of the variance in motivation, while mediation analysis confirmed that parental involvement partially mediates this relationship. SES and school context also moderated the effect, with stronger outcomes observed among urban and higher-SES families.

The study concludes that enhancing parents' positive beliefs and active participation in mathematics learning fosters students' motivation, self-efficacy, and task value. It recommends parental workshops and strengthened school and home collaboration to promote supportive mathematical learning environments in Nigeria.

Keywords: Parental attitude, Parental involvement, Student motivation, Mathematics education, Socio-economic status, Nigeria.

1. Introduction

Mathematics is widely recognized as a gateway discipline that underpins STEM education, technological competence, and many high-value career pathways. Persistent low participation and attainment in mathematics across many regions have prompted investigations into the multi-layered determinants of student engagement, achievement, and persistence (Eccles & Wigfield, 2002). While classroom instruction, curriculum, and teacher expertise are central to learning outcomes, the role of the home environment, particularly parents' attitudes and behaviors, has emerged as a crucial influence on students' motivational trajectories (Bandura, 1997; Wang, 2024).

Parental attitudes toward mathematics are comprised of cognitive beliefs (e.g., perceived utility of mathematics), affective dispositions (enjoyment, anxiety), and normative expectations (beliefs about appropriate levels of effort and future utility). These attitudes shape parental behaviors, such as the frequency and quality of homework help, the amount of "math talk" in everyday life, and the encouragement offered when students face difficulty,

that in turn affect student motivation (Hoover-Dempsey & Sandler, 1997; Charitaki, 2023). The study of Issaka et al. (2024) concluded that parental engagement and support had a substantial influence on students'attitudes towards studying mathematics, especially at home. Empirical evidence indicates that positive parental beliefs and constructive involvement are associated with higher student self-efficacy, greater intrinsic interest, and improved task value for mathematics (Wang, 2024; Simmons et al., 2024). Conversely, parental math anxiety or dismissive beliefs about mathematics can transmit negative expectancies that undermine students' persistence and performance (Peixoto et al., 2024).

Recent meta-analytic and large-scale cross-national studies underscore both the potency and complexity of parental influence. A meta-analysis focused specifically on mathematics shows that the effect of parental involvement is heterogeneous: the type of involvement (cognitive engagement vs. controlling help), family socioeconomic status (SES), and the broader school context moderate the magnitude and direction of effects (Wang, 2024). Large-scale data from multiple countries similarly reveal that parental beliefs and numeracy practices at home predict children's motivation and achievement, but the nature of these relations varies across cultural and policy environments (Peixoto et al., 2024). In addition, domain-specific parental attitudes (parents' attitudes toward mathematics specifically, rather than toward school more generally) appear to have unique predictive power for children's mathematics interest and self-concept, highlighting the need for subject-specific investigation (Charitaki, 2023).

At the same time, contemporary research highlights important contextual moderators. Urban or rural differences, resource constraints, and SES influence both the extent to which parents can act on their beliefs and how effective those actions are. In better-resourced settings, parents who value mathematics tend to provide more learning opportunities, access to tutoring, and enriched numeracy activities; in under-resourced contexts, favorable beliefs may not translate automatically into effective involvement because of structural barriers (Salido et al., 2024; Muhammad, 2024). Moreover, gendered parental expectations and biases remain salient: recent findings suggest parents often overestimate boys' mathematical ability relative to girls, which can amplify gender disparities via differential encouragement and opportunities (The Guardian report summarizing Tonei et al., 2024). This evidence underscores the importance of investigating parental attitudes not only as direct predictors but also as elements embedded in a broader socioeconomic and cultural ecology.

In the Nigerian context, research on parental influence in mathematics is growing but still limited in scope and methodological depth. Several studies document correlations between parental involvement and student attainment in mathematics at primary and secondary levels, but fewer have combined multi-informant designs, validated psychometric instruments, and mediation/moderation analyses to explain how parental attitudes translate into student motivation (Akindipe, 2025). Given persistent concerns about mathematics performance in national examinations and the policy emphasis on STEM capacity building, clarifying the mechanisms by which parents affect students' mathematics motivation is both timely and policy relevant.

Parental attitudes and involvement have long been identified as significant determinants of students' academic motivation and success, particularly in mathematics. Wang (2024) conducted a large-scale meta-analysis on parental involvement and mathematics performance and reported that supportive parental behaviors positively influence students' intrinsic motivation, self-efficacy, and persistence. However, the study also found that the strength of these effects varies depending on the type and quality of involvement, as well as contextual factors such as socioeconomic background and learning environment.

Similarly, Simmons et al., (2024) examined longitudinal data and discovered that positive parental beliefs about mathematics consistently predict children's enthusiasm and willingness to engage with mathematical tasks. The study emphasized that parents who express confidence in mathematics create a motivational climate that encourages their children to value effort and develop resilience when faced with academic challenges.

In a related study, Charitaki (2023) explored the role of the home numeracy environment and revealed that parents' constructive engagement such as discussing numbers, problem-solving, and linking mathematics to everyday situations, greatly enhances students' interest and task value in mathematics. Conversely, parents who exhibit math anxiety or frustration tend to pass these negative attitudes to their children, leading to decreased motivation.

Muhammad et al., (2024) investigated urban–rural disparities in mathematics achievement and observed that urban parents are more likely to engage in mathematics related activities due to better access to resources and exposure, whereas rural parents, though often supportive, face economic and structural barriers that limit active participation. Similarly, Salido et al., (2024) conducted a bibliometric review and concluded that socioeconomic status (SES) and contextual differences strongly moderate the effect of parental involvement on student motivation and achievement.

Participation involving parent has been known as one major reference affecting the academic excellence of students in all subjects, which include mathematics and chemistry (Esho et al.). It is widly recognized that parents and families are a critical part of children's education and they are responsible for laying down the behavioural foundations relevant to learning and development (Samuel & Sunday, 2021).

Gender remains another significant dimension. Tonei et al. (2024) found that many parents unintentionally overestimate their sons' mathematical abilities while underestimating their daughters', a bias that may contribute to enduring gender gaps in mathematics confidence and participation.

Focusing on the Nigerian context, Akindipe (2025) carried out an experimental study on parental involvement interventions and discovered that structured parental training significantly improved students' self-efficacy and mathematics achievement.

Despite these valuable contributions, most previous studies are cross-sectional and descriptive, offering limited insights into the underlying mechanisms through which parental attitudes translate into student motivation. Few studies have jointly analyzed the mediating effect of parental involvement and the moderating roles of SES and school context. Moreover, there remains a dearth of recent empirical evidence from developing countries like Nigeria, where cultural, economic, and infrastructural factors may alter these relationships.

Therefore, this study seeks to address these gaps by integrating attitudinal and behavioral parental factors within a single model and analyzing how parental attitudes, involvement, and socioeconomic context jointly influence students' motivation to learn mathematics. This approach contributes to a more comprehensive understanding of the home–school dynamics shaping mathematical engagement among students in Nigerian educational settings.

2. Research Design

This study adopted a **descriptive correlational survey design** with an embedded **explanatory (mediational) analysis.** The design was suitable because it allowed the researcher to examine both the direct and indirect effects of parental attitude on students' motivation toward mathematics learning. Quantitative methods were employed to measure the relationships among *Parental Mathematics Attitude* (PMAS), *Parental Involvement Index* (PII), and *Mathematics Motivation Inventory* (MMI).

2.1. Population and Sampling Technique

The population consisted of **senior secondary students** and their parents from both public and private secondary schools within Ogbomoso Education Zone, Oyo State, Nigeria.

A **multi-stage sampling** procedure was used:

1. Four Local Government Areas were randomly selected.
2. From each, two schools (one public, one private) were chosen.
3. From the selected schools, **400 parent–student pairs** were randomly sampled.

Table 1: Sample distribution by school location

Category	Population	Sample	Percentage
Urban	520	240	60 %
Rural	360	160	40 %
Total	880	**400**	100 %

2.2. Instrumentation

Data were collected using three validated instruments:

Table 2: Data instrumentation

Instrument	Purpose	Reliability (α)
Parental Mathematics Attitude Scale (PMAS)	Measures parents' beliefs, value, and emotional orientation toward mathematics	0.86
Parental Involvement Index (PII)	Assesses cognitive, affective, and practical involvement in children's mathematics learning	0.82
Mathematics Motivation Inventory (MMI)	Captures students' intrinsic/extrinsic motivation, self-efficacy, and task value	0.88

All instruments used a 5-point Likert scale **(1 = Strongly Disagree to 5 = Strongly Agree). Construct validity was verified through confirmatory factor analysis (CFA); all loadings exceeded 0.60.**

2.3. Data Collection Procedure

Permission was obtained from school principals and parents. Questionnaires were administered to students (aged 11–14) during mathematics periods, while parents completed their forms at home. Matched codes were used to link parent–student pairs. Completed questionnaires totalled 392 valid responses (98 % return rate).

2.4. Data Analysis Techniques

Data were analyzed using **SPSS 29** and **AMOS 26:**

1. **Descriptive statistics** (mean, SD, frequency) to summarize demographic variables.
2. **Pearson correlation** to determine relationships among PMAS, PII, and MMI.
3. **Multiple regression analysis** to predict MMI from PMAS and PII.
4. **Mediation analysis** (using Baron & Kenny, 1986 steps and Sobel test).
5. **Moderation analysis** (using SES and school context as moderators).
6. All tests employed **0.05 significance level.**

2.5. Descriptive Statistics of Major Variables

Table 3: Descriptive statistics of main constructs

Variable	Mean	SD	Min	Max
Parental Attitude (PMAS)	3.52	0.63	1.80	4.90
Parental Involvement (PII)	3.30	0.58	1.70	4.85
Student Motivation (MMI)	3.45	0.67	1.90	4.95

2.6. Correlation Matrix

Table 4: Correlation among key variables

Variables	1	2	3
1 PMAS	1.00		
2 PII	0.59**	1.00	
3 MMI	0.61**	0.55**	1.00

** $p < 0.01$

2.7. Regression and Mediation Analysis

Table 5: Multiple regression results

Predictor	β	t-value		p
PMAS → MMI	0.48	8.21		0.000
PII → MMI	0.36	6.74		0.000

$R^2 = 0.46$ $F = 72.15$ ($p < 0.001$)

Mediation test:

PMAS → PII ($a = 0.59$, $p < 0.01$)
PII → MMI ($b = 0.36$, $p < 0.01$)
Indirect effect = $a \times b = 0.21$
Sobel $z = 4.19$ ($p < 0.001$)
⟹ **Partial mediation confirmed.**

2.8. Graphical Representation

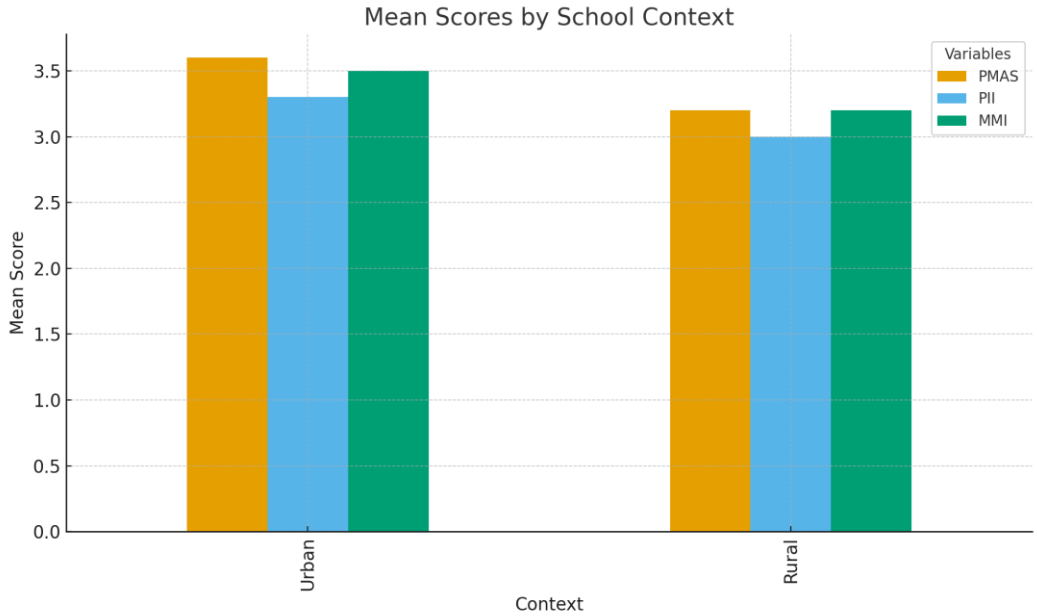


Figure 1. Mean Scores by School Context
(Bar chart illustrating higher PMAS, PII, and MMI among urban schools compared with rural counterparts.)

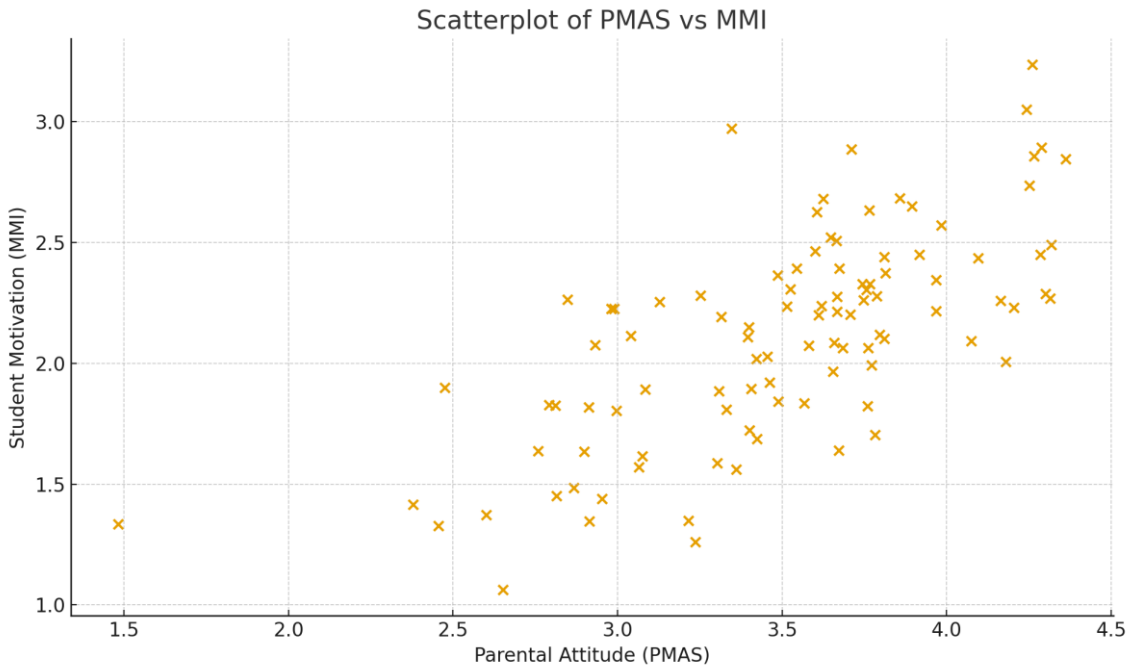


Figure 2. Scatterplot of PMAS vs MMI
(Shows a strong positive linear relationship, r = 0.61.)

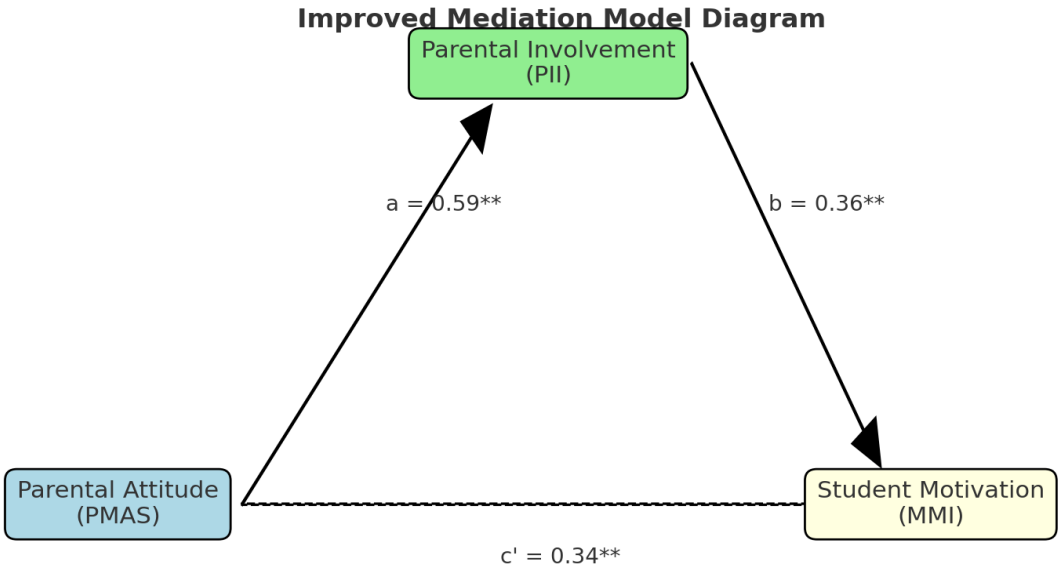


Figure 3. Mediation Model Diagram
(Depicts paths a, b, and c' demonstrating partial mediation of PII between PMAS and MMI.)

2.9. Ethical Considerations

Participation was voluntary; respondents' anonymity and confidentiality were ensured. Consent forms were obtained from both students and parents. The study adhered to ethical research standards of the Federal University Wukari Research Ethics Committee.

3. Results and Analysis

Descriptive statistics indicate that parental attitude (PMAS) averaged 3.4 (SD = 0.6) on a 5-point scale, showing generally positive dispositions. Parental involvement (PII) averaged 3.1, and student motivation indices averaged around 3.3. Table 6 presents descriptive statistics, while Table 7 displays correlation coefficients among key variables.

Table 6: Descriptive Statistics

Variable	Mean	SD	Min	Max
PMAS	3.4	0.6	1.2	5.0
PII	3.1	0.7	1.0	5.0
Self-Efficacy	3.5	0.5	1.5	5.0
Intrinsic Motivation	3.3	0.6	1.0	5.0

Table 7: Correlation Matrix

	PMAS	PII	Self-Efficacy	Motivation
PMAS	1.00	0.52	0.61	0.58
PII	0.52	1.00	0.55	0.49
Self-Efficacy	0.61	0.55	1.00	0.66
Motivation	0.58	0.49	0.66	1.00

Table 7 shows correlations among parental attitude, involvement, and motivation variables. Regression analysis indicated that PMAS significantly predicted student self-efficacy ($\beta = 0.48$, $p < 0.01$) and intrinsic motivation ($\beta = 0.42$, $p < 0.01$). A mediation model showed that parental involvement (PII) partially mediated the relationship between PMAS and overall motivation, accounting for approximately 22% of the total effect.

4. Discussion

The findings of this study provide clear empirical evidence that parental attitude significantly influences students' motivation to learn mathematics. The strong positive correlation ($r = 0.61$, $p < 0.01$) between Parental Mathematics Attitude (PMAS) and Mathematics Motivation Inventory (MMI) aligns with previous research by Wang (2024) and Simmons (2024), who observed that students' motivation and persistence in mathematics increase when parents express confidence, enthusiasm, and value for the subject. This outcome reinforces the principle of Social Cognitive Theory (Bandura, 1997), which posits that positive verbal persuasion and modeling from parents enhance students' self-efficacy beliefs.

The regression results further reveal that parental attitude and involvement jointly predicted 46% of the variance in student motivation, confirming that both cognitive beliefs and behavioral engagement from parents play vital roles. This supports the findings of Akindipe (2025), who demonstrated that structured parental involvement programs improve students' mathematics achievement through heightened self-efficacy. It also agrees with Expectancy–Value Theory (Eccles & Wigfield, 2002), which emphasizes the importance of perceived task value and expectations of success in motivating learners.

The mediation analysis provides deeper insight: parental involvement partially mediates the relationship between parental attitude and student motivation. This means that while positive attitudes directly affect students' motivation, they also exert an indirect influence through the level of parental engagement in children's learning. Parents with constructive mathematical beliefs are more likely to assist with homework, encourage effort, and model persistence—behaviors that strengthen students' internal motivation. Similar mediating effects have been reported by Charitaki (2023) and Peixoto et al. (2024), who found that parents' daily interactions translate attitudes into motivational gains for their children.

The moderation analysis revealed that socioeconomic status (SES) and school context (urban versus rural) significantly affect the magnitude of these relationships. Urban and higher-SES parents displayed stronger positive effects of both attitude and involvement on motivation, consistent with Muhammad (2024) and Salido et al., (2024). This outcome reflects the influence of resource availability, exposure, and educational support systems, which enable urban and affluent parents to convert positive beliefs into meaningful engagement. In contrast, rural or lower-SES parents, though often supportive, face barriers such as limited time, income, or access to educational materials, which may weaken the practical impact of their attitudes.

These findings also highlight persistent contextual inequalities in Nigerian education. They suggest that interventions aimed at improving students' mathematics motivation must address structural challenges faced by families in disadvantaged settings. School–community collaborations could help bridge this gap by offering parent education programs and outreach that equip all parents with effective engagement strategies, regardless of socioeconomic background.

Overall, the results affirm that students' motivation in mathematics is shaped by a triadic relationship among parental attitudes, parental involvement, and contextual factors. The evidence strengthens global literature on parental influence and extends it to the Nigerian context, where empirical studies remain limited. By integrating both attitudinal and behavioral variables, this study contributes to a more holistic understanding of how family dynamics shape students' mathematical motivation.

5. Conclusion and Recommendations

This research explored how parents' attitudes toward mathematics influence students' motivation to learn the subject, taking into account the roles of parental involvement, socioeconomic status (SES), and school setting. The findings clearly showed that students whose parents hold positive beliefs and provide consistent encouragement display stronger motivation, confidence, and persistence in mathematics learning. Together, parental attitude and involvement explained a significant portion of the differences in students' motivation levels.

The mediation analysis demonstrated that parental involvement partly explains how positive attitudes lead to improved motivation. Parents who actively assist, encourage, and communicate positive messages about mathematics enhance their children's enthusiasm and self-belief. Furthermore, differences in family income and school context shaped the strength of this relationship. Urban and higher-SES families were able to translate their beliefs into practical engagement more effectively than rural or lower-income parents.

Overall, improving students' motivation to learn mathematics is a shared responsibility. Teachers, parents, and policymakers must work together to build confidence, interest, and a positive mindset toward mathematics. Encouraging active and informed parental participation remains one of the most effective, sustainable ways to enhance mathematics learning outcomes in Nigeria and similar contexts. Improving students' motivation to learn mathematics is a shared responsibility. Teachers, parents, and policymakers must work together to build confidence, interest, and a positive mindset toward mathematics. Encouraging active and informed parental participation remains one of the most effective, sustainable ways to enhance mathematics learning outcomes in Nigeria and similar contexts.

References

Akindipe, O. O. (2025). Parental involvement intervention: effect on students' self-efficacy and math achievement among a Nigerian sample. *Front. Psychol*. 16:1589069. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2025.1589069

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control.*

Charitaki, G. (2023). Parents' attitudes toward mathematics and home numeracy experiences.

Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2002). Motivational beliefs, values, and goals. Annual Review of Psychology, 53, 109–132. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.53.100901.135153

Esho, I., Ibitoye, D., Iyanda, D., & Okoku, C. (2025). Effect of Parental Involvement on Students' Mathematics Performance in Relation to Solving Chemistry Problems: A Study in Ilesa East Local Government Area, Osun State, Nigeria. *Iconic Research and Engineering Journals (IRE Journals),* Volume 8, Issue 9.

Hoover-Dempsey, K. V., & Sandler, H. M. (1997). *Why do parents become involved in their children's education? Review of Educational Research, 67*(1), 3–42. https://doi.org/10.3102/00346543067001003

Issaka, A., Abdul-Wahab, T., & Rafatu, T. (2024). Exploring impact of student attitude, parental involvement, and teacher competence on mathematics performance in selected schools in Northern Ghana. *Journal of Mathematics and Science Teacher, 4*(1), em056.

Muhammad J. A., Shahzadi A.K. and Muhammad A. (2024). Urban-Rural Disparities in Secondary Students' Mathematics Achievement: A Comparative Study. *International*

Journal of Contemporary Issues in Social Sciences, *3*(1), 373–379. Retrieved from https://ijciss.org/index.php/ijciss/article/view/320

Peixoto, F., Mata, L., Campos, M. *et al.* 'Am I to blame because my child is not motivated to do math?' Relationships between parents' attitudes, beliefs and practices towards mathematics and students' mathematics motivation and achievement. *Eur J Psychol Educ* 39, 1561–1586 (2024). https://doi.org/10.1007/s10212-023-00774-6

Salido A , Sugiman, Puji Y, Aufal, Safril H., and Azhar M. (2024). Parental involvement in students' mathematics activities: A bibliometric analysis. *EURASIA J Math Sci Tech Ed, 20*(10), Article No: em2513 https://doi.org/10.29333/ejmste/15179

Samuel, U., & Sunday, A. (2021). *A Study of Parental Attitude towards Mathematics*

Education and Student's Math Homework Behavior. *International Journal of Advanced Research (IJAR), 9*(05), 366–371.

Simmons F.R., Elena S., Anne-Marie A., Hannah N., Hannah P., and Courtney (2024). Longitudinal associations between parental mathematics anxiety and attitudes and young children's mathematics attainment. National Library of Medicine. https://doi.org/ 10.1016/j.jecp.2023.105779

Tonei et al. (presented 2024; news coverage): Parental overestimation of sons' math skills; linked to gender stereotyping (The Guardian coverage). The Guardian

Wang, X. (2024). The influence of parental involvement on students' math motivation. Frontiers in Psychology.

ABAKU

Hana VANTUCHOVÁ
Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)
hana.vantuchova01@upol.cz

Abstrakt

Článek představuje vzdělávací hru Abaku, která rozvíjí aritmetické dovednosti žáků prostřednictvím tvořivé práce s čísly. Princip hry spočívá v kombinování číslic do matematicky správných rovností bez použití aritmetických symbolů, čímž hráči intuitivně objevují matematické vztahy. Abaku existuje v deskové i digitální podobě a je využitelná napříč všemi stupni vzdělávání díky možnosti přizpůsobit pravidla a úroveň obtížnosti. Hra přirozeně podporuje diferenciaci výuky, inkluzi a motivaci žáků k matematice.

Klíčová slova: Abaku, matematika, aritmetika, didaktická hra, matematická gramotnost, kognitivní rozvoj, diferenciace výuky

ABAKU

Abstract

The article presents the educational game Abaku, designed to enhance students' arithmetic skills through creative work with numbers. The game's principle is based on combining digits into mathematically valid equations without using arithmetic symbols, allowing players to intuitively discover mathematical relationships. Abaku exists in both board and digital versions and can be used across all levels of education by adjusting the rules and difficulty level. The game naturally supports differentiated teaching, inclusion, and student motivation toward mathematics.

Keywords: Abaku, mathematics, arithmetic, educational game, mathematical literacy, cognitive development, differentiated instruction

1. Úvod

Hra Abaku je primárně určena k rozvoji a procvičování aritmetických dovedností žáků. Učitelé, kteří metodu dobře znají a používají, však v této aktivitě nacházejí širší didaktický potenciál, lze ji využít k nácviku a porozumění pojmům z oblasti osové souměrnosti, kombinatoriky, teorie grafů, ale i v rámci prvouky.

Tato hra získala mezinárodní ocenění Academics' Choice 2022 Brain Toy Winner Award for Mind-Building Excellence. Cena je prestižní zárukou kvality ve vzdělávání, vyhrazená jen pro ty nejlepší hračky a média rozvíjející myšlení. Nezávislý program Academics' Choice Award je zárukou vynikající kvality a je uznávaný po celém světě zákazníky i vzdělávacími

institucemi jako označení pro skutečně efektivní učební pomůcky podporující myšlení a umožňující žákům a studentům plně rozvinout kognitivní dovednosti vyššího řádu.

Ve školním kontextu je vhodné začít s Abaku off-line formou tedy skládáním a čtením příkladů z čísel a teprve následně přejít k digitální (on-line) verzi hry.

Příklady se zapisují jako posloupnost číslic, bez použití aritmetických symbolů a znaku rovnosti. Například zápis „123“ lze interpretovat jako rovnost 1 + 2 = 3. Přidáním další číslice 4 na konec vzniká „1234“, které lze číst jako 12 : 3 = 4. V takovém zápisu zůstává přítomen i původní vztah 1 + 2 = 3.

Žáci se postupně učí hledat takovou kombinaci z daných číslic, která obsahuje co nejvíce matematicky správných rovností. Například ze čtyř číslic 1, 2, 3 a 4 je nejvhodnější kombinace „4312“, kde lze nalézt tři platné příklady: 4 · 3 = 12, 4 − 3 = 1 a 3 − 1 = 2.

Obdobně z číslic 1, 7, 8 a 9 lze vytvořit optimální kombinaci „9817“, v níž se nachází příklady: 9 − 8 = 1, 8 − 1 = 7 a 9 + 8 = 17.

Takové příklady jsou srozumitelné i žákům v nižších ročnících základní školy. Zatímco průměrní žáci při seznámení se s hrou Abaku obvykle pracují s jednocifernými příklady, nadaní žáci dokáží velice rychle identifikovat a používat i víceciferné vztahy. Z pohledu učitele je výhodou, že všichni žáci řeší stejný typ úlohy, avšak každý na úrovni odpovídající jeho individuálním schopnostem. Hra tak přirozeně umožňuje diferenciaci výuky a každý žák se zlepšuje svým vlastním tempem.

Metodické materiály ke hře jsou dostupné na stránkách abaku.cz/metodika, kde jsou uvedeny i doporučené pomůcky (např. kostky, karty, kameny a jiné) a aktivity s nimi, které je vhodné do výuky zařadit ještě před samotnou hrou.

Samotná hra Abaku je určena pro 1–4 hráče a existuje jak v on-line, tak deskové variantě. Princip hry je podobný Scrabblu: místo písmen, z nichž se skládají slova, se používají číslice, které vytvářejí matematické rovnosti. Každý nově položený příklad musí navazovat alespoň jedním kamenem na již existující příklad.

Základní pravidla hry jsou následující:

- Příklady lze skládat a číst pouze zleva doprava a shora dolů; žádný jiný směr není přípustný.
- Povolené operace zahrnují sčítání, odčítání, násobení, dělení, druhou a třetí mocninu a odmocninu.
- Nula se nikdy nevyskytuje samostatně, pouze jako součást víceciferného čísla.
- Při křížení řádků a sloupců musí všechny vzniklé příklady mít matematický smysl.

Podrobná pravidla hry jsou dostupná na abaku.org/abaku-play-pravidla-hry.

Specifické pravidlo nuly může zpočátku působit nejasně, avšak po několika hrách se stává intuitivně srozumitelným. Například zápis „505“ je neplatný, neboť není zřejmé, zda znamená 5 + 0 = 5 nebo 5 − 0 = 5 v obou případech je nula použita nesprávně jako samostatný prvek.

Naopak zápis „5510“ je platný, protože představuje vztah 5 + 5 = 10, kde nula tvoří součást čísla. Současně je v tomto zápisu obsažen také příklad 5 : 5 = 1.

Existují dvě on-line platformy: AbakuLab.com tato verze je určena primárně pro školy a AbakuPlay.com verze, která je vhodná pro širokou veřejnost.

V nastavení hry lze zvolit několik parametrů: typ soupeře (člověk nebo robot), počet hráčů (2–4 na jedné desce), čas na tah, počet kamenů a velikost herního pole.

Pro začátečníky lze doporučit nastavení: 1 minuta na tah, 50 kamenů a hrací pole 15×15. Takto nastavená hra trvá přibližně 20–30 minut, což odpovídá jedné vyučovací hodině.

Ve variantě hry s robotem je možné, aby si hráč zvolil úroveň obtížnosti, robot 1 je vhodný pro začátečníky, robot R.U.R. je nejnáročnější. Tato volba umožňuje žákovi zažít pocit úspěchu, když vyhraje nad robotem dané úrovně a současně má možnost si v další hře klást vyšší cíle a zvolit vyšší obtížnost.

Obrázek 1. Nastavení hry

Digitální verze hry umožňuje omezit povolené operace, což je vhodné pro různé věkové úrovně žáků. Například pro první stupeň lze v dalším nastavení vypnout mocniny, i když se v praxi ukazuje, že je často vhodné ponechat žákům možnost samostatného objevování tohoto principu. Nadaní žáci často intuitivně rozpoznají strukturu mocnin a plynule začnou sami mocniny a odmocniny využívat při tvorbě příkladů, zatímco ostatní žáci mocniny pochopí později na základě učitelova vysvětlení.

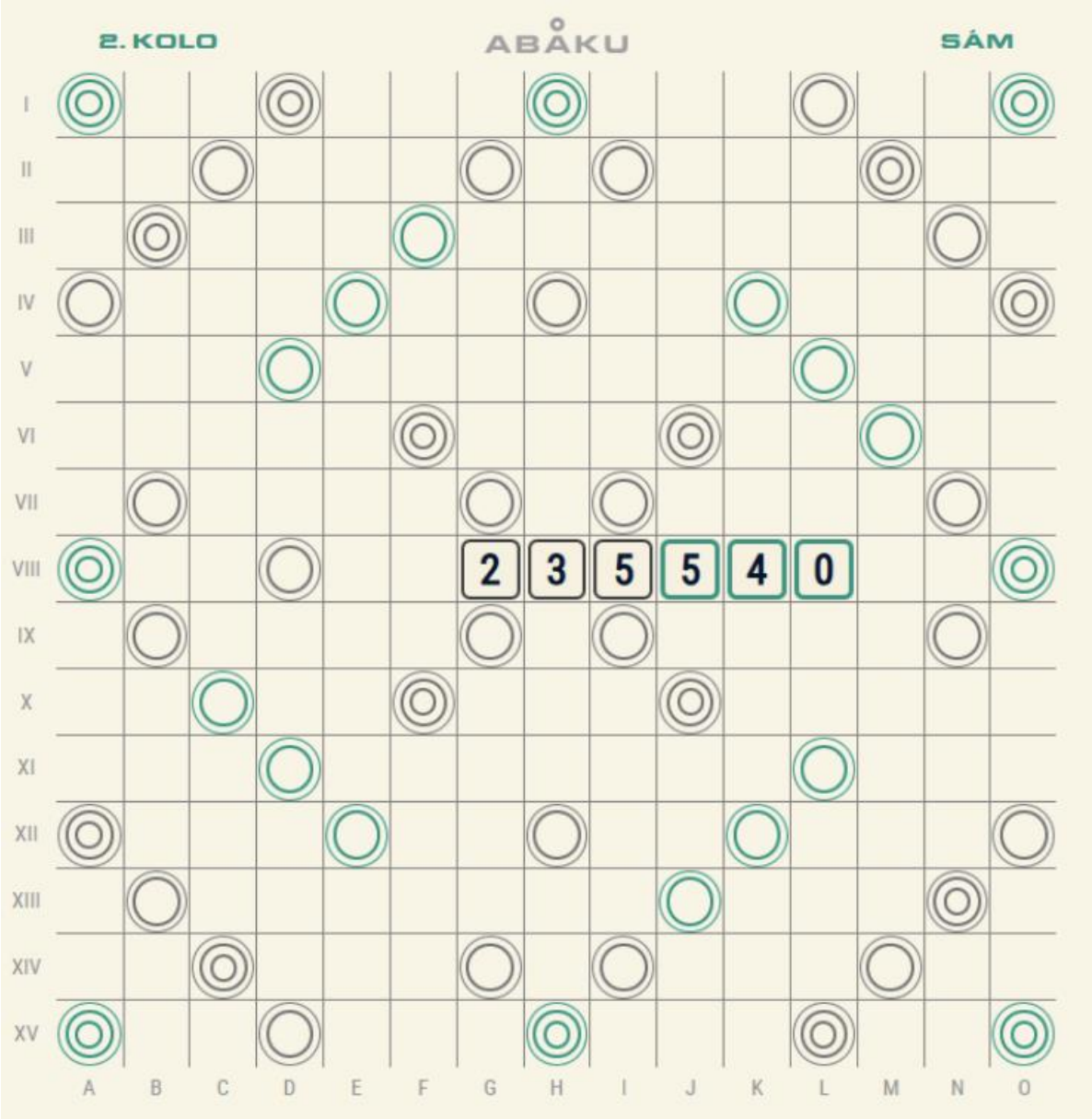
Pro žáky základních a středních škol se každoročně koná on-line celostátní soutěž Liga Abaku, pořádaná pod záštitou Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR. Partnery soutěže jsou mimo jiné také Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF) a Společnost učitelů matematiky (SUMA).

2. Ukázka hry

Na herní desce hráči postupně skládají příklady tak, aby každý nově přidaný navazoval alespoň jedním kamenem na již položený. Kameny s číslicemi mají k dispozici ve svém zásobníku, kam si je po každém tahu zase doplní.

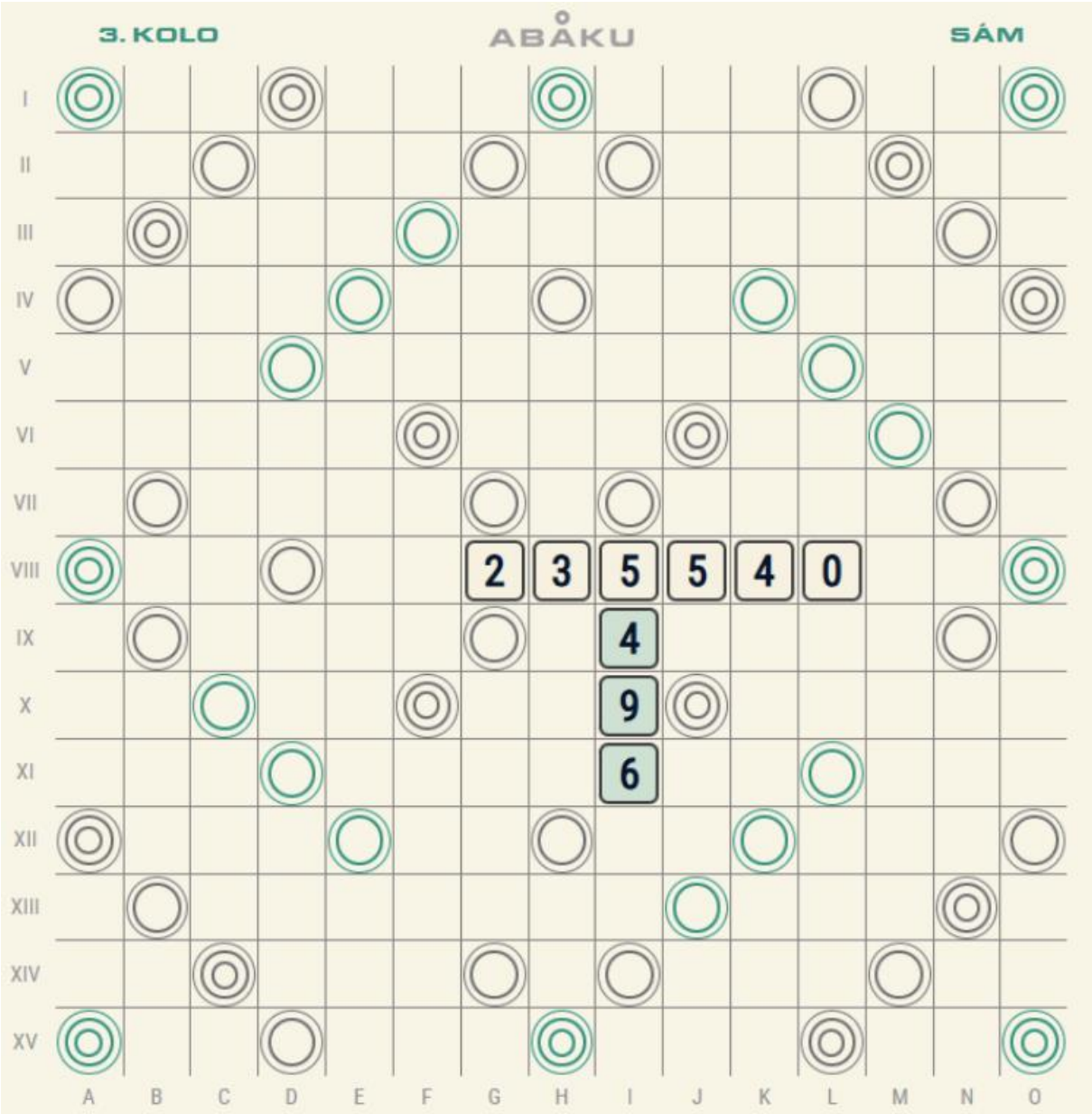
Příklady hry:

Zde bylo první položenou kombinací „235“, která představuje příklad 2 + 3 = 5. Hráč za tento tah získal celkem 20 bodů. Následně byly přiloženy kameny „540“, čímž byl vytvořen příklad 35 + 5 = 40. Hráč získal 17 bodů.



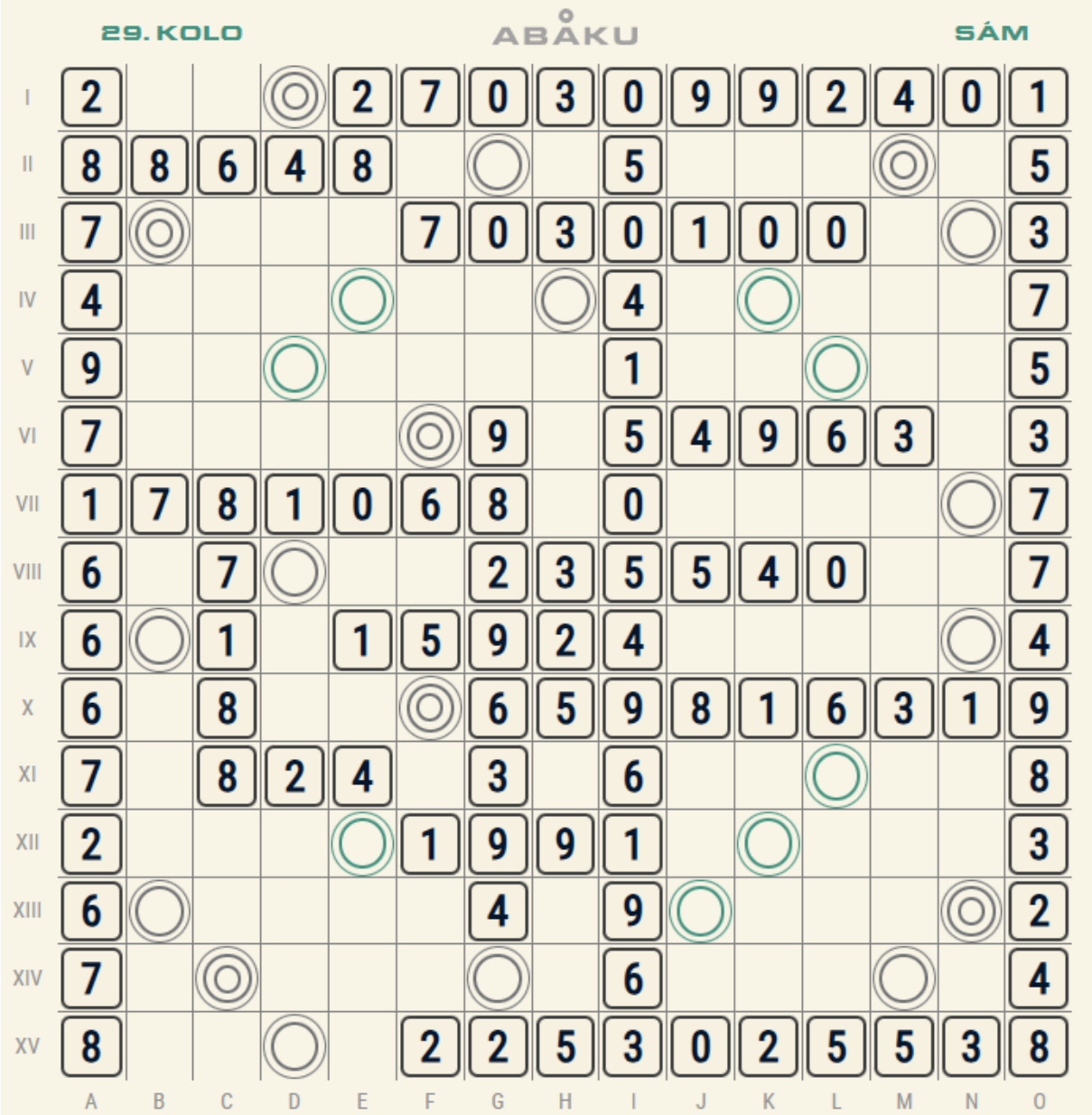
Obrázek 2. Hra po 2 tazích

V dalším tahu bylo položeno „496“, čímž byly vytvořeny současně dva příklady: 54 : 9 = 6 a 5 + 4 = 9. Hráč získal za tento tah celkem 50 bodů.



Obrázek 3. Hra po 3 tazích

Níže je zobrazena hrací deska na konci hry se 110 kameny na ploše 15×15 polí. V tomto případě hra trvala 29 kol, tedy cca 30 minut. Čtenář může sám hledat všechny příklady, které byly v průběhu hry na desku položeny.



Obrázek 4. Konec hry

Za každý vytvořený příklad hráč získává body. Čím více příkladů vznikne v rámci jednoho tahu, tím vyšší bodový zisk. Herní deska obsahuje zvýhodněná pole podobně jako ve Scrabblu – pole označená dvěma kroužky násobí hodnotu dvakrát, tři kroužky třikrát; šedé kroužky násobí pouze kámen, zelené kroužky celý příklad. Systém bodování hráči obvykle pochopí intuitivně po několika tazích. Hra pokračuje, dokud nejsou postupně použity všechny kameny v zásobníku.

3. Závěr

Hra Abaku představuje nástroj, který podporuje nejen osvojování aritmetických operací, ale především rozvoj vyšších kognitivních procesů, jež jsou zásadní pro učení a myšlení v matematice. Na rozdíl od tradičního drilového procvičování operací (tzv. sloupečků příkladů) žáci při hře aktivně hledají příklady, vytvářejí strategie, ověřují hypotézy a reflektují správnost svých postupů.

Z kognitivního hlediska hra přispívá k posilování několika klíčových funkcí:

1. Pracovní paměť a kognitivní flexibilita – žák musí udržet v paměti více čísel a operací, zvažovat různé kombinace a současně přizpůsobovat strategii podle situace na herní desce. Dochází tak k rozvoji schopnosti manipulovat s informacemi v reálném čase, přepínat mezi úlohami a řídit vlastní mentální procesy.
2. Logicko-matematické myšlení – při hledání platných rovností žák implicitně provádí operace algebraického a kombinatorického charakteru. Musí rozpoznat matematické příklady, posoudit jejich platnost a vyhodnotit efektivitu jednotlivých tahů.
3. Strategické a analytické myšlení – podobně jako ve hrách typu Scrabble dochází i v Abaku k rozvoji schopnosti plánovat několik kroků dopředu a volit optimální umístění kamenů s ohledem na bodové zisky i další herní možnosti.
4. Metakognitivní dovednosti – hra vyžaduje průběžné sebehodnocení a korekci postupu „Mohu vytvořit více příkladů jinou kombinací?". Žák tak rozvíjí schopnost reflektovat vlastní myšlení a učební strategie, což je v souladu s požadavky současné didaktiky matematiky.
5. Rozvoj numerického a symbolického porozumění – díky absenci explicitních operátorů ($+, -, \cdot, :, =, {}^{2}, {}^{3}, \sqrt[2]{\ }, \sqrt[3]{\ }$) je žák veden k hlubšímu pochopení struktur číselných vztahů, nikoli pouze k mechanickému používání symbolů. Tento aspekt podporuje konceptuální porozumění aritmetice a přispívá k prevenci tzv. procedurálního myšlení bez porozumění.
6. Podpora exekutivních funkcí a koncentrace pozornosti – hra vyžaduje udržení pozornosti po delší čas, plánování tahů, inhibici impulzivních reakcí a práci s chybou. Tyto funkce jsou klíčové nejen pro matematické učení, ale i pro širší kognitivní rozvoj dítěte.

Z pedagogického hlediska Abaku přirozeně vytváří prostředí pro diferenciaci výuky. Na jedné herní desce mohou současně pracovat žáci s různou úrovní matematické zdatnosti, přičemž každý má možnost dosahovat úspěchu přiměřeného svým schopnostem. Tento princip odpovídá požadavkům inkluzivního vzdělávání a naplňuje cíle stanovené revidovaným Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (RVP ZV, 2023), zejména v oblasti rozvoje matematické gramotnosti, kompetencí k řešení problémů a k učení.

Zkušenosti učitelů ukazují, že pravidelné zařazování hry Abaku do výuky vede k posílení motivace žáků a ke zvýšení jejich zájmu o matematiku. Díky hernímu formátu a okamžité zpětné vazbě žáci matematiku vnímají nikoli jako izolovaný soubor pravidel, ale jako systém logických vztahů, s nimiž lze aktivně experimentovat.

Učitelům, kteří s nasazením této aktivity do výuky váhají, mohou doporučit videoukázky z reálné výuky dostupné na stránkách abaku.cz/videa. Videa pocházejí z běžných základních škol a prezentují autentickou práci žáků různých úrovní.

Literatura

Academics' Choice Awards. (n.d.). *Academics' Choice™ – Honoring Mind-Building Media & Toys*. https://www.academicschoice.com/

AL.21 s.r.o. (n.d.). *Metodika Abaku*. https://abaku.cz/metodika

AL.21 s.r.o. (n.d.). *Nápověda aplikace Abaku Play: Pravidla hry*. https://abaku.org/abaku-play-pravidla-hry

MŠMT. (2023). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* https://edu.gov.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

ANALÝZA KONCEPTOV JEDNODUCHÉ GEOMETRICKÉ TELESÁ A TECHNOLÓGIA ROZŠÍRENEJ REALITY V KURIKULÁLNYCH DOKUMENTOCH NA SLOVENSKU

Marek MOKRIŠ
Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovensko)
marek.mokris@unipo.sk

Abstrakt

Na Slovensku v ostatnom období prebieha kurikulárna reforma. V školskom roku 2025/2026 sú v procese verifikácie záväzne kurikulárne dokumenty, ktoré determinujú vzdelávací proces v matematickej oblasti na predprimárnom a primárnom stupni vzdelávania. Článok sa zameriava na analýzu týchto dokumentov z pohľadu implementácie konceptov jednoduché geometrické telesá a technológia rozšírenej reality do vzdelávacieho procesu detí predškolského a mladšieho školského veku.

Kľúčové slová: kurikulárne dokumenty, geometria, telesá, technológia rozšírenej reality (AR)

ANALYSIS OF CONCEPTS OF ELEMENTARY GEOMETRIC SOLIDS AND AUGMENTED REALITY IN CURRICULUM DOCUMENTS IN SLOVAKIA

Abstract

Slovakia has recently undergone a curriculum reform. In the 2025/2026 school year, binding curriculum documents that determine the educational process in mathematics at the pre-primary and primary levels of education are in the process of verification. This article focuses on analysing these documents from the perspective of implementing the concepts of simple geometric solids and augmented reality technology into the educational process for preschool and early school-age children.

Keywords: curriculum documents, geometry, solids, augmented reality technology (AR)

1. Úvod

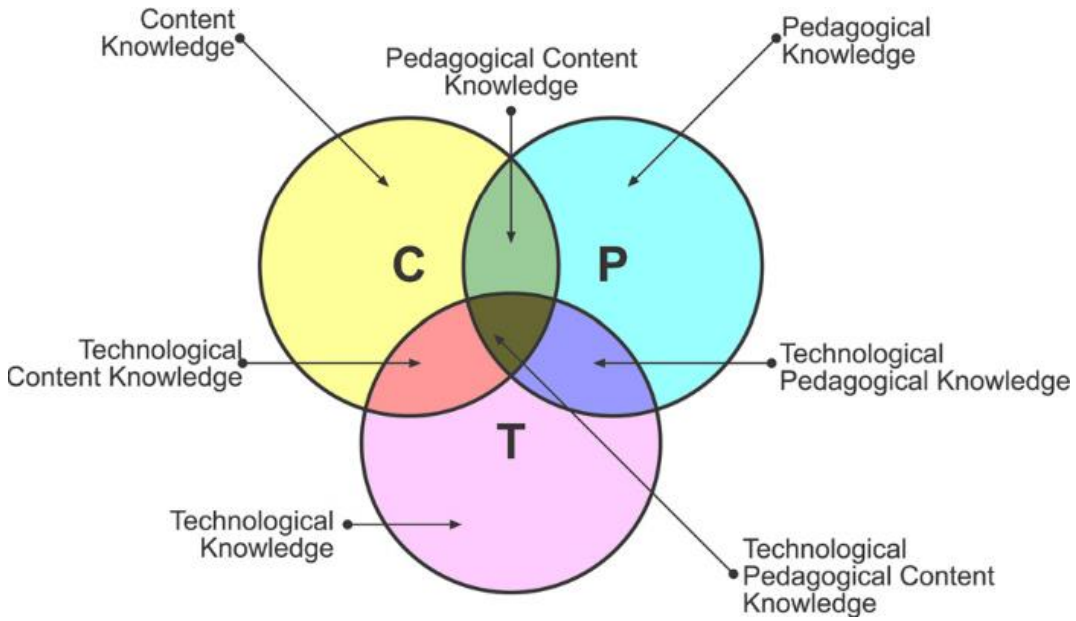
Jednoduché geometrické priestorové útvary (telesá) sú integrálnou súčasťou matematickej (geometrickej) prípravy detí už od predškolského veku. Jednoduché geometrické teleso predstavuje akákoľvek kocka, kváder, valec (kolmý valec), kužeľ (kolmý kužeľ), ihlan (kolmý ihlan) a guľa. Požiadavky kladené na detí, resp. žiakov na úroveň vedomostí a zručností pri práci s týmito geometrickými objektami sú, v podmienkach Slovenska, upravené prostredníctvom záväzných kurikulárnych dokumentov. Tie vo forme výkonových a obsahových štandardov formulujú požiadavky kladené na výkon žiaka príslušnej vekovej kategórie. Dosiahnutie týchto požiadaviek je náplňou práce pedagóga na príslušnom stupni vzdelávania. V tomto kontexte je potrebné, aby učiteľ disponoval vedomosťami a spôsobilosťami v oblasti matematiky a pedagogiky.

Pri inkorporovaní nových prístupov využívajúcich digitálne prostredia sú kladené na pedagógov, okrem požiadaviek na odborné vedomosti a zručnosti, aj nároky z technologickej oblasti – koncept TPACK.

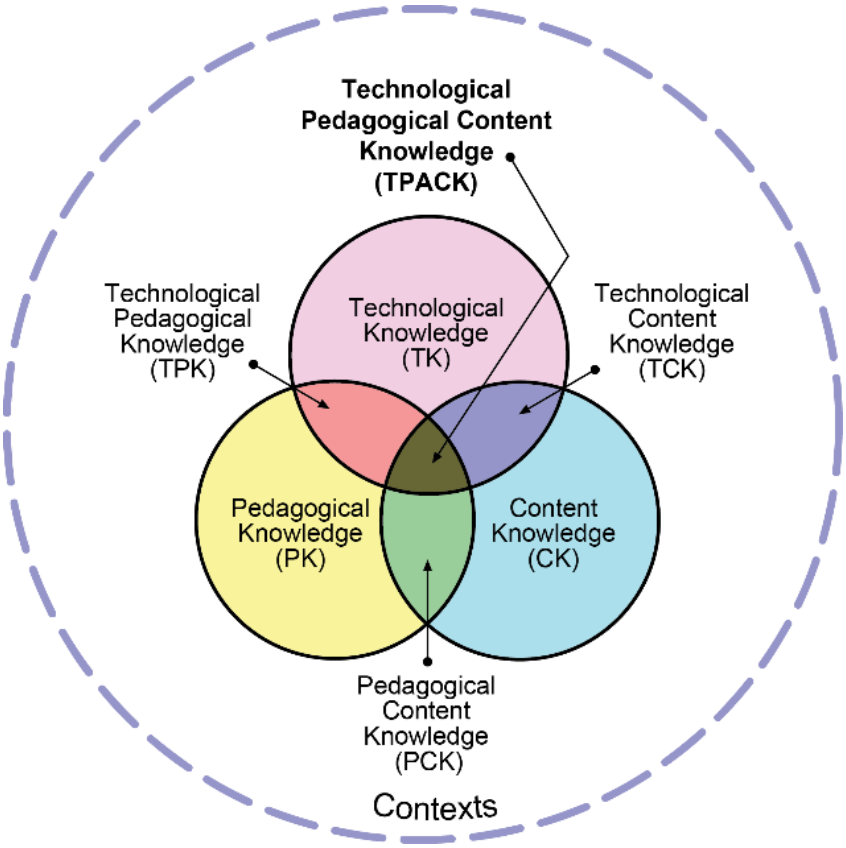
TPACK je vo vedeckej komunite vnímaný ako potrebný teoretický rámec pre dizajnovanie vzdelávania v digitálnom prostredí. TPACK (resp. TPCK) vyvinuli Misha a Koehler v roku 2006 ako odpoveď na absenciu teórie usmerňujúcej integráciu technológií do vzdelávania. Model konceptovo vychádza z konštruktu Pedagogical Content Knowledge (PCK), ktorý bol vyvinutý Shulmanom. (Mishra et al., 2023; Wang et al., 2018; Rosenberg & Koehler, 2015; Binti Muhamad, 2014; Harris & Hofer, 2011; Šimonová et al., 2010; Doering et al., 2009; Koehler et al., 2007; Koehler & Mishra, 2005)

Prvotný model integrácie technológií do vzdelávania TPCK (Obrázok 1) bol upravený na formát TPACK (Obrázok 2), v ktorom sú prezentované jednotlivé zložky:

- CK (Content Knowledge) – vedomosti o obsahu vzdelávania,
- PK (Pedagogical Knowledge) – didaktické kompetencie,
- TK (Technological Knowledge) – vedomosti o technológii a technologické zručnosti,
- PCK (Pedagogical Content Knowledge) – odborovo-didaktické kompetencie,
- TCK (Technological Content Knowledge) – vedomosti a zručnosti v technologickej transformácii obsahu vzdelávania,
- TPK (Technological Pedagogical Knowledge) – vedomosti a zručnosti v technologickej transformácii pedagogického procesu,
- TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) – vedomosti a zručnosti v technologickej transformácii didaktickej interpretácie obsahu vzdelávania.



Obrázok 1. Model TPCK
zdroj: Koehler et al., 2007, s. 742



Obrázok 2. Model TPACK
zdroj: Rosenberg & Koehler, 2015

Technological Knowledge (T resp. TK) zahŕňa rôzne spôsoby, ktoré poskytujú prezentáciu informácií od klasických technológií ako sú učebný text, pracovný list až po pokročilejšie, ako video, applet a pod.. Content Knowledge (C resp. CK) predstavuje kurikulum predmetu, ktorý sa má vyučovať. Pedagogical Knowledge (P resp. PK) zahŕňa to, ako riadiť, inštruovať a viesť študentov. Dôraz je kladený na prepojenie a interakciu medzi jednotlivými zložkami C, P a T.

V ostatnom období sa do popredia aj vo vzdelávaní dostáva technológia rozšírenej reality. Technológia rozšírenej reality (AR) znamená spojenie reálneho sveta s virtuálnymi prostrediami. Umožňuje vizualizovať skutočné aj virtuálne objekty priamo v reálnom prostredí. V kontexte vzdelávania ju možno vnímať ako nástroj, ktorý pomocou vizualizácie v reálnom prostredí podporuje tvorbu a rozvíjanie matematických konceptov, čím zvyšuje efektivitu vzdelávacieho procesu a učenia sa.(Hnatová et al., 2024; Mokriš et al., 2024; Hnatová, 2023; Lipták, 2023; Mokriš et al., 2023; Hnatová, 2022; Prídavková, 2022; Hnatová, 2021)

Nástrojom, ktorý umožňuje implementovať technológiu rozšírenej reality do edukačného procesu je aj softvér Geogebra. Názornosť je jednou z kľúčových zásad aj vo vyučovaní matematiky, ktorú je možné sprostredkovať za pomoci tohto softvérového prostredia. (Wossala et al., 2024; Wossala, 2023)

Aplikácia Geogebra 3D Calculator predstavuje jednu zo zložiek prostredia Geogebra, ktorá okrem iného umožňuje vytvárať applety zamerané na problematiku budovania predstáv o jednoduchých priestorových geometrických útvarov, ich vlastnostiach a vzťahoch medzi nimi. Ak je ambíciou takýto produkt implementovať do vyučovacieho procesu, tento proces si vyžaduje vzájomné prepojenie odborných (matematických), pedagogických a technologických vedomostí a zručností (model TPACK).

2. Ciele a dizajn výskumu

Cieľom príspevku je, na základe analýzy záväzných kurikulárnych dokumentov pre predprimárne a primárne matematické vzdelávanie na Slovensku, identifikovať podmienky na inkorporáciu technológie rozšírenej reality do aktivít využívajúcich jednoduché geometrické priestorové útvary v rámci matematickej prípravy žiakov mladšieho školského veku, resp. detí predškolského veku.

Analýze boli podrobené kurikulárne dokumenty, ktoré v aktuálnom školskom roku 2025/2026 sú implementované vo výchovno-vzdelávacom procese v školských zariadeniach na Slovensku, ktoré sú zaradené do procesu zavádzania kurikulárnych zmien. Pre takéto školské výchovno-vzdelávacie zariadenia platí povinnosť sa riadiť nasledujúcimi kurikulárnymi dokumentami: Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách (MŠVVaŠ SR & NIVAM, 2022), Štátny výchovný program pre školský klub detí (NIVAM, 2022), Štátny vzdelávací program pre základné vzdelávanie (NIVAM, 2023a), Štátny vzdelávací program pre základné vzdelávanie: Vzdelávacia oblasť Matematika a informatika (NIVAM, 2023b) a Minimálne učebné výstupy zo vzdelávacích štandardov (NIVAM, 2025).

Identifikátormi pri analýze vyššie uvedených dokumentov boli tieto kľúčové pojmy: teleso, stavba z kociek, stavba z telies, pohľad na stavbu, plán stavby, kocka, kváder, valec, guľa, kužeľ, ihlan, vrchol, hrana, stena, sieť, digitálne technológie, manipulácia s telesami a rozvíjanie priestorovej predstavivosti. Voľba kľúčových pojmov bola realizovaná na základe pojmovej mapy pre tieto skúmané koncepty: technológia rozšírenej reality, jednoduché priestorové geometrické útvary a žiak/dieťa mladšieho školského, resp. predškolského veku. Analyzované kľúčové pojmy boli zoskupené do navzájom disjuktných množín na základe spoločnej vlastnosti. Vytvorené boli tieto zoskupenia: jednoduché telesá a ich charakteristiky (kocka, kváder, valec, guľa, kužeľ, ihlan, vrchol, hrana, stena, sieť), stavba (stavba z kociek, stavba z telies, pohľad na stavbu, plán stavby, manipulácia s telesami, priestorová predstavivosť) a digitálne technológie.

3. Výskumné zistenia a ich interpretácia

V predprimárnom vzdelávaní na Slovensku je problematika práce s jednoduchými priestorovými útvarmi primárne zakomponovaná do okruhu Geometria a meranie, kde sa deti učia rozpoznávať základné geometrické útvary ako kocka, guľa a valec pomocou zraku a hmatu. Zároveň má dieťa vedieť tieto jednoduché geometrické telesá pomenovať a vymodelovať. Neskôr sa využívajú obrázky a modely na opis ich vlastnosti. Jedným z požadovaných výkonov dieťaťa je aj postaviť stavbu z primeraného množstva stavebnicových dielcov podľa predlohy, podľa pokynov a na danú tému. Manipulatívne činnosti sú aj integrálnou súčasťou tematického okruhu Čísla a vzťahy, kde je napr. prostredníctvom manipulácie potrebné rozdeliť skupinku na dve alebo tri časti s rovnakým počtom. Okruh Práca s informáciami uvádza ako jeden z výkonových štandardov, aby dieťa ovládalo základy práce s digitálnymi technológiami, t. j. vedelo ovládať digitálne hry či používať digitálne animované programy určené pre danú vekovú skupinu.

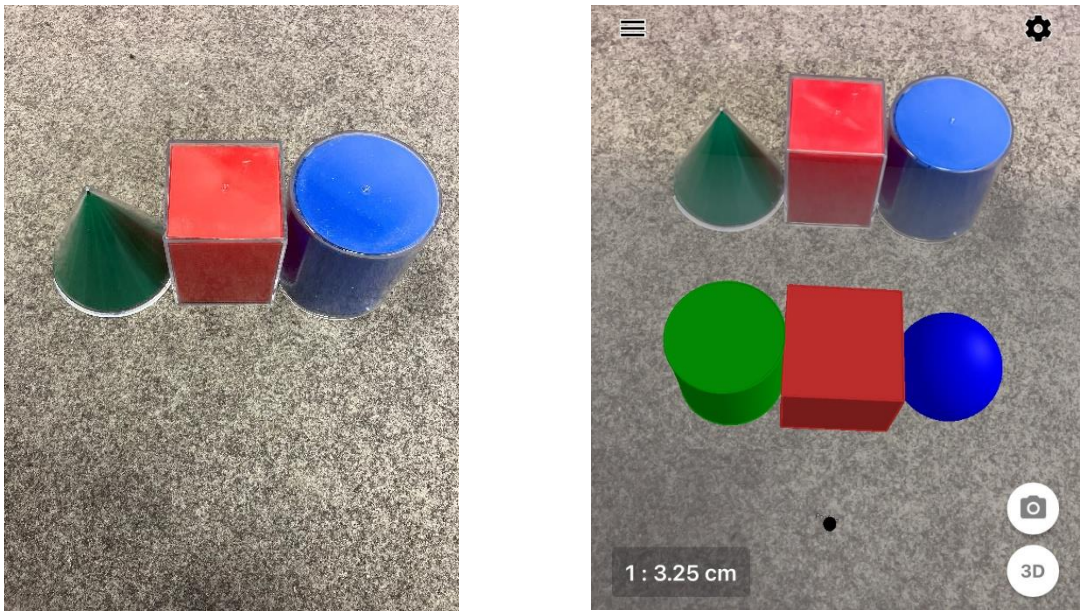
Pre detí predškolského veku je možné, vychádzajúc z taxonómie SAMR (Arantes, 2022; Blundell et al., 2022; Hamilton et al., 2016; Wijaya et al., 2021), implementovať technológiu rozšírenej reality ako pomocný nástroj (úroveň substitúcie) pri identifikácii objektov z reálneho života. V tomto prípade virtuálny model telesa nahradí (úroveň substitúcie) geometrický model ideálneho telesa, ktorý je možné konfrontovať s reálnym objektom z bežného života.

Obrázok 3. Prototyp valca z reálneho života (vľavo), doplnený o plastový model (v strede) a virtuálny model v prostredí s rozšírenou realitou (vpravo)

Hlavným cieľom matematického vzdelávania žiakov mladšieho školského veku je osvojenie základnej matematickej gramotnosti. V rámci prvého cyklu vzdelávania je pozornosť sústredená na to, aby žiaci mali osvojený základný matematický obsah, aktivované prvotné matematické kompetencie, vytvorené základy matematických praktík, matematickej identity a pozitívneho obrazu o význame matematiky. Tieto hlavné ciele majú svoj odraz vo výkonových štandardoch a obsahových komponentoch. Problematika práce s jednoduchými priestorovými geometrickými útvarmi je integrovaná v obsahovom komponente Geometria, v tematickej oblasti Základy skúmania geometrických útvarov v priestore a atomizovaná do komponentov: pojmy, vzťahy, postupy a matematické praktiky. Pre absolventov 1. cyklu vzdelávania (1. až 3. ročník) sa vyžaduje, aby aktívne používali pojmy kocka, kváder (steny, vrcholy a hrany), valec, kužeľ, ihlan, guľa, hranatý, oblý a pasívne: sieť kocky, kvádra, telesa; pohľad zhora, spredu, zboku, plán stavby z kociek. Vzťahová rovina vyžaduje poznanie súvislosti medzi rovinnými a priestorovými útvarmi; vzťah medzi plánom stavby a počtom kociek v stavbe. Na sprístupnenie pojmov a vzťahov je vhodné používať postupy založené na určovaní významných prvkov priestorových útvarov (vrcholy, hrany, steny); rozlišovaní a triedení priestorových útvarov (podľa významných prvkov a vlastností); stavaní stavieb z telies alebo z kociek podľa vzoru (reálna stavba alebo stavba na obrázku), podľa plánu alebo podľa slovného opisu, tvorbe jednoduchého plánu stavby z kociek a tvorbe modelov priestorových útvarov z danej siete. Priestor na implementáciu technológie rozšírenej reality do vzdelávania poskytujú matematické praktiky v kontexte „*používania rôznych techník na modelovanie priestorových geometrických útvarov, korigovanie a kontrolovanie postupu a správnosti riešení, identifikovanie chyby v stavbe alebo pláne a jej opravy, interpretovanie symbolických záznamov stavieb z kociek/telies*“. (NIVAM, 2023b, s. 14)

Aplikácia rôznych techník na modelovanie priestorových útvarov by mala vychádzať z postupov a skúseností, ktoré malo dieťa možnosť aplikovať počas svojej predškolskej prípravy. Ide najmä o modelovanie kocky, valca a gule za pomoci rôznych materiálov, napr. plastelíny. Tento koncept je potom vhodné použiť aj na vytvorenie modelu kvádra, ihlana a kužeľa. Technológia rozšírenej reality je tu využiteľná v podobe kontrolného, resp. substitučného nástroja, kde stavba z telies vytvorená z reálnych modelov telies je nahradená stavbou z virtuálnych modelov, ktoré sú vložené do reálneho prostredia.

Softvérové prostredie GeoGebra disponuje dostatočne robustnými nástrojmi, pomocou ktorých je možné realizovať matematické praktiky zamerané na korigovanie a kontrolu správností riešení, identifikovanie chyby v stavbe alebo pláne a jej opravy (Obrázok 4).



Obrázok 4. Stavba z telies z plastových modelov (vľavo) doplnená o virtuálny model stavby (vpravo) – identifikácia chýb v stavbe z telies s využitím AR technológie

Hlavným cieľom 2. cyklu matematického vzdelávania je, aby žiaci preukázali základy matematickej gramotnosti, disponovali základnými matematickými poznatkami a používali veku a schopnostiam primerané matematické praktiky na riešenie problémov. Oblasť práce s elementárnymi priestorovými geometrickými útvarmi na tento hlavný cieľ reflektuje vo forme dvoch výkonových štandardov: analyzovať zložitejšie geometrické útvary v rovine a priestore, využívať polohové a metrické vlastnosti útvarov pri riešení jednoduchých geometrických úloh a riešiť úlohy na orientáciu v rovine a v priestore a úlohy rozvíjajúce priestorovú predstavivosť. Je možné konštatovať, že v druhom vzdelávacom cykle dochádza ku gradácii požiadaviek na spôsobilosti žiaka – aktívna práca aj s pojmami ihlan, kužeľ a na pasívnej úrovni žiak pracuje s pojmami: sieť kocky, kvádra, telesa, pohľad zhora, spredu, zboku, plán stavby z kociek. V tomto kontexte žiak dokáže rozlišovať, pomenovať a opísať priestorové geometrické útvary pomocou ich významných prvkov a charakteristických vlastností, objavovať súvislosti medzi rovinnými a priestorovými útvarmi a riešiť problémy zaznamenávania jednoduchých stavieb z kociek/telies. Z matematických praktík vhodných na tvorbu matematických reprezentácii je potrebné *aplikovať modelovanie telies, sietí jednoduchých telies a stavieb z kociek a iných telies pomocou stavebníc alebo iných pomôcok (vrátane digitálnych)* (NIVAM, 2023b, s. 26). Za digitálnu technológiou, ktorú je možné a vhodné uplatniť považujeme aj technológiu rozšírenej reality, pomocou ktorej dopĺňame reálny svet o digitálne komponenty. Aplikačným príkladom je vytvorenie stavby z telies v digitálnom prostredí s následnou identifikáciou jednotlivých pohľadov na stavbu.

Problematiku konštrukcie sietí jednoduchých telies je vhodné realizovať pomocou softvéru GeoGebra a pomocou nástroja AR preniesť do reálneho okolia (Obrázok 5). Napríklad na žiacku lavicu umiestnime digitálny model jednoduchého geometrického telesa, následne manipuláciou s vybraným bodom telesa demonštrujeme proces vzniku jeho siete. Potom úlohou žiakov je identifikovať jednotlivé rovinné útvary, z ktorých je sieť daného telesa vytvorená a vytvoriť sieť daného telesa.

Obrázok 5. Modelovanie siete telesa s využitím technológie rozšírenej reality

4. Záver

Analýza záväzných kurikulárnych dokumentov na Slovensku identifikovala gradáciu procesu práce s jednoduchými priestorovými útvarmi počnúc predškolskou prípravou. Absolvent primárneho stupňa vzdelávania pozná jednoduché priestorové geometrické útvary (kocka, kváder, valec, guľa, kužeľ, ihlan), ich významné prvky (vrchol, hrana, stena), dokáže modelovať tieto telesá a siete kocky a kvádra, postaviť stavbu z týchto telies, zaznamenať jej plán a pohľady.

Je možné konštatovať, že kurikulárne dokumenty vytvárajú dostatočný priestor na implementáciu didaktických pomôcok na prácu s jednoduchými priestorovými geometrickými útvarmi (*používanie rôznych techník na modelovanie priestorových geometrických útvarov ...* NIVAM, 2023b, s. 14). V tomto kontexte je možné učivo o geometrických telesách sprístupňovať aj s využitím digitálnych nástrojov, napr. pomocou AR technológie, dynamickej geometrie, ... Technológiu AR je však nutné vnímať ako jednu z rôznych techník na modelovanie priestorových geometrických útvarov, pričom primárnu úlohu vo vzdelávaní žiakov mladšieho školského veku a zvlášť detí predškolského veku by mala predstavovať fyzická manipulácia s modelmi telies. Implementáciu a integráciu technológie rozšírenej reality v práci s jednoduchými priestorovým útvarmi z pohľadu podmienok a požiadaviek uvádzaných v analyzovaných kurikulárnych dokumentoch je možné vidieť v podobe, ktorá technológiu AR sprístupňuje ako vizualizačný a interaktívny nástroj (identifikácia jednoduchých telies v reálnom prostredí, vizualizácia a manipulácia s digitálnymi útvarmi v reálnom prostredí, tvorba stavieb z telies, odkrývanie sieti, resp. rozvinutých plášťov telies, ...).

Použitie technológie rozšírenej reality vo vyučovaní matematiky môže byť veľmi prínosné. Táto technológia pomáha vizualizovať abstraktné koncepty, ako sú napríklad priestorové geometrické útvary a vzťahy medzi nimi a tým podporuje interaktívne učenie, čo zvyšuje motiváciu žiakov vzdelávať sa. Na strane druhej si však vyžaduje zvládnutie a vzájomné prepojenie odborných (matematických a pedagogických) a technologických vedomostí a zručností. Integrácia rozšírenej reality (AR) pri návrhu aktivít s jednoduchými geometrickými priestorovými útvarmi na primárnom stupni vzdelávania na Slovensku ponúka inovatívne možnosti pre zmysluplné a personalizované učenie. Tvorba a inkorporácia vzdelávacích aktivít využívajúcich technológiu rozšírenej reality vo vyučovaní matematiky je oblasťou s veľkým potenciálom pre edukačnú prax.

Acknowledgements

Príspevok je súčasťou riešenia grantového projektu KEGA 024PU-4/2024 *Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika*.

Literatúra

Arantes, J. (2022). The SAMR model as a framework for scaffolding online chat: A theoretical discussion of the SAMR model as a research method during these "interesting" times. *Qualitative Research Journal*, *22*(3), 294–306. https://doi.org/10.1108/QRJ-08-2021-0088

Binti Muhamad, N. A. (2014). Investigating the Roles of Motivation and Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) in Computer-Mediated-Communication (CMC) Speaking Skills Instruction. *International Journal of Applied Linguistics & English Literature*, *3*(2), 112–130. https://doi.org/10.7575/aiac.ijalel.v.3n.2p.112

Blundell, C. N., Mukherjee, M., & Nykvist, S. (2022). A scoping review of the application of the SAMR model in research. *Computers and Education Open*, *3*, 100093. https://doi.org/10.1016/j.caeo.2022.100093

Doering, A., Veletsianos, G., Scharber, C., & Miller, C. (2009). Using the Technological, Pedagogical, and Content Knowledge Framework to Design Online Learning Environments and Professional Development. *Journal of Educational Computing Research*, *41*(issue 3), 319–346.

Hamilton, E., Rosenberg, J., & Akcaoglu, M. (2016). The Substitution Augmentation Modification Redefinition (SAMR) Model: A Critical Review and Suggestions for its Use. *TechTrends*, *60*. https://doi.org/10.1007/s11528-016-0091-y

Harris, J. B., & Hofer, M. J. (2011). Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) in Action. *Journal of Research on Technology in Education*, *43*(3), 211–229. https://doi.org/10.1080/15391523.2011.10782570

Hnatová, J. (2021). Výhody a úskalia inkorporácie „nových" digitálnych technológií do matematickej edukácie. *Elementary Mathematics Education Journal*, *3*(1), 15–24. http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol3No1/Vol3No1_Hnatova.pdf

Hnatová, J. (2022). Komparácia miskonceptov riešenia aplikačnej úlohy z geometrie študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie bez a s použitím technológie rozšírenej reality. In *EDUKACJA I SPOŁECZEŃSTWO VII.* (1. vydanie, s. 133–143).

Hnatová, J. (2023). *Technológia rozšírenej reality v matematickej edukácii: SWOT analýza* (1. vydanie). Vydavateľstvo Prešovskej univerzity. https://www.pulib.sk/web/pdf/web/viewer.html?file=/web/kniznica/elpub/dokument/Hnatova1/subor/9788055531038.pdf

Hnatová, J., Prídavková, A., & Lipták, J. (2024). *Rozšírená realita v primárnej matematickej edukácii: Analýza edukačných aktivít študentov—Budúcich pedagógov* (1. vydanie). Vydavateľstvo Prešovskej univerzity v Prešove. https://www.pulib.sk/web/pdf/web/viewer.html?file=/web/kniznica/elpub/dokument/Hnatova2/subor/9788055533698.pdf

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2005). What Happens When Teachers Design Educational Technology? The Development of Technological Pedagogical Content Knowledge. *Journal of Educational Computing Research*, *32*(2), 131–152. https://doi.org/10.2190/0EW7-01WB-BKHL-QDYV

Koehler, M. J., Mishra, P., & Yahya, K. (2007). Tracing the development of teacher knowledge in a design seminar. *Computers & Education*, *49*(3), 740–762. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2005.11.012

Lipták, J. (2023). Rozšírená realita vo voľnočasovej matematickej edukáci očami študentov predprimárnej a primárnej pedagogiky. *Elementary Mathematics Education Journal*, *5*(2), 17–24. https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No2/Vol5No2_Liptak.pdf

Mishra, P., Warr, M., & Islam, R. (2023). TPACK in the age of ChatGPT and Generative AI. *Journal of Digital Learning in Teacher Education*, *39*(4), 235–251. https://doi.org/10.1080/21532974.2023.2247480

Mokriš, M., Šimčíková, E., & Tomková, B. (2023). Riešenie rovníc v príprave učiteľov elementaristov. *Elementary Mathematics Education Journal*, *5*(2), 25–33. https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No2/Vol5No2_Mokris-Simcikova-Tomkova.pdf

Mokriš, M., Šimčíková, E., & Tomková, B. (2024). Jednoduché priestorové geometrické útvary v prostredí technológie rozšírenej reality. In B. Hlebová & V. Piskura (Ed.), *Transformácia edukácie v predprimárnom, primárnom a špeciálnom vzdelávaní v 21. storočí* (s. 427–431). Prešovská univerzita v Prešove. https://www.pulib.sk/web/kniznica/elpub/dokument/Hlebova4

MŠVVaŠ SR, & NIVAM. (2022). *Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách*. https://www.minedu.sk/data/att/96d/24534.b6f65c.pdf

NIVAM. (2022). *Štátny výchovný program pre školský klub detí*. https://www.minedu.sk/data/att/d7f/27128.154ebb.pdf

NIVAM. (2023a). *Štátny vzdelávací program pre základné vzdelávanie*. Národný inštitút vzdelávania a mládeže. https://www.minedu.sk/data/files/11811_statny_vzdelavaci_program_pre_zakladne-vzdelavanie.pdf

NIVAM. (2023b). *Štátny vzdelávací program pre základné vzdelávanie: Vzdelávacia oblasť Matematika a informatika*. Národný inštitút vzdelávania a mládeže. https://www.minedu.sk/data/files/11820_marematika-a-informatika.pdf

NIVAM. (2025). *Minimálne učebné výstupy zo vzdelávacích štandardov*. Národný inštitút vzdelávania a mládeže. https://www.minedu.sk/data/att/075/28035.c0a044.pdf

Prídavková, A. (2022). Technológia rozšírenej reality a rozvoj matematických schopností. *Elementary Mathematics Education Journal*, *4*(1), 53–63. http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol4No1/Vol4No1_Pridavkova.pdf

Rosenberg, J. M., & Koehler, M. J. (2015). Context and Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK). *Journal of Research on Technology in Education*, *47*(3), 186–210. https://doi.org/10.1080/15391523.2015.1052663

Šimonová, I., Bílek, M., Doulík, P., Poulová, P., & Škoda, J. (2010). *Styly učení v aplikacích eLearningu* (1. vyd.). M&V.

Wang, W., Schmidt-Crawford, D., & Jin, Y. (2018). Preservice Teachers' TPACK Development: A Review of Literature. *Journal of Digital Learning in Teacher Education*, *34*(4), 234–258. https://doi.org/10.1080/21532974.2018.1498039

Wijaya, T. T., Rizki, L. M., Yunita, W., Salamah, U., Pereira, J., Zhang, C., Li, X., & Purnama, A. (2021). Technology Integration to teaching mathematics in Higher Education during Coronavirus Pandemic using SAMR Model. *Journal of Physics: Conference Series*, *2123*(1), 012043. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2123/1/012043

Wossala, J. (2023). Zásada názornosti v matematice s využitím programu Geogebra. *Elementary Mathematics Education Journal*, *5*(2). 77–86. https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No2/Vol5No2_Wossala.pdf

Wossala, J., Stixová, K., Holada, T., & Veselá, V. (2024). Názornost v matematice s využitím aplikace Corinth 3D a Geogebra. *Elementary Mathematics Education Journal*, *6*(2), 34–42. https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol6No2/Vol6No2_Wossala-et-al.pdf

PERCEPTION AND ATTITUDE OF PUPILS TOWARDS THE USE OF EKO-EXCEL TABLET FOR MATHEMATICS LEARNING

Nasrudeen Ayinde MALIK[1], Kennedy Otuniuya AKUDO[2], Adeneye, A. O. AWOFALA[3], Rianot Temitope YUSSUF[1]
[1] National Open University (Nigeria)
[2] Lagos State University of Education (Nigeria)
[3] University of Lagos (Nigeria)
maliknasrudeen@gmail.com, akudooo@lasued.edu.ng, aawofala@unilag.edu.ng, temiyussuf1610@yahoo.com

Abstract

This descriptive survey examines pupils' perception and attitude towards the use of Eko-Excel Tablet for mathematics learning. With the aid of a self-developed questionnaire, the study sampled 419 randomly selected primary-six pupils (aged 8–10) from four public primary schools in Ikorodu Local government area, Lagos State, Nigeria. Cronbach' Alpha value of 0.81 was obtained for the questionnaire. Data analysis was done using percentages and standard deviation. It finds that pupils perceive Eko (Eko-Excel) tablet easy to use but requires unique classroom arrangements and prevents wandering during lesson; though it helps teachers to save more time and effort but makes them lazy in class. It also reveals that pupils are negative in attitude towards the use of the gadget because it makes the teacher to speak less in class which leads to poor concentration in class. Since pupils do not learn at the same rate, it was recommended that Lagos State Ministry of Education Quality Assurance should give teachers more time and fewer topics to be covered; while pupils should be allowed to access and use the gadget for further practice after the normal school hours.

Keywords: Eko-Excel, Pupils' Attitude, Pupils' Perception, Mathematics Learning

1. Introduction

Mathematics is widely regarded by Nigerian primary school teachers as the king of all subjects because it equips learners with the foundational skills needed for problem-solving, logical reasoning, and effective decision-making (Nneji & Alio, 2017). At the primary level, mathematical competence supports pupils' transition to higher grades and underpins cognitive and creative development. Scholars emphasize that mathematics explains the relationships between numerical attributes and real-life situations, helping learners cultivate critical thinking and practical problem-solving abilities (Malik & Salman, 2018). The rapid advancement of technology in the twenty-first century has expanded the ways people access information, communicate, and learn, creating new opportunities to improve the teaching and learning of mathematics (Imoko & Isa, 2015).

Consequently, Mantoro et al. (2017) recommend integrating information and communication technology (ICT) into primary education which has become a priority for educators and policymakers concerned about the quality of mathematics instruction. ICT is viewed as a tool that enhances cost-effectiveness, improves delivery of mathematics instruction, supports teacher development, and exposes learners to diverse learning opportunities (Malik et al., 2020). Studies have shown that ICT can increase classroom

interaction, provide immediate feedback, and support monitoring of pupils' progress. Although Salehi and Salehi (2012) report that ICT does not replace effective teaching, it serves as an important supplement to classroom instruction and can significantly strengthen teaching and learning outcomes.

In Lagos State, these insights informed the creation of the Eko Excellence in Child Education and Learning (Eko-Excel) initiative, launched in 2019 to modernize public primary school education. Building upon earlier reforms, the program seeks to reposition public schools by equipping teachers with digital tools, improving classroom management, and enhancing instructional practices. Central to the initiative is the Eko-Excel tablet, a digital device used by teachers to deliver structured, grade-appropriate lessons containing graphics and timed instructional activities. The tablet provides daily schedules, attendance systems, lesson guides, assessments, and administrative communication. It is connected to the head teacher's network and synchronized with the Lagos State Universal Basic Education Board (SUBEB) dashboard for real-time monitoring of teacher activity, lesson delivery, and pupils' academic progress.

The primary goals of Eko-Excel are to improve learning outcomes, promote digital literacy, support inventive teaching, and prepare pupils for the demands of the modern knowledge-driven world (Olujuwon *et al.*, 2021). The government has invested significantly in teacher training to ensure that educators are equipped with digital pedagogical skills, and over 4,000 teachers from more than 1,000 public basic schools have been trained since 2020. The initiative of Abubakar and Afebuame (2011) represent one of the most ambitious educational reforms in Nigeria and aims to ensure that no child is left behind in acquiring twenty-first-century skills. Perception plays a major role in learning, as pupils' attitudes toward mathematics affect their engagement, understanding, and willingness to participate. Positive engagement describes the level of students' involvement in teaching and learning activities in terms of devotion and effort (Salhab & Daher, 2023). Positive affective engagement refers to how students positively respond to teachers, learning tasks, schools, classmates, and genuinely treasure acquired knowledge. On the other hand, negative affective engagement denotes students' negative reactions in the classroom (Adegbuyi & Sama, 2024). Positive perceptions of mathematics encourage critical thinking and collaboration, while negative perceptions may arise from teacher-related factors, instructional methods, or the learning environment (Hermawan & Tyas, 2018). Despite the adoption of technologies meant to simplify mathematics, many pupils still perceive the subject as difficult and technical, often requiring significant assistance to comprehend concepts (Fraser, 2012).

The introduction of Eko-Excel was intended to address long standing challenges in mathematics education, yet several practical issues persist. Teachers report limitations such as insufficient instructional time, inadequate classroom interaction, and overreliance on pre-programmed lessons that restrict creativity. The tablets' predominantly textual content, limited use of audio features, and lack of opportunities for students to manipulate or interact with the devices reduce engagement. Network or connectivity issues delay lesson delivery, and inaccurate attendance records weaken monitoring. Additionally, instructional radio broadcasts used in some contexts suffer from low audio quality, electricity constraints, and poor reach within large school environments. These constraints create learning gaps, weaken pupil-teacher relationships, and diminish students' ability to complete classroom tasks satisfactorily.

Another notable challenge is the lack of differentiated instruction. Nigerian public schools typically teach large classes with diverse learning abilities, making it difficult to meet individual learning needs. Research has shown that grouping pupils into smaller, ability-based units can significantly improve learning outcomes, particularly in mathematics. Hermawam and Tyas (2018) believe that smaller groups enable teachers to tailor instruction, sustain

pupils' attention, and refine individual learning deficiencies. Although Eko-Excel attempts to standardize instruction across schools, Adu et al. (2014) submit that its rigid structure leaves limited room for such personalized approaches. Historically, mathematics education in Nigeria has evolved from informal tallying systems rooted in traditional societies to a formal curriculum shaped by missionary and colonial influence. Over time, the development of national education policies and curriculum reforms strengthened the role of mathematics in primary education. The Nigerian primary mathematics curriculum now aims to equip pupils with numeracy skills, problem-solving abilities, data interpretation skills, measurement competencies, and spatial awareness. These objectives align with the broader mission of Eko-Excel, which seeks to digitize teaching methods and improve instructional outcomes.

Lagos State's long-standing commitment to educational reform reflects earlier efforts during the administration of Lateef Jakande, who championed accessible public education. The Eko-Excel initiative echoes this legacy by attempting to make quality education equitable through significant investments in teacher development, digital tools, and modernized pedagogy. Through the provision of tablets, smartphones, and digital learning content, the state aims to empower teachers and enhance classroom delivery, particularly in mathematics and literacy. The program also reduces economic barriers to learning through free instructional materials and digital resources. However, concerns remain regarding the effectiveness of tablet-based instruction. Some teachers argue that the system forces them to deliver lessons too quickly, disadvantaging slower learners. Others note that the method does not promote creativity, deep comprehension, or meaningful interaction. The absence of adequate textbooks, unreliable connectivity, and insufficient time for complex subjects like quantitative reasoning further strain instructional quality. Despite these challenges, many teachers still express positive attitudes toward the tablets and acknowledge their potential to improve teaching efficiency.

Research consistently shows that gender does not significantly influence pupils' attitudes or perceptions toward ICT-based instruction, including the use of Eko-Excel devices Jimoh, et al (2020). Studies have found no meaningful differences between male and female pupils in terms of interest, performance, or engagement with digital learning tools (Badmus, 2013; Lalnunfeli, 2015). This suggests that, when effectively implemented, Eko-Excel can support inclusive learning by providing equitable digital opportunities to all pupils. In summary, the Eko-Excel initiative represents a transformative step toward modernizing mathematics education in Lagos State. While it offers numerous benefits, such as teacher empowerment, improved monitoring, and expanded digital access, its impact is limited by structural, technological, and pedagogical constraints. Addressing these challenges is essential for realizing its goal of raising mathematics achievement and fostering positive perceptions of the subject among primary school pupils.

2. Objectives of the study

The main objective of this study was to examine pupils' perceptions of the use of Eko-Excel tablet for effective mathematics learning. It specifically investigates:

i. Pupils' perceptions of the use of Eko-Excel in learning basic school mathematics.
ii. Pupils' attitude towards the use of Eko-Excel in basic school mathematics.
iii. Significant gender difference in pupils' perception of the use of Eko-Excel in learning basic school mathematics.
iv. Significant gender difference in pupils' attitude towards the use of Eko-Excel in learning basic school mathematics

2.1. Research Questions

The following research questions served as guiding principles for the investigation:

i. How do pupils perceive the use of Eko-Excel in learning basic school mathematics?
ii. What are pupils' attitude towards the use of Eko-Excel in basic school mathematics?
iii. Do pupils differ in perceptions towards the use of Eko-Excel in learning mathematics based on gender?
iv. How do pupils differ in attitude towards the use of Eko-Excel in learning mathematics based on gender?

2.2. Participants and instrument

The study employed a descriptive survey research design. The population included all the primary-six pupils (aged 8–10) from Ikorodu Local Government Area of Lagos State. 419 pupils were selected at random, that is, 190 males and 229 females. The questionnaire consists of Sections A, B and C. Section A captured demographic information which include school name and gender, whereas Section B contains 10 items with options Strongly Agree-SA (5), Agree-A(4), Undecided-U(3), Disagree-D(2) and Strongly-disagree-SD(1) on pupils' perception towards Eko-Excel, while C captured 10 items on their attitude towards the use of Eko-Excel for mathematics learning. Using Cronbach' Alpha, the instrument's reliability was evaluated, and an index of 0.81 was obtained, but was validated by three lecturers in mathematics education at Lagos State University of Education. The data from the investigation were analysed using simple percentage and standard deviation.

3. Results

Four hundred and twenty questionnaires were distributed, and four hundred nineteen (419) were successfully retrieved for analysis.

Research Question 1: How do pupils in primary schools perceive using Eko-Excel for learning mathematics?

As depicted in Table 1, the gadget has 37.83% ability to make mathematics experience pleasant; 38.16% teachers' allowance to use marker board; and 37.11% opportunity for further explanation of mathematics topics which are far below the total mean of 57.03%. It also revealed that the respondents already have 61.45% familiarity with Eko Excel tablet prior to its use by their teacher; 62.04% belief that the gadget is easy is to use; 63.03% ability to determine seating arrangement; and 61.38% capacity to prevent pupils from moving about during mathematics class, 62.17% ability to helps the teacher save time and effort; and 61.25% capability to increases mathematics workload, which are all around the total mean score. It further depicted that the tablet has 85.92% ability to make mathematics teachers lazy which is far above the total mean. This implies that the pupils perceived that the gadget has low ability to make mathematics experience more pleasant; discourages the teacher from frequent use of the marker board; and limited time and opportunity for further explanation of difficult mathematics topics. A good number of the pupils are aware of the gadget before its introduction to the class perhaps through school announcement of through teachers' children. The tablet does not require special training on the part of the teacher before being used. It helps the teacher to make proper siting arrangement; prevent pupils from wandering about; and able to manage the allotted time due to increased workload. However, the pupils believe that it produces lazy teachers, since its contents are read only.

Research Question 2: What are the attitudes of basic school pupils towards the use of Eko Excel for learning mathematics?

As shown in table 2, the pupils perceived that Eko-Excel tablet has 38.32% capacity to make them appreciate learning mathematics with the gadget and 38.87% ability to make them achieve better than they do with textbooks, which are far below the total mean of 62.04%. Those within the total mean score include 62.01% capacity to improve concentration among learners; 62.12% encouragement to learn mathematics; 61.47% ability to make them think about mathematics; 62.74% motivation to problem-solve mathematics on their own; 61.90% ability to make them pay more attention to the learning of mathematics; 86.19% ability to make them fail mathematics; 62.01% perception that Eko-Excel tablet does not diverts their attention from class but has 84.77% capacity to make them afraid of the subject. It was therefore concluded that the use of the gadget makes pupils to have low appreciation for mathematics because it makes the teacher to speak less in class and discourages learners from learning with mathematics textbooks; and produced fear of mathematics in them.

Research Question 3. Do pupils differ in perceptions towards the use of Eko-Excel in learning mathematics based on gender?

As depicted in Table 3, the male and female pupils' respectively perceived 37.63% and 85.26% familiarity with Eko-Excel before being introduced by their class teacher (SD: 0.52 & 0.70); 85.79% and 38.29% belief that it is easy to use for learning Mathematics (SD: 0.70 & 0.51); 87.11% and 38.95% agreement that Eko-Excel mathematics class needs special seating arrangement (SD: 0.66 % 0.52); 85.39% and 37.37% assurance that Eko-Excel makes it difficult for pupils to move around in mathematics classroom (SD: 0.66 & 0.51); 85.39% and 38.95% perception that EkoExcel helps the teacher save time and effort (SD: 0.71 & 0.54); 37.89% and 37.76% awareness that Eko-Excel makes Mathematics experience pleasant (SD: 0.51 & 0.51); 85.13% and 86.71% belief that Eko-Excel makes mathematics teachers lazy. (SD 0.70 & 0.68); 37.63% and 84.87% agreement that the use of Eko-Excel increases mathematics workload (SD: 0.51 & 0.69); 37.89% and 36.32% perception that Eko-Excel allows for further explanation of mathematics topics (SD: 0.66 & 0.65); and 38.82% and 37.5% agreement that Eko-Excel allows the use of marker board for learning of maths (SD: 0.54 & 0.54). Obviously, it was concluded that the male and female pupils equally perceived that the gadget makes mathematics experience more pleasant, while teachers get lazier, mathematics topics receive more explanation and marker board is put into use. However, females are more familiar with the gadget before it was introduced in the class, with higher perception that it increases mathematics workload. Interestingly, the males have stronger belief that it is easy to use for learning of mathematics, calls for special class arrangement, makes it difficult for pupils to leave their seat and helps the teacher to save time.

Research Question 4. How do pupils differ in attitude towards the use of Eko-Excel in learning mathematics based on gender?

The outcome in Table 4 shows that the male and female pupils respectively have 37.66% and 86.35% concentration because the teacher talks less while teaching with Eko-Excel (SD: 0.52 & 0.66); 85.70% and 38.54% disposition towards the use of Eko-Excel tablet to encourage learning of mathematics (SD: 0.67 & 0.53); 84.47% and 38.21% external behavior towards Eko-Excel tablet makes them think about mathematics (SD: 0.70 & 0.53); 86.03%

and 39.41% agreement that they prefer Eko-Excel problems solving approach to others when learning mathematics (SD: 0.70 & 0.52); 85.70% and 38.10% concentration when the teacher uses Eko-Excel to teach mathematics (SD: 0.69 & 0.50); 37.34% and 39.30 preference to learn mathematics using Eko-Excel (SD: 0.53 & 0.53); 86.79% and 85.59% agreement that the use of Eko-Excel for learning makes them fail Mathematics (SD: 0.73 & 0.67); 37.12% and 86.90% belief that the use of Eko-Excel tablet for learning mathematics diverts their attention from class (SD: 0.53 & 0.66); 84.55% and 85.04% fear of learning mathematics with Eko-Excel tablet (SD: 0.74 & 0.72); and 37.99% and 39.74% belief that they learn better when learning with Eko-Excel tablet than they do when using textbooks (SD: 0.51 & 0.51).

It was concluded that the male and female pupils are both negative in attitude toward preference to learn mathematics using Eko-Excel and both negative in attitude toward learning mathematics using the gadget than they do using textbooks, both positive in attitude toward failure in mathematics due to the use of Eko-Excel tablet and both positive toward fear of learning mathematics using Eko-Excel. While the males are negative in attitude towards concentration in class for the fact that they believe the teacher talks less while teaching with Eko-Excel, the females are positive in attitude towards the use of the gadget despite having higher belief that the use of Eko-Excel tablet for learning mathematics diverts attention from class. Moreover, only the males are positive that the tablet encourages them to learn mathematics, makes them think about mathematics, motivate them to prefer its use in problem solving and concentrate better in class.

4. Discussions

The findings revealed that male and female elementary school pupils vary in perceptions of the use of Eko-Excel for mathematics learning. This finding is not consistent with that of Adu, Galloway and Olaoye (2014), who discovered that traits like interest, ability, knowledge, attitude, gender and exposure have the potential to boost pupils' positive achievement in the cognitive, psychomotor, and emotional domains of learning but couldn't change their perception and attitude. Jimoh *et al.* (2020) backed up this finding when they discovered that government strategies targeted at incorporating Eko-Excel into curricular delivery frequently failed to account for the influence of the somewhat similar perceptions of male and female end users. The findings also demonstrated that pupils' perception and attitudes regarding the use of Eko-Excel for mathematics learning differ based on gender. The report of Malik *et al.* (2020); Olujuwon *et al.* (2021) corresponded with the conclusions that gender had some influence on pupils' perception and attitudes towards the use of Eko-Excel application. Although, Badmus (2013) found no significant difference in the attitudes of male and female students exposed to the Web Quest on Educational Technology Concepts.

5. Conclusion

The study concluded that the Eko-Excel tablet is easy to use in a specific classroom environment because teachers do not need special training before use; it prevents pupils from straying during classes. However, most pupils were familiar with tablets before being introduced by the teachers. It was also reported that pupils were not motivated by the gadget to appreciate mathematics because it makes the teacher to communicate less in class through the contents that are read only; makes many pupils to fear the learning of mathematics, and makes them to prefer textbook approach to Eko-Excel. Lastly, there were no gender-based differences in the perceptions and attitudes of basic pupils regarding the Eko-Excel tablet.

6. Recommendations

Based on the findings, it was suggested that:

1. The Lagos State Ministry of Education Quality Assurance should make the use of the Eko-Excel tablet more pupils centered for teaching and learning of mathematics.
2. The Lagos State Ministry of Education should give teachers more time and fewer topics to be covered during teaching period, since pupils do not learn at the same rate.
3. Lagos State Government should make the Eko-Excel tablet available for pupils to use after school hours.

Tables

Table 1. Primary school pupils' perception on the use of Eko-Excel for learning mathematics

Items	Mean	SD
1. I am familiar with Eko Excel before being introduced by my class teacher	61.45	0.52
2. Eko Excel is easy to use for learning Mathematics	62.04	0.68
3. Eko Excel mathematics classroom needs special seating arrangement	63.03	0.68
4. Eko Excel makes it difficult for pupils to move around in mathematics class	61.38	0.68
5. Eko Excel helps the teacher save time and effort	62.17	0.70
6. Eko Excel makes Mathematics experience pleasant	37.83	0.52
7. Eko Excel makes mathematics teachers lazy.	85.92	0.72
8. The use of Eko Excel increases mathematics workload	61.25	0.52
9. Application of Eko Excel allows for further explanation of mathematics topics	37.11	0.71
10. The use Eko Excel allows the use of marker board for the learning of maths	38.16	0.52
Avg	57.03	0.63

(Source: Analysis of data from the survey)

Table 2. Primary school pupils' attitude towards the use of Eko-Excel for learning of maths

Items	Mean	SD
1. I concentrate because the teacher talks less while using Eko-Excel to teach maths	62.01	0.68
2. The use of Eko-Excel tablet encourages me to learn Mathematics	62.12	0.52
3. Eko-Excel tablet makes me think about mathematics	61.47	0.52
4. I prefer Eko-Excel problems solving approach to others when learning maths	62.72	0.52
5. I concentrate when the teacher uses Eko-Excel to teach mathematics	61.90	0.52
6. I prefer to learn mathematics using Eko-Excel	38.32	0.52
7. The use of Eko-Excel for learning makes me fail Mathematics	86.19	0.67
8. The use of Eko-Excel tablet for learning maths improves my attention in class	62.01	0.67
9. I am afraid of learning mathematics with Eko-Excel tablet	84.77	0.69
10. I learn better than I do from textbooks when learning with Eko-Excel tablet	38.87	0.53
Avg	62.04	0.58

(Source: Analysis of data from the survey)

Table 3: Basic school pupils' perception towards the use of Eko-Excel tablet by gender

Items	Male		Female	
	Mean	SD	Mean	SD
1. I am familiar with Eko-Excel before being introduced by my class teacher	37.63	0.52	85.26	0.70
2. Eko-Excel is easy to use for learning Mathematics	85.79	0.70	38.29	0.51
3. Eko-Excel mathematics class needs special seating arrangement	87.11	0.66	38.95	0.52
4. Eko-Excel makes it difficult for pupils to move around in mathematics class	85.39	0.66	37.37	0.51
5. Eko-Excel helps the teacher save time and effort	85.39	0.71	38.95	0.54
6. Eko-Excel makes Mathematics experience pleasant	37.89	0.51	37.76	0.51
7. Eko-Excel makes mathematics teachers lazy.	85.13	0.70	86.71	0.68
8. The use of Eko-Excel increases mathematics workload	37.63	0.51	84.87	0.69
9. Eko-Excel allows for further explanation of mathematics topics	37.89	0.66	36.32	0.65
10. Eko-Excel allows the use of marker board for learning of maths	38.82	0.54	37.50	0.54
Avg	66.87	0.62	57.20	0.59

(Source: Analysis of data from the survey)

Table 4. Primary school pupils' attitude towards the use of Eko-Excel for learning of mathematic

Items	Male		Female	
	Mean	SD	Mean	SD
1. I concentrate because the teacher talks less while teaching with Eko-Excel	37.66	0.52	86.35	0.66
2. The use of Eko-Excel tablet encourages me to learn Mathematics	85.70	0.67	38.54	0.53
3. Eko-Excel tablet makes me think about mathematics	84.72	0.70	38.21	0.53
4. I prefer Eko-Excel problems solving approach to others when learning maths	86.03	0.70	39.41	0.52
5. I concentrate when the teacher uses Eko-Excel to teach mathematics	85.70	0.69	38.10	0.50
6. I prefer to learn mathematics using Eko-Excel	37.34	0.53	39.30	0.53
7. The use of Eko-Excel for learning makes me fail Mathematics	86.79	0.73	85.59	0.67
8.. The use of Eko-Excel tablet for learning maths improves my attention in class	37.12	0.53	86.90	0.66
9. I am afraid of learning mathematics with Eko-Excel tablet	84.50	0.74	85.04	0.72
10. I learn better than I do from textbooks when learning with Eko-Excel tablet	37.99	0.51	39.74	0.51
Avg	66.36	0.63	57.72	0.58

(Source: Analysis of data from the survey)

References

Abubakar, R. B., & Afebuame, A. O. (2011). *The Challenges of Mathematics in Nigeria's Economic Goals of Vision 2010*. Keynote address presented at the Annual National Conference of the Mathematical Association of Nigeria Sept. 1–6.

Adegbuyi, J & Sama, R. (2024). The Predictive Power of a Multidimensional Mathematics Engagement Scale on Students' Mathematics Achievement in Ekiti State, Nigeria. *Elementary Mathematics Education Journal, 6*(1), 6–14.

Adu, E.O., Galloway, G., & Olaoye, O. (2014). Teachers' characteristics and students' attitude Towards Economics in secondary schools: students' perspectives. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, *5*(16), 455–462.

Alarcia, Ò. F., & Arco-Bravo, I. (2012). The impact of ICTs on lecturer and student interaction in university education processes. *RUSC. Universities and Knowledge Society Journal*, *9*(2), 31–47.

Badmus, A. M. (2013). *Development and evaluation of a Web-Quest application on educational technology concept for undergraduate students in Nigeria* (Unpublished Doctoral Dissertation). University of Ilorin, Ilorin, Nigeria.

Fraser, M. M. (2012). Once upon a Problem. The Sociological Review, 60(1_suppl), 84–107. https://doi.org/10.1111/j.1467-954X.2012.02118.x

Grabe, M., & Grabe, C. (2007). *Integrating technology for meaningful learning* (5th ed.). Boston, MA: Houghton Mifflin.

Hermawam, S., & Tyas, F. I. W. N. (2018). Pengaruh Nilai Intrinsik, Parental Influence, dan persepsi Mahasiswa Dengan Pendekatan Teori Karier Anne Roe Terhadap Pemilihan karir Sebagai Akuntan Publik Bagi Mahasiswa Akuntansi Universitas Airlangga Surabaya. *JABE (Journal of Applied Business and Economic), 5*(2), 112–129. https://doi.org/10.30998/jabe.v5i2.2111

Imoko, B. I., & Isa, S. A. (2015). *Impact of computer Genus on pupils' achievement in mathematics in primary achievement in mathematics in primary school in Lafia Local Government Area: A tool for technological development*. Proceedings of September 2015 Annual National Conference of the mathematical Association of Nigeria 63–71.

Jimoh, A. S., Bamiro, N. B., Akapo, T. A., Ibrahim, D. A., and Ismail, M.A. (2020). Survey of determinants of the utilization of ICT facilities for instruction in Lagos state secondary schools. *Al-Hikmah Journal of Education*, *7*(2), 42–53.

Lassa, P. N., & Paling, D. (1983). *Teaching mathematics in Nigerian primary schools*. University Press Limited.

Livingstone, S (2012) Critical reflections on the benefits of ICT in education. *Oxford Review of Education*, *38*(1), 9–24. https://doi.org/10.1080/03054985.2011.577938.

Lalnunfeli, D. (2015). *Attitude of students, teachers and community towards sex education at secondary school level in Mizoram*: PhD Thesis, Department of Education, Mizoram University, Aizawl, 31.

Malik, N. A., & Salman, M. F. (2018). Teachers' perceptions of the use of *BridgeIT* mobile application for teaching mathematics at basic schools in Lagos State, Nigeria. Abacus: *The Journal of the Mathematical Association of Nigeria, 43*(1), 25–40.

Malik, N. A., Salman, M. F., Ameen, K. S., & Abdullahi, K. (2020). Basic school pupils' attitude towards the use of *Bridge* mobile application for learning mathematics. *Anatolian Journal of Education, 5*(2), 131–142.

Mantoro. T., Utami, P., Dewanti, R., Yudhi, W.S.A., & Ayu, M.A. (2017). The use of Learning Management Systems (LMS) for college students to become active learner: Constructivism view: *Journal of Computational and Theoretical Nano Science*, *23*(2), 796–800.

Nneji, S. O., & Alio, B. C. (2017). Effect of use of computer animations strategy on secondary school students' achievement and retention in algebra in Enugu State. Abacus: *The Journal of the Mathematical Association of Nigeria, 42*(1), 12–21.

Olujuwon, T., Bamiro, N. B, Akudo, O. K. & Anagun, A. M. (2021). Teachers' Characteristics as Predictor of the Adoption of Eko Excel Pedagogical Innovation in public primary schools in Lagos State, Nigeria: *Journal of educational management and policy analysis 2*(1*),* 14–33.

Salhab, R., & Daher, W. (2023). University students' engagement in mobile learning. *European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education, 13*(1), 202–216.

Salau, M. O. (2000). Analysis of student's enrollment and performance in Mathematics at the senior secondary certificate level. *Journal of curriculum studies, 5&6*(12), 1–8.

Salau, M. O. (2007). Implementing computer studies curriculum in the context of culture of reform at the basic education level: Issues, challenges, and panacea for redress. *Nigerian Journal of Curriculum Studies. 14*(3), 35–46.

Salehi, H., & Salehi, Z. (2012). *Integration of ICT in language teaching: Challenges and barriers*. Proceedings of the 3rd International Conference on e-Education, e-Business.

SCAFFOLDING A ROZŠÍRENÁ REALITA AKO DIDAKTICKÉ PODPORNÉ PROSTRIEDKY PRI POROZUMENÍ MATEMATICKÝCH KONCEPTOV

Mária KUĽHOVÁ, Alena PRÍDAVKOVÁ
Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)
maria.kulhova@smail.unipo.sk, alena.pridavkova@unipo.sk

Abstrakt

V článku sú prezentované čiastkové výstupy výskumu orientovaného na analýzu a tvorbu návrhu didaktického prístupu k rozvoju porozumenia konceptu elementárnej matematiky, konkrétne rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave. Za podporné prostriedky boli zvolené pedagogická stratégia scaffolding a práca s nástrojmi využívajúcimi technológiu rozšírenej reality (Augmented Reality - AR). Teoretické východiská výskumu sú zakotvené v koncepcii scaffoldingu, Brunerovej kognitívnej teórii poznania a v princípoch využitia AR v matematickej edukácii. Predstavený návrh didaktického postupu kombinuje tri fázy scaffoldingu s tromi úrovňami reprezentácií matematických konceptov. Tento prístup využíva gradáciu a postupnosť od konkrétnych modelov ku abstraktným reprezentáciám pojmu. Navrhovaný model demonštruje potenciál didaktickej podpory a technológie rozšírenej reality pre efektívne rozvíjanie porozumenia abstraktných matematických konceptov.

Kľúčové slová: scaffolding, rozšírená realita (AR), matematické koncepty

SCAFFOLDING AND AUGMENTED REALITY AS DIDACTIC SUPPORT TOOLS FOR UNDERSTANDING MATHEMATICAL CONCEPTS

Abstract

The article presents partial outcomes of research oriented towards the analysis and creation of a didactic approach proposal for the development of understanding the concept of elementary mathematics, specifically the developed notation of a natural number in the decimal number system. The pedagogical scaffolding strategy and work with tools using Augmented Reality (AR) technology were chosen as supporting means. The theoretical foundations of the research are anchored in the scaffolding concept, Bruner's cognitive theory of knowledge, and the principles of using AR in mathematics education. The presented proposal of didactic approach combines three scaffolding phases with three levels of mathematical concept representations. This approach uses gradation and progression from concrete models to abstract representations of the concept. The proposed model demonstrates the potential of didactic support and augmented reality technology for the effective development of understanding of abstract mathematical concepts.

Keywords: scaffolding, augmented reality (AR), mathematical concepts

1. Úvod

Vyučovanie je, podľa konštatovania Wooda (1986, 1991, cit. podľa Bliss et al., 1996), komplexný, kognitívne náročný a precízne štruktúrovaný proces. Úlohou učiteľa pritom nie je len sprostredkovať informácie a fakty, ale aj oboznamovať žiakov so spôsobmi analytického myslenia a konceptualizácie poznatkov (Bliss et al., 1996).

V kontexte vyučovania matematiky Chechan et al. (2023) zdôrazňujú, že hlavným cieľom je rozvíjať schopnosti žiakov porozumieť matematickým pojmom a metódam, tvoriť rozličné stratégie riešenia matematických problémov a aplikovať matematické poznatky v reálnych situáciách. Efektívne osvojovanie týchto kompetencií je závislé nielen od obsahu vyučovania, ale aj od spôsobu, akým sa učivo žiakom sprístupňuje.

Jedným z nástrojov efektívneho vyučovania je využívanie rôznych typov reprezentácií konceptov, čo je ukotvené v slovenskom kontexte aj v Štátnom vzdelávacom programe pre základné vzdelávanie z roku 2023. Tento dokument kladie dôraz na využívanie rôznych foriem matematických reprezentácií podľa úrovne abstrakcie. V počiatočných fázach sprístupňovania matematických pojmov je dôležité využívať enaktívne a ikonické reprezentácie pojmov, ako napríklad konkrétne predmety, pomôcky, manipulatívne modely, obrázky, ktoré žiakom umožňujú vytvoriť si prvotné predstavy o pojme. Reprezentácie sa postupne posúvajú na symbolický stupeň, a to do podoby výrazov, rovníc, vzorcov a iných foriem abstrakcie.

S týmto prístupom úzko súvisí aj koncept scaffolding, ktorý predstavuje formu cielenej pedagogickej podpory. Jeho základným princípom je podľa Lewisa (2019) komunikácia so žiakmi na úrovni ich aktuálnych schopností a postupné rozvíjanie ich poznania krok za krokom. Tento prístup funguje ako riadený proces napredovania, pri ktorom učiteľ poskytuje podporu presne tam, kde žiak nie je schopný samostatne zvládnuť daný problém, no zároveň má potenciál sa k tejto úrovni dopracovať.

2. Scaffolding ako pedagogická stratégia

Littleton (2013) prezentuje nezvyčajnú, no výstižnú charakteristiku procesu učenia sa, ktorý prirovnáva k stavbe oblúka. Drevené debnenie, nevyhnutné pri jeho konštrukcii, zohráva síce dôležitú, no len dočasnú úlohu – po dokončení stavby musí oblúk stáť samostatne, hoci bez lešenia by jeho vznik nebol možný. Podobne aj vo vzdelávaní plní scaffolding funkciu dočasnej podpory a usmernenia, ktoré učiteľ poskytuje žiakovi. Podpora sa postupne redukuje a odstraňuje v momente, keď ju žiak už viac nepotrebuje. Na túto predstavu nadväzuje autor Boblett (2012), ktorý chápe scaffolding podobne ako dočasnú konštrukciu. Tú prirovnáva ku konštrukcii podporujúcej a ochraňujúcej stavbu počas jej výstavby, pričom po jej dokončení sa táto opora demontuje.

Scaffolding tak predstavuje didaktickú stratégiu založenú na cielenej, pružnej a flexibilnej podpore, ktorú učiteľ alebo iný skúsený partner poskytuje žiakovi. Podpora tohto typu mu umožňuje zvládnuť úlohy, ktoré by bez pomoci nedokázal riešiť samostatne. Zároveň vytvára priestor pre postupný rozvoj žiakovej autonómie a jeho učebných kompetencií. Koncept scaffoldingu (v preklade „lešenie“) je úzko spätý s prácou autorov Wooda, Brunera a Rossa (1976), ktorí sa touto teóriou zaoberali vo svojich výskumoch.

V štúdii Wood et al. (1976) skúmali interakciu medzi deťmi vo veku troch až piatich rokov a dospelými pri riešení problémových úloh. Na základe svojich zistení identifikovali formu riadenej podpory, ktorú označili ako „lešenie“. Podľa ich definície predstavuje scaffolding štruktúrovaný proces, prostredníctvom ktorého dospelý pomáha dieťaťu zvládnuť úlohy, ktoré presahujú jeho aktuálne schopnosti. Podpora dospelého spočíva v tom, že preberá alebo uľahčuje tie aspekty úlohy, ktoré sú pre dieťa príliš náročné. Vďaka tomu sa dieťa môže sústrediť na tie časti úlohy, ktoré sú v súlade s jeho aktuálnymi kompetenciami. Výsledkom podpory je postupné zvládnutie celej úlohy a posilnenie samostatnosti žiaka.

Na túto myšlienku nadväzujú aj ďalší autori, ktorí ku konceptu scaffoldingu pristupujú podobne. Autori Rojas-Drummond & Mercer (2003) a Stone (1998) charakterizujú scaffolding ako dočasnú podporu žiakovi pri riešení úloh, ktoré presahujú jeho rámec možností. Podobne ako pri stavebnom lešení aj táto pomoc je len dočasná, pretože po zvládnutí určitej úrovne je podpora postupne odstránená. Littleton (2013) navyše zdôrazňuje, že scaffolding predstavuje citlivý a špecifický druh pedagogickej pomoci, ktorej cieľom je priblížiť sa k aktuálnej úrovni kompetencií žiaka a zároveň mu umožňuje posunúť sa k vyššej úrovni vývinu.

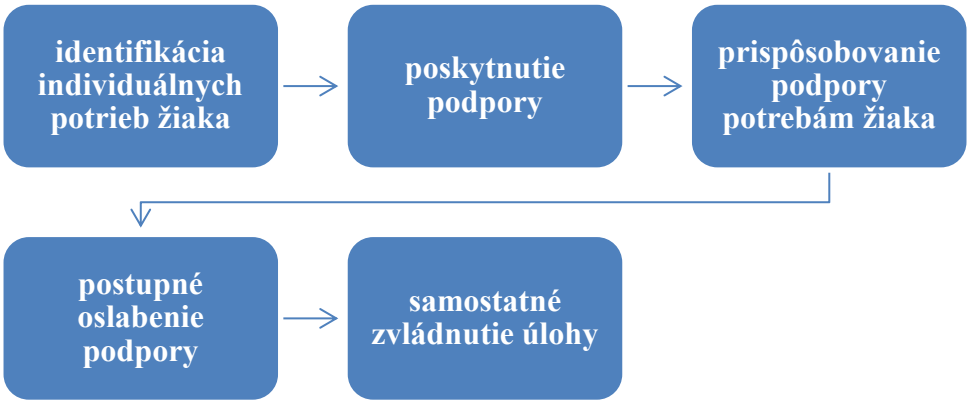
V súlade s týmto chápaním autori Van De Pol et al. (2010) považujú scaffolding za vyučovaciu metódu, ktorá sa môže zamerať na rozvoj dieťaťa vo všetkých jeho aspektoch. Napríklad, ak žiak pracuje na súbore úloh a učiteľ citlivo prispôsobuje mieru podpory podľa porozumenia žiaka, ide o takzvané adaptívne vzdelávanie. Ak žiak dosiahne porozumenie, podpora sa môže postupne zmierňovať. V priebehu znižovania miery podpory učiteľ prenáša zodpovednosť za učenie sa na žiaka, aby si postupne osvojoval väčšiu mieru kontroly nad vlastným učením.

Na tieto myšlienky ďalej nadväzuje autor Reiser (2004) a v rámci konceptu scaffoldingu v interakcii medzi učiteľom a žiakom identifikuje dva kľúčové aspekty:

1. žiakovi je poskytovaná pomoc, čo mu pomáha uspieť v zložitejších úlohách, ktoré by boli pre neho bez podpory príliš náročné;
2. z tejto skúsenosti žiak čerpá pri zlepšovaní sa v porozumení obsahu alebo v procesných zručnostiach.

Výnimočnosť tejto metafory spočíva v zdôraznení cielenej a individuálne prispôsobenej podpory, ktorá sa redukuje postupne, keď ju žiak už nepotrebuje (Palincsar, 1986; Stone, 1998). Vo všeobecnosti môžeme scaffolding chápať ako podporu, ktorú učiteľ poskytuje žiakovi pri vykonávaní úloh, ktoré by sám nedokázal zvládnuť. Jedným z jeho charakteristických znakov je jeho flexibilita – podpora býva označovaná ako prispôsobivá, diferencovaná, citlivá alebo kalibrovaná (Van De Pol et al., 2010). Práve táto flexibilita umožňuje učiteľovi reagovať na meniace sa potreby žiakov a prispôsobovať mieru podpory ich aktuálnym schopnostiam.

Rozsiahla štúdia realizovaná v reálnom školskom prostredí (Van De Pol et al., 2015) poukázala na významné teoretické a praktické súvislosti týkajúce sa implementácie scaffoldingu vo vyučovaní. Podľa autorov je intervencia medzi učiteľom a žiakom, zameraná na prvky scaffoldingu účinným prostriedkom na zvyšovanie úrovne prispôsobenej podpory v procese učenia sa. Zvýšenie efektivity scaffoldingu je možné dosiahnuť tým, že žiakov najprv stimulujeme k vlastnému premýšľaniu o porozumení, ešte pred samotným poskytnutím pomoci zo strany učiteľa. Tento prístup spočíva v kladení otázok, ktoré žiakov vedú k reflexii nad učivom. Výsledky štúdie zároveň naznačujú, že účinnosť scaffoldingu súvisí s mierou nezávislej práce a s úsilím, ktoré žiaci vynaložia.



Obrázok 1. Proces scaffoldingu vo vyučovaní

Na rozdiel od scaffoldingu v stavebníctve, kde je možné opakovane využiť rovnaké konštrukčné prvky pri výstavbe podobných stavieb, scaffolding vo vzdelávaní nepredstavuje pevnú, nemennú štruktúru. Ide o flexibilnú formu podpory, ktorá sa prispôsobuje pokroku dieťaťa s cieľom podporiť jeho rozvoj smerom k väčšej samostatnosti v procese učenia sa (Gonulal & Loewen, 2018).

Táto podpora môže byť realizovaná rôznymi spôsobmi v závislosti od konkrétnych potrieb žiakov. Medzi často uplatňované formy patrí modelovanie ako ukážka postupu riešenia úlohy a kladenie otázok (Van De Pol et al., 2010), ako aj poskytovanie nápovedí, podnetov, modelov čiastočných riešení, priamych inštrukcií či hlasné modelovanie myslenia (Hartman, 2002, ako cituje Wu et al., 2017).

Rôzne formy podpory sa líšia nielen spôsobom realizácie, napríklad prostredníctvom digitálnych nástrojov, papierových materiálov alebo priameho vedenia učiteľom, ale aj podľa typu podpory, ktorá môže byť statická alebo dynamická. Okrem toho sa môže líšiť aj jej zameranie, teda či sa orientuje na kognitívne alebo metakognitívne procesy žiaka (Molenaar et al., 2012). Základné rozdelenie scaffoldingu na statický a dynamický nám umožňuje lepšie porozumieť tomu, ako sa podpora prispôsobuje alebo neprispôsobuje individuálnym potrebám žiaka. Statický scaffolding je podľa autorov trvalý, nemenný a rovnaký pre všetkých (Wu et al., 2017). Príkladom môže byť podľa Molenaar et al. (2012) jednotný súbor pokynov poskytnutý žiakom na vykonanie určitej úlohy. Takáto podpora sa nemení v závislosti od pokroku jednotlivcov. Naopak, dynamický scaffolding predstavuje adaptívny prístup, v ktorom sú po výbere vhodnej formy podpory priebežne sledované schopnosti a správanie žiakov. Na základe analýzy sa im následne poskytuje primeraná pomoc. Tento proces zahŕňa tri základné fázy: diagnostiku, kalibráciu a znižovanie miery podpory. Diagnostika umožňuje identifikovať aktuálnu úroveň vedomostí a potrieb žiaka, kalibrácia zabezpečuje výber najvhodnejšej formy podpory a nakoniec je to postupné znižovanie miery pomoci v súlade so zvyšujúcou sa samostatnosťou žiaka. Keďže diagnostika a kalibrácia prebiehajú cyklicky, tak aj úroveň podpory sa priebežne prispôsobuje (Molenaar et al., 2012).

Uvedené prístupy k scaffoldingu úzko súvisia aj s kognitívnym vývinom žiaka a spôsobom, akým reprezentuje nové poznatky. V tejto súvislosti poskytuje teoretickú oporu Brunerova (1968) teória kognitívneho vývinu, podľa ktorej môže byť poznanie reprezentované tromi spôsobmi: enaktívnym, ikonickým a symbolickým. Každý z týchto spôsobov predstavuje odlišnú úroveň osvojovania poznatkov.

1. Enaktívna reprezentácia
   Reprezentácia je založená na vykonávaní konkrétnych činností a manipulácii s objektmi, prostredníctvom ktorých si žiak vytvára základné mentálne štruktúry. Vo vzdelávacom procese matematiky sa táto úroveň reprezentácie uplatňuje napríklad pri matematických aktivitách, v ktorých žiak manipuluje s konkrétnymi pomôckami: pri sčítavaní a odčítavaní s guľôčkami alebo kockami, ktoré manipuláciou pridáva alebo odoberá zo skupiny alebo pri rozvoji priestorových a geometrických predstáv skladá tvary tangramu.
2. Ikonická reprezentácia
   Je založená na využívaní vizuálnych obrazov, nákresov alebo schém, ktoré slúžia pre znázornenie matematických pojmov bez potreby ich explicitného vysvetlenia. V kontexte matematiky sa tento spôsob reprezentácie prejavuje napríklad pri sčítavaní a odčítavaní, ktoré sú prezentované pomocou číselnej osi alebo pri práci s geometrickými útvarmi, ktoré sú žiakovi sprostredkované v podobe náčrtov.

3. Symbolická reprezentácia
   Využíva jazyk a súbor abstraktných symbolov a výrokov na vyjadrenie matematických pojmov a vzťahov podľa určitých pravidiel. Žiak na tejto úrovni pracuje s matematickými symbolmi a znakmi bez potreby manipulácie s objektmi alebo obrázkami. V matematike môže ísť napríklad o zápis aritmetických operácií pomocou symbolov: 15 + 8 = 23 alebo pri použití symbolických označení v geometrii, ako sú body A, B, C a označenie uhlov či úsečiek.

Tieto reprezentácie zohrávajú významnú úlohu pri plánovaní vhodných foriem scaffoldingu v súlade s aktuálnym školským kurikulom, keďže umožňujú učiteľom zohľadniť rôzne vývinové štádia poznávania a tým lepšie prispôsobovať podporu individuálnym potrebám žiakov.

2.1. Rozšírená realita ako edukačný nástroj

Technológie zohrávajú v matematickej edukácii čoraz dôležitejšiu úlohu, keďže poskytujú nové možnosti pre modelovanie a prácu s abstraktnými konceptmi. Ich efektívne využitie vo výučbe si však vyžaduje, aby učitelia disponovali primeranými digitálnymi zručnosťami a odbornými vedomosťami, ktoré im umožnia technológie cielene prepájať s matematickým obsahom (Prídavková, 2022).

Rozšírená realita (AR) predstavuje inovatívny edukačný nástroj, ktorý má potenciál zásadne ovplyvniť spôsob výučby matematiky. Jej využitie prekračuje hranice tradičného transmisívneho prístupu a umožňuje vytváranie interaktívneho, vizuálne bohatého a dynamického prostredia podporujúceho lepšie porozumenie učiva. AR dokáže vďaka schopnosti vizualizácii zložitých a abstraktných matematických javov zvýšiť motiváciu žiakov, podporiť ich angažovanosť a zároveň umožniť personalizovanejšie učenie (Hnatová et al., 2024).

Potenciál AR sa neprejavuje len pri tvorbe gradovaných úloh, ale aj v samotnom procese ich riešenia, verifikácie a kontroly správnosti výsledkov. Didaktické prostriedky využívajúce AR nástroje možno efektívne integrovať do riešenia matematických úloh v troch základných fázach vyučovacieho procesu:

1. vstupná fáza – príprava úloh s rôznou mierou náročnosti podľa stupňa gradácie;
2. proces riešenia – vizualizácia a modelovanie riešiteľského postupu;
3. výstupná fáza – overenie správnosti riešenia a verifikácia vytvoreného modelu (Prídavková, 2022)

V nasledujúcej časti sa zameriame predovšetkým na využitie AR v procesnej fáze riešenia úlohy, konkrétne prostredníctvom softvéru GeoGebra. Cieľom je vizualizácia a interaktívne modelovanie, ktoré môže slúžiť na podporu pochopenia matematických vzťahov.

3. Podporné stratégie pri budovaní porozumenia desiatkovej číselnej sústavy

Číselná sústava je matematický systém, ktorý využíva znaky, symboly a presne stanovené pravidlá, ktoré umožňujú zápis čísel a vykonávanie aritmetických operácií (Kuzma & Reiterová, 2011).

Jej princíp môžeme žiakom jednoducho priblížiť pomocou modelu, napríklad zoskupením prvkov množiny s počtom 127. Najskôr prvky zoskupíme do skupín po desať; vzniknú tak desiatky (v danom prípade ich bude 12 a sedem jednotiek ostane nezoskupených). Desiatky zoskupíme po desať, čím získame jednu stovku (dve desiatky ostanú nezoskupené). Takéto usporiadanie pomáha žiakom jednoduchšie vnímať počet prvkov a vytvárať si jasnejší obraz o veľkosti množiny (Šedivý & Križalkovič, 1990).

V rámci vyučovania matematiky je zdôraznený rozklad čísla. Napríklad číslo 127 môžeme rozložiť na súčet 100 + 20 + 7, teda na stovky, desiatky a jednotky. Riešenie podobných úloh žiakom umožňuje lepšie pochopiť zápis prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave, teda že číslo je tvorené stovkami, desiatkami a jednotkami.

Zápis prirodzeného čísla sa vo vyučovaní matematiky realizuje prostredníctvom viacerých úrovní abstrakcie. Uplatňujú sa modely využívajúce manipuláciu s reálnymi predmetmi, grafické modely až napokon symbolické zápisy (Hnatová et al., 2024). Predtým než žiak dosiahne najvyššiu úroveň abstrakcie, je vhodné aplikovať podporné stratégie, ktoré mu uľahčia prechod od konkrétneho k abstraktnému zápisu.

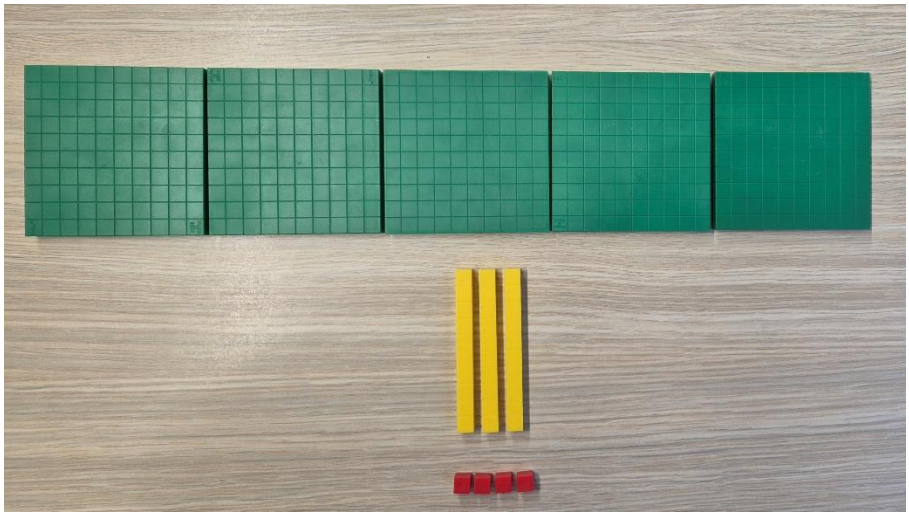
V nasledujúcej časti predstavíme ukážku návrhu aplikácie scaffoldingu vo vyučovaní matematiky. Pozornosť sústredíme na poskytnutie rôznych foriem podpory, ktoré tvoria východisko pre dynamický scaffolding pri zavádzaní rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave. Koncept scaffoldingu uplatníme prostredníctvom jeho troch základných fáz: diagnostiky, kalibrácie a následného znižovania miery poskytovanej podpory.

V rámci úvodnej fázy, diagnostiky, bude využitá enaktívna reprezentácia, ktorej fundamentom je manipulatívna činnosť žiaka. Počas kalibrácie sa podľa individuálnych potrieb žiaka presunieme k ikonickej forme podpory sprostredkovanej prostredníctvom softvéru GeoGebra. Postupné znižovanie miery podpory následne vedie k prechodu na symbolickú reprezentáciu a k narastajúcej samostatnosti žiaka pri riešení zadanej úlohy.

3.1. Enaktívna reprezentácia a jej didaktické uplatnenie

Ako uvádza Bruner (1968), v prvej fáze poznania sa uplatňuje enaktívna (aktívna) reprezentácia. Podpora je žiakovi poskytovaná využívaním konkrétnych učebných pomôcok, prostredníctvom ktorých si môže matematické koncepty vymodelovať. Kľúčovou pomôckou môže byť počítadlo, ktoré žiakovi umožňuje haptickú manipuláciu a zároveň vizualizáciu číselných hodnôt v desiatkovej sústave – stovky, desiatky a jednotky prirodzeného čísla. Ďalším významným didaktickým nástrojom sú Dienesové bloky, ktoré aktivizujú detskú predstavivosť a umožňujú žiakovi vytvoriť si vizuálnu predstavu čísla. Takto získavajú porozumenie vzťahov medzi stovkami, desiatkami a jednotkami.

Ako príklad možno uviesť úlohu, v ktorej žiak modeluje číslo 534 použitím troch doštičiek (stovky), dvoch hranolčekov (desiatky) a štyroch malých kociek (jednotky). Manipuláciou s týmito pomôckami si žiak vytvára konkrétny a vizuálny model daného čísla.



Obrázok 2. Ukážka čísla 534 prostredníctvom Dienesových blokov

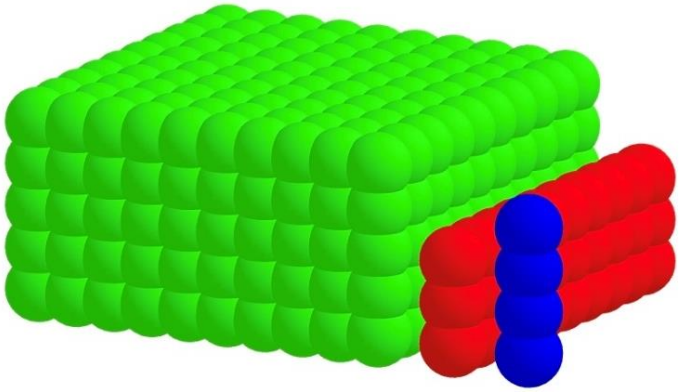
Okrem počítadla a Dienesových blokov je v rámci podporných stratégií na tejto úrovni možné zaradiť aj rôzne matematické hry, kartičky, prvky aktívnej matematiky či drobné predmety, ktoré slúžia na znázornenie stoviek, desiatok a jednotiek.

3.2. Ikonická reprezentácia

V prostredí softvéru GeoGebra je možné prostredníctvom rozšírenej reality (AR) a využívania appletov vytvárať enaktívne reprezentácie matematických pojmov. Žiaci tak môžu s konceptmi aktívne manipulovať vo virtuálnom priestore, čím sa zvyšuje efektivita osvojovania poznatkov (Prídavková, 2022).

Dynamická simulácia rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave, ktorá využíva AR technológiu, vychádza z analogického reprezentovania prostredníctvom Dienesových blokov (Hnatová et al., 2024). Tento prístup prepája manipulatívnu a grafickú podporu pri osvojovaní matematických konceptov.

Na tvorbu modelov môžu žiaci využívať rôzne objekty, ako napríklad kocky či guľôčky. V prostredí aplikácie GeoGebra 3D Graphing Calculator je možné vytvorený model zobraziť v reálnom priestore, čím sa uľahčuje budovanie predstáv o abstraktných pojmoch. Zároveň je možné model integrovať do rozšírenej reality a prezerať ho z rôznych uhlov pohľadu, čo ešte viac podporuje rozvoj koncepčného myslenia.



Obrázok 3. Ukážka vytvoreného modelu čísla 534 v aplikácii GeoGebra 3D

3.3. Symbolická reprezentácia

Na zabezpečenie efektívneho scaffoldingu je nevyhnutné, aby učiteľ využíval stratégie flexibilne prispôsobené reakciám žiaka. Postupom času musí byť miera poskytovanej podpory znižovaná, čím sa zvyšuje miera zodpovednosti žiaka za splnenie zadaných úloh (Van De Pol et al., 2010).

Po fáze manipulatívnej a grafickej podpory nasleduje najvyššia úroveň, ktorou je samostatná práca žiaka spojená so symbolickou reprezentáciou. V tejto fáze sa od žiaka očakáva určitá miera samostatnosti, ktorá sa prejavuje pri riešení úloh v pracovnom zošite, pracovnom liste alebo učebnici. Na základe predchádzajúcej podpory by žiak mal byť schopný správne zapísať prirodzené číslo – napríklad číslo 534 rozložiť na 500 + 30 + 4 a zároveň určiť, že číslo obsahuje päť stoviek, tri desiatky a štyri jednotky.

Takto koncipovaný postup umožňuje prechod od konkrétnych konceptov k abstraktným reprezentáciám prirodzených čísel.

4. Záver

Príspevok má charakter teoreticko-aplikačnej štúdie. Jeho cieľom je na základe analýzy odbornej literatúry navrhnúť didaktický postup využiteľný pri zavádzaní rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave, prostredníctvom pedagogickej podpory nazývanej scaffolding a technológie rozšírenej reality.

Východiskom bola obsahová analýza domácich a zahraničných odborných zdrojov, ktoré sa sústreďujú na tri kľúčové oblasti:

- scaffolding ako forma prispôsobenej pedagogickej podpory,
- Brunerova kognitívna teória poznania,
- možnosti využitia technológie rozšírenej reality v matematickej edukácii.

Získané poznatky boli následne syntetizované s cieľom vytvoriť model, ktorý prepája tri fázy scaffoldingu (diagnostika – kalibrácia – znižovanie miery podpory) s tromi úrovňami reprezentácie poznania (enaktívna, ikonická, symbolická).

Modelové situácie boli navrhnuté tak, aby reflektovali proces postupnej abstrakcie pri učení sa matematiky a zároveň umožňovali učiteľovi flexibilne reagovať na individuálne potreby žiakov prostredníctvom adaptívne poskytovanej podpory.

Pre rozpracovanie navrhovaného didaktického postupu bola vybraná tematická oblasť prirodzených čísel v desiatkovej číselnej sústave. Tá je vhodná pre gradáciu poskytovanej podpory, keďže vyžaduje prechod od konkrétnej manipulácie k abstraktnému zápisu a zároveň poskytuje priestor pre efektívne využitie rozšírenej reality pri vizualizácii matematických pojmov. Modelové situácie demonštrujú, ako učiteľ môže prepájať manipulatívne činnosti, ikonické zobrazenia v prostredí GeoGebry a symbolický zápis s cieľom podporiť porozumenie konceptu rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave.

Scaffolding sa javí ako kľúčová didaktická stratégia vo vyučovaní matematiky, pretože umožňuje žiakom zvládnuť úlohy, ktoré by samostatne nedokázali riešiť a zároveň ich podporuje väčšiu samostatnosť v riešení. Kombinácia podpory, primeraných reprezentácií a technológií rozšírenej reality môže výrazne prispieť k porozumeniu abstraktných matematických konceptov.

Acknowledgements

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 024PU-4/2024 *Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika*.

Literatúra

Bliss, J., Askew, M., & Macrae, S. (1996). Effective teaching and learning: Scaffolding revisited. *Oxford Review of Education*, *22*(1), 37–61. https://doi.org/10.1080/0305498960220103

Boaler, J. (2016). *Matematické nastavenie mysle* (P. Briatka, Prekl.). Tatran.

Boblett, N. (2012). Scaffolding: Defining the metaphor. Wroking papers in TESOL & *Applied Linguistics*, *12*(2), 1–16. Dostupné z https://journals.library.columbia.edu/index.php/SALT/article/view/1357

Borošová, M. (1999). *Metodika vyučovania matematiky na 1. stupni základných škôl* (1. vyd.). Prešov: Náuka – Gustáv Moško.

Bruner, J. S. (1968). *O podstate a problémoch vyučovania*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Gonulal, T., & Loewen, S. (2018). Scaffolding technique. In J. I. Liontas (Ed.), *The TESOL Encyclopedia of English Language Teaching* (1. vyd., s. 1–5). Wiley. https://doi.org/10.1002/9781118784235.eelt0180

Hnatová, J., Prídavková, A., & Lipták, J. (2024). *Rozšírená realita v primárnej matematickej edukácii: Analýza edukačných aktivít študentov – budúcich pedagógov*. Prešov: Prešovská univerzita v Prešove.

Chechan, B., Ampadu, E., & Pears, A. (2023). Effect of using Desmos on high school students' understanding and learning of functions. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(10), em2331. https://doi.org/10.29333/ejmste/13540

Kuzma, J., & Reiterová, M. (2011). *Matematika základnej školy v kocke – príprava na prijímacie skúšky na stredné školy* (1. vyd.). Bratislava: Vydavateľstvo Príroda.

Lewis, B. (2019). Scaffolding instruction strategies. *ThoughtCo*. Dostupné z https://www.thoughtco.com/scaffolding-instruction-strategies-2081682

Littleton, K. (2013). Adaptation and authority in scaffolding and teacher–student relationships. *Learning, Culture and Social Interaction*, *2*(1), 52–55. https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2013.01.003

Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky. (2023). *Štátny vzdelávací program pre základné vzdelávanie*. Dostupné z https://www.statpedu.sk/ sk/svp/statny-vzdelavaci-program/

Molenaar, I., Roda, C., Van Boxtel, C., & Sleegers, P. (2012). Dynamic scaffolding of socially regulated learning in a computer-based learning environment. *Computers & Education*, *59*(2), 515–523. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.12.006

Palincsar, A. S. (1986). The role of dialogue in providing scaffolded instruction. *Educational Psychologist*, *21*(1–2), 73–98. https://doi.org/10.1080/00461520.1986.9653025

Prídavková, A. (2022). Technológia rozšírenej reality a rozvoj matematických schopností. *Elementary Mathematics Education Journal, 4*(1). Dostupné z https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol4No1/Vol4No1_Pridavkova.pdf

Reiser, B. J. (2004). Scaffolding complex learning: The mechanisms of structuring and problematizing student work. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(3), 273–304. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1303_2

Rojas-Drummond, S., & Mercer, N. (2003). Scaffolding the development of effective collaboration and learning. *International Journal of Educational Research*, *39*(1–2), 99–111. https://doi.org/10.1016/S0883-0355(03)00075-2

Stone, C. A. (1998). The metaphor of scaffolding: Its utility for the field of learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *31*(4), 344–364. https://doi.org/10.1177/002221949803100404

Šedivý, O., & Križalkovič, K. (1990). *Didaktika matematiky: Pre štúdium učiteľstva 1. stupňa základnej školy.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Van De Pol, J., Volman, M., & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher–student interaction: A decade of research. *Educational Psychology Review*, *22*(3), 271–296. https://doi.org/10.1007/s10648-010-9127-6

Van De Pol, J., Volman, M., Oort, F., & Beishuizen, J. (2015). The effects of scaffolding in the classroom: Support contingency and student independent working time in relation to student achievement, task effort and appreciation of support. *Instructional Science*, *43*(5), 615–641. https://doi.org/10.1007/s11251-015-9351-z

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *17*(2), 89–100. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x

Wu, C.-H., Chen, Y.-S., & Chen, T. (2017). An adaptive e-learning system for enhancing learning performance: Based on dynamic scaffolding theory. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(3). https://doi.org/10.12973/ejmste/81061

MOŽNOSTI A LIMITY LLM V GEOMETRICKÉ PŘÍPRAVĚ BUDOUCÍCH UČITELŮ 1. STUPNĚ ZÁKLADNÍCH ŠKOL

Květoslav BÁRTEK, Eva BÁRTKOVÁ, David NOCAR
Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)
kvetoslav.bartek@upol.cz, eva.bartkova@upol.cz, david.nocar@upol.cz

Abstrakt

Článek analyzuje možnosti a limity využití modelů GPT-4o, Microsoft Copilot a Gemini 2.0 Flash v geometrické přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ. Výzkum se zaměřil na schopnost AI generovat metodické podklady v oblastech trojúhelníkové nerovnosti a inkluzivního pojetí klasifikace objektů (čtverec jako obdélník).

Výsledky potvrzují vysokou logickou integritu modelů při detekci logických nesrovnalostí, což z nich činí efektivní nástroj pro brainstorming a přípravu podkladů. Limitem zůstává didaktická terminologie ovlivněná anglosaskou symbolikou a potenciální riziko izolovaného chápání pojmů u méně pokročilých modelů. Studie zdůrazňuje nutnost rozvoje kompetencí TPACK; role studenta se mění z tvůrce na expertního korektora garantujícího kvalitu výstupů pro českou školní praxi.

Klíčová slova: umělá inteligence (AI), velké jazykové modely (LLM), logická integrita, inkluzivní pojetí pojmů, TPACK, geometrická prekoncepce, konstrukční geometrie

OPPORTUNITIES AND LIMITS OF LLMS IN THE GEOMETRIC PREPARATION OF PRE-SERVICE PRIMARY SCHOOL TEACHERS

Abstract

The article analyzes the potential and limits of GPT-4o, Microsoft Copilot, and Gemini 2.0 Flash in the geometric preparation of pre-service primary teachers. The research focuses on AI's ability to generate materials for teaching triangle inequality and inclusive concept classification. Results confirm the high logical integrity of the models in detecting mathematical contradictions. Limitations include terminology influenced by Anglo-Saxon conventions and the risk of isolated understanding of concepts. The study emphasizes developing TPACK competencies; the student's role shifts from creator to expert proofreader ensuring the quality of AI outputs for Czech educational practice.

Keywords: Artificial Intelligence (AI), Large Language Models (LLM), Logical Integrity, Inclusive Concept Classification, TPACK Framework, Geometrical Misconceptions, Constructive Geometry.

1. Úvod

Nástup velkých jazykových modelů (Large Language Models, LLM) do oblasti vzdělávání představuje jednu z nejvýznamnějších technologických změn v didaktice za poslední desetiletí. V kontextu vysokoškolské přípravy budoucích učitelů 1. stupně základních škol se tyto

nástroje, jako jsou ChatGPT, Copilot, Claude či Gemini, stávají stále častěji využívaným doplňkem samostudia a přípravy na výuku. Specifikem učitelství pro primární stupeň je přitom nutnost transformovat komplexní matematické znalosti do didakticky uchopitelných a věcně správných forem.

Matematická složka přípravy budoucích učitelů je v tomto směru klíčová. Geometrie, jako jedna z hlavních oblastí primární matematiky, klade vysoké nároky nejen na precizní terminologii, ale především na schopnost algoritmického myšlení při konstrukčních úlohách. Zatímco v aritmetických úlohách mohou LLM vykazovat vysokou míru úspěšnosti díky integraci výpočetních modulů, v oblasti elementární geometrie narážejí na své limity. Tyto limity jsou dány především textovou povahou modelů, které postrádají reálnou prostorovou představivost a vizuální ukotvení geometrických objektů v rovině.

Předkládaný článek se zaměřuje na kritickou analýzu věcné správnosti výstupů tří vybraných LLM modelů při generování materiálů pro výuku elementární geometrie. Výzkumným záměrem není pouze zhodnotit aktuální technickou vyspělost těchto nástrojů, ale především upozornit na rizika spojená s jejich nekritickým využíváním v pregraduální přípravě. Pokud budoucí učitelé využívají AI jako kognitivní nástroj k osvěžení vlastních znalostí, stává se věcná správnost (tzv. mathematical correctness) a didaktická integrita generovaného obsahu klíčovým faktorem pro kvalitu budoucí výuky a prevenci vzniku matematických miskoncepcí u žáků mladšího školního věku.

Cílem studie je prostřednictvím komparativní obsahové analýzy identifikovat typické chyby a halucinace, kterých se modely v oblasti elementární geometrie dopouštějí a navrhnout doporučení pro efektivní a bezpečné zapojení těchto nástrojů do didaktické přípravy studentů učitelství.

2. Teoretická východiska

2.1. Role technologií v přípravě budoucích učitelů

V procesu pregraduální přípravy učitelů primárního stupně již není otázkou, zda technologie využívat, ale jak je integrovat smysluplně a s ohledem na didaktické cíle. Jedním z nejcitovanějších teoretických modelů, který tento proces popisuje, je rámec TPACK (*Technological Pedagogical Content Knowledge*). Tento model zdůrazňuje, že efektivní výuka s technologiemi nevyžaduje pouze izolované znalosti obsahu (matematiky), pedagogiky a technologií, ale především jejich dynamické propojení (Koehler et al., 2013).

Rámec TPACK zdůrazňuje technologické znalosti (TK), tedy konkrétních nástrojů, softwaru a hardwaru, pedagogické či didaktické znalosti (PK), tedy způsobů řízení výuky, vyučování a vedení žáků, a obsahové znalosti (CK), tedy oboru či vyučovaného učiva. Tyto oblasti se spojují a vytvářejí technologicko-pedagogické znalosti (TPK), které se týkají vztahu mezi technologiemi a pedagogickými postupy; pedagogicko-obsahové znalosti (PCK), zaměřené na pedagogické postupy a vzdělávací cíle; a technologicko-obsahové znalosti (TCK), které se týkají technologií a vzdělávacích cílů (Rosenberg & Koehler, 2015).

V kontextu velkých jazykových modelů (LLM) dochází k zásadnímu posunu v nahlížení na složku technologické znalosti (TK). Tradiční digitální nástroje, jako je dynamický geometrický software GeoGebra, jsou ve své podstatě stabilní a „průhledné“, neboť vyžadují od učitele aktivní ovládání specifických funkcí pro rýsování. Naproti tomu digitální technologie typu LLM jsou, slovy Koehlera a Mishry (2013), „protean, unstable, and opaque“ (všestranné, nestabilní a neprůhledné). LLM modely vystupují v roli autonomního generátoru obsahu, čímž zásadně redefinují průnik technologické a obsahové složky (TCK).

Zásadním východiskem této práce je, že efektivita didaktické transformace je přímo závislá na stabilitě složky obsahové znalosti (CK). Koehler, Mishra a Cain (2013) dále uvádějí, že technologie mají své specifické limity (*constraints*), které mohou ovlivnit reprezentaci

obsahu. Pokud budoucí učitel využije LLM k přípravě konstrukčního postupu, ale model vygeneruje matematicky chybný krok, dochází k destabilizaci celého rámce TPACK. V takovém případě technologie neusnadňuje učení, ale aktivně přispívá k tvorbě odborných chyb a didaktických miskoncepcí.

Pro budoucího učitele 1. stupně je tedy klíčovou kompetencí tzv. kritická technologicko-obsahová znalost. Ta nespočívá pouze v dovednosti vygenerovat pracovní list pomocí promptu, ale v následné validaci věcné správnosti generovaného obsahu. Učitel se zde stává „designérem“ kurikula (Koehler et al., 2013), který musí identifikovat oblasti, kde technologie přestává být matematicky přesná. V praxi to znamená, že učitel:

1. *Rozumí limitům nástroje:* Vnímá LLM jako pravděpodobnostní prediktory textu, které jsou ze své podstaty náchylné k halucinacím (Frieder et al., 2023).
2. *Provádí věcnou validaci:* Automaticky podrobuje každý výstup expertní kontrole dříve, než jej předloží žákům.
3. *Detekuje skryté chyby:* Identifikuje větší i drobná metodická pochybení, například záměnu inkluzivního a exkluzivního vymezení pojmů, která je kritická pro správný vývoj geometrických představ (De Villiers, 1998).

Bez této aktivní validační fáze se umělá inteligence stává zdrojem pedagogického šumu, který může negativně ovlivňovat kognitivní vývoj žáků v oblasti geometrické představivosti.

2.2. Specifika geometrického vzdělávání na primárním stupni

Geometrie v primárním vzdělávání nepředstavuje pouze soubor pouček o geometrických útvarech, ale tvoří základní pilíř pro rozvoj prostorové představivosti, logického usuzování a schopnosti pracovat s abstraktními modely reality. Jak uvádí Polák (2019), didaktika matematiky 21. století se soustředí na didaktickou transformaci obsahu tak, aby odpovídala poznávacím schopnostem žáků, přičemž efektivní využití digitálních technologií se stává jedním z hlavních cílů. Na rozdíl od aritmetiky, která je často procesem lineárním, je geometrie – a zejména její konstrukční část – procesem strukturálním a algoritmickým. Clements a Sarama (2007) zdůrazňují, že rozvoj geometrického myšlení úzce souvisí se schopností kompozice a dekompozice objektů, což dětem umožňuje budovat mentální koncepty vztahů mezi částí a celkem. Klíčovým teoretickým rámcem pro pochopení geneze těchto konceptů je teorie úrovní geometrického myšlení manželů van Hieleových. Van Hiele (1986, cit. dle Žilková, 2013) tvrdí, že rozvoj geometrického myšlení probíhá v následujících pěti úrovních:

• Úroveň 0: Vizualizace – rozpoznávání a pojmenovávání obrazců.
• Úroveň 1: Analýza – popisování vlastností obrazce.
• Úroveň 2: Neformální dedukce – klasifikace a třídění obrazců podle vlastností.
• Úroveň 3: Dedukce – provádění důkazů za použití vět a definic.
• Úroveň 4: Axiomatizace.

Podle Vojkůvkové (2012) procházejí žáci těmito úrovněmi hierarchicky, přičemž každá úroveň disponuje specifickým jazykem a symbolikou. Žáci na 1. stupni ZŠ se typicky nacházejí v prvních dvou fázích:

- **Úroveň 0 (Vizualizace):** Žáci rozpoznávají tvary jako celky na základě jejich celkového vzhledu (např. „toto je obdélník, protože vypadá jako dveře“). Na této úrovni jsou geometrické objekty vnímány bez hlubší analýzy jejich komponent (Vojkůvková, 2012).
- **Úroveň 1 (Analýza):** Žáci začínají identifikovat jednotlivé vlastnosti útvarů (např. „obdélník má čtyři pravé úhly“), ale zatím mezi těmito vlastnostmi nechápou logické vazby a hierarchické uspořádání.

Přechod k vyšším úrovním vyžaduje tzv. procesuální správnost a precizní terminologii. Zatímco v aritmetice může být chyba v mezivýpočtu izolovaným jevem, v konstrukční geometrii má každá nepřesnost řetězový efekt. Pokud LLM vygeneruje chybný krok postupu (např. opomene specifikovat průsečíky kružnic), nejde pouze o technickou chybu, ale o didaktické selhání. Takový výstup může žáka v procesu budování mentálních schémat mást a vést k fixaci miskoncepcí. Vzhledem k tomu, že LLM pracují na principu textové predikce, nikoliv na základě prostorové logiky, nemůže se budoucí učitel spoléhat na jejich „intuitivní správnost". Tato nebezpečná fixace nesprávných představ je hlavním důvodem, proč je geometrie v éře AI kritickým polem pro rozvoj profesních kompetencí učitele.

Významným didaktickým úskalím, na které šetření poukázalo, je napětí mezi inkluzivním a exkluzivním vymezením pojmů. De Villiers (1998) upozorňuje, že žáci si často budují tzv. „konceptuální obrazy" (*concept images*), které mohou být v přímém rozporu s formálními definicemi. Častým problémem v primárním vzdělávání je, že žáci i po seznámení se s definicí (např. rovnoběžníku) odmítají do této kategorie zařadit speciální případy jako čtverec či obdélník. Jejich vnitřní představa je příliš vázaná na prototypické zobrazení, což signalizuje setrvání na nižších úrovních geometrického myšlení (Vojkůvková, 2012).

Zatímco moderní didaktika preferuje inkluzivní přístup (např. čtverec je speciálním případem obdélníku, jehož všechny strany mají stejnou délku), v praxi se učitelé potýkají s rezistencí žáků preferujících exkluzivní chápání (čtverec v tomto pojetí není obdélníkem). Schopnost inkluzivní klasifikace je přitom znakem dosažení úrovně abstrakce (2. úroveň dle van Hieleho), kde žáci začínají chápat logické vazby mezi vlastnostmi útvarů (De Villiers, 1998). Pokud LLM modely v generovaných metodických materiálech tyto dva přístupy nekriticky kombinují, mohou u budoucích učitelů prohlubovat terminologickou nejasnost. To potvrzuje naléhavost požadavku, aby pregraduální příprava kladla důraz na hlubokou oborově-didaktickou erudici jako jedinou funkční pojistku proti technologicky generovaným chybám (Polák, 2019).

2.3. Limity LLM v matematickém uvažování

Aby bylo možné kriticky zhodnotit kvalitu výstupů generovaných umělou inteligencí, je nezbytné porozumět klíčovému rozdílu mezi lidským matematickým uvažováním a principem fungování velkých jazykových modelů (LLM).

Navzdory schopnosti generovat jazykově kultivované a přesvědčivé texty, LLM v jádru nepředstavují systémy založené na pravidlech symbolické logiky. Jak uvádějí Huang et al. (2023), jedná se o pravděpodobnostní prediktory, které generují obsah na základě statistických korelací v trénovacích datech, nikoliv na základě vnitřního porozumění faktům nebo logickým zákonitostem. Zatímco lidský řešitel při řešení geometrické úlohy vychází z axiomů a logických odvození, LLM modely konstruují odpověď skládáním tokenů (částí slov). Tento proces je náchylný k selhání zejména v úlohách vyžadujících tzv. vícekrokové uvažování (tzv. logická integrita).

Frieder et al. (2023) ve své analýze matematických schopností modelů ChatGPT zdůrazňují, že geometrický konstrukční postup je typickým příkladem řetězce vzájemně závislých kroků. V takovém algoritmu má každá instrukce striktní návaznost na kroky předcházející; pokud model chybuje v definici výchozího bodu nebo vlastnosti úsečky, celá následná struktura postupu se logicky hroutí. Tato dekonstrukce logické cesty se často děje pod povrchem gramaticky bezchybného a terminologicky bohatého textu. Tento nesoulad mezi formální kvalitou jazyka a vnitřní nelogičností obsahu se označuje jako „halucinace". Huang et al. (2023) definují halucinace jako generování obsahu, který je věcně nesprávný nebo v rozporu se zadaným kontextem.

V geometrii nejde o náhodné generování slov, ale o neschopnost modelu pracovat s prostorovými vztahy, které popisuje. Model postrádá „vnitřní geometrický svět"; může tedy s vysokou mírou jistoty tvrdit, že bod je průsečíkem dvou přímek, které jsou však podle jeho vlastního zadání rovnoběžné. Tento fenomén potvrzuje tezi Koehlera a Mishry (2013) o „neprůhlednosti" (opaqueness) moderních technologií, kdy uživatel snadno podlehne iluzi kompetence stroje. Pro budoucího učitele je pochopení tohoto limitu zásadní pro rozvoj jeho profesních kompetencí. Musí si být vědom, že LLM nevykazuje „pochopení" matematické pravdy, ale pouze vysokou míru pravděpodobnosti textové shody. Znalost tohoto technologického omezení je základním stavebním kamenem kritické technologicko-obsahové znalosti (TCK). Umožňuje studentovi přistupovat k nástroji nikoliv jako k neomylné autoritě, ale jako k „unstable" partnerovi (Koehler et al., 2013), jehož výstupy vyžadují permanentní expertní supervizi.

V kontextu těchto limitů tak paradoxně vyvstává naléhavější potřeba hluboké oborově-didaktické přípravy. Právě vysoká úroveň matematické erudice a schopnost provádět věcnou validaci (Polák, 2019) se stávají nezbytným předpokladem pro bezpečné a smysluplné využívání umělé inteligence v primárním vzdělávání.

2.4. Halucinace a jejich typologie v kontextu matematického uvažování

Huang et al. (2023) definují halucinace v prostředí LLM jako generování fakticky nesprávných, nelogických nebo s kontextem nekonsistentních tvrzení, která jsou však modelem prezentována s vysokou mírou lingvistické sebejistoty.

V oblasti matematického uvažování se tyto chyby projevují kriticky zejména v procesech vícekrokového odvozování (logická integrita). Jak uvádějí Frieder et al. (2023), u geometrických úloh, kde je výsledek podmíněn precizní sekvencí logických operací, dochází k tzv. kaskádovému selhání – každý chybný krok v algoritmu destabilizuje celou následnou strukturu. Na základě analýzy geometrického obsahu lze definovat tři specifické typy halucinací:

1. Halucinace logické (axiomální)

Tento typ představuje porušení základních geometrických axiomů a zákonitostí. Model například navrhne konstrukční postup pro trojúhelník, jehož délky stran neodpovídají trojúhelníkové nerovnosti, nebo operuje s objekty v euklidovském prostoru, které vykazují vnitřně rozporné vlastnosti. Frieder et al. (2023) upozorňují, že modely často „přeskakují" logické vazby a nahrazují je statisticky pravděpodobnými, leč matematicky nemožnými tvrzeními.

2. Halucinace terminologické (lingvistické)

Dochází k nesprávnému užití odborných pojmů, což je v geometrii 1. stupně ZŠ zvláště rizikové. Jde například o záměnu pojmů „kružnice" a „kruh" nebo „úsečka" a „přímka". Z pohledu van Hieleho teorie (Vojkůvková, 2012) tyto halucinace narušují integritu jazyka dané úrovně myšlení. Pokud model užívá terminologii úrovně analýzy (1), ale kombinuje ji s chybnými definicemi, vytváří u budoucího učitele falešný dojem odborné správnosti, který může vést k fixaci didaktických chyb (De Villiers, 1998).

3. Halucinace reprezentační (prostorové)

Tyto chyby se týkají chybných popisů prostorových vztahů a vzájemných poloh objektů. Typickým příkladem je tvrzení o existenci průsečíku u přímek, které model v tomtéž textu definoval jako rovnoběžné. Jelikož LLM postrádají schopnost vizuální reprezentace a prostorové představivosti, kterou Clements a Sarama (2007) považují za základ geometrického poznání, jejich „popis prostoru" je pouze syntaktickou konstrukcí bez sémantického ukotvení v realitě. Tato typologie rozšiřuje obecnou taxonomii Huang et al.

(2023) o nezbytnou didaktickou dimenzi. Pro pregraduální přípravu učitelů z toho vyplývá, že identifikace halucinací není pouze technickou dovedností, ale vyžaduje vysokou úroveň oborové kompetence. Bez schopnosti rozeznat logickou nekonzistenci od terminologické nepřesnosti nemůže učitel efektivně plnit roli tvůrce a validátora výuky a výukových materiálů v digitálním věku (Koehler et al., 2013).

3. Metodologie a design šetření

Cílem praktické části studie je provést komparativní analýzu schopností vybraných systémů umělé inteligence generovat metodicky správné a věcně bezchybné podklady pro výuku konstrukční geometrie na primárním stupni. Výzkumný design reflektuje rámec TPACK (Koehler et al., 2013), přičemž se zaměřuje na kritické posouzení průniku technologické a obsahové složky (TCK) v situaci, kdy technologie (LLM) přebírá roli autonomního tvůrce didaktického obsahu.

3.1. Výzkumné otázky

Vzhledem k teoretickým východiskům o limitech matematického uvažování LLM (Frieder et al., 2023) a didaktickým specifikům geometrického vzdělávání (Vojkůvková, 2012) jsme si stanovili následující výzkumné otázky:

- **VO1:** Jaká je míra věcné (matematické) správnosti konstrukčních postupů generovaných vybranými modely v kontextu stability složky Content Knowledge?
- **VO2:** Jaké typické formy halucinací (logické, terminologické, reprezentační) se v generovaných textech vyskytují v souladu s taxonomií Huang et al. (2023)?
- **VO3:** Do jaké míry reflektují generované výstupy inkluzivní pojetí geometrických pojmů (např. hierarchický vztah čtverce a obdélníku) odpovídající moderní didaktice (De Villiers, 1998)?

3.2. Charakteristika zkoumaných LLM nástrojů

Pro účely komparativní analýzy byly vybrány tři reprezentativní systémy, které aktuálně dominují trhu s generativní umělou inteligencí a vykazují nejvyšší míru integrace do akademického a školního prostředí. Výběr reflektuje technologickou variabilitu, kterou Koehler a Mishra (2013) označují za „unstable and opaque“, a zahrnuje různé přístupy k integraci TK:

1. OpenAI ChatGPT (model GPT-4o)

Tento model byl zvolen jako globální referenční standard multimodálního systému s nejvyšší deklarovanou úrovní logického uvažování. Pro budoucí učitele představuje primární nástroj pro generování komplexních struktur, u něhož se předpokládá nejpokročilejší schopnost vícekrokového odvozování (logická integrita), kritického pro geometrické konstrukce (Frieder et al., 2023).

2. Microsoft Copilot (režim „Precise“)

Nástroj byl zařazen jako reprezentant institucionální sféry, neboť je plošně integrován do ekosystému Microsoft 365 na většině českých univerzit a škol. Z pohledu rámce TPACK představuje technologii, se kterou budoucí učitelé pracují v rámci oficiálních licencí. Nastavení na režim „vysoké přesnosti“ bylo zvoleno záměrně, aby bylo možné sledovat stabilitu obsahové složky (CK) při potlačení kreativních složek modelu.

3. Google Gemini (model 2.0 Flash)

Reprezentant nejnovější generace agilních modelů optimalizovaných pro rychlou odezvu a efektivitu v rámci Google Workspace. Jeho zařazení umožňuje sledovat, jak si v náročných

úlohách konstrukční geometrie vedou modely s nižší výpočetní náročností, které jsou však masivně rozšířeny mezi žáky i učiteli na základních školách v ČR. Tato trojice nástrojů poskytuje komplexní pohled na aktuální technologické možnosti a limity. Analýza jejich výstupů umožní identifikovat, zda a do jaké míry vyžadují tyto „protean“ technologie (Koehler et al., 2013) od učitele specifické validační kompetence pro zachování didaktické kvality výuky geometrie.

3.3. Formulace testovacích úloh

Abychom zaručili objektivitu výzkumu a eliminovali vliv kontextového učení, využili jsme metodu tzv. zero-shot promptingu. Tyto prompty byly navrženy bez doplňujících nápověd, aby simulovaly běžný scénář, kdy student učitelství využívá technologii k rychlé přípravě na výuku.

Prompt P1: Test základního algoritmu a existenčních podmínek

- **Zadání:** „Ahoj, jsem student učitelství a připravuji si podklady pro výuku geometrie na 1. stupni ZŠ. Napiš mi prosím podrobný postup konstrukce trojúhelníku *ABC*, který má strany o délkách: $a = 6$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ cm. Postup piš tak, aby byl srozumitelný pro žáka 5. třídy.“
- **Sledovaný didaktický problém:** Úloha testuje schopnost modelu identifikovat porušení trojúhelníkové nerovnosti ($3 + 2 < 6$). Správná odpověď, odpovídající hluboké obsahové znalosti (CK), musí obsahovat upozornění, že trojúhelník nelze sestrojit. Generování postupu bez této reflexe je klasifikováno jako logická halucinace (Huang et al., 2023) a kritické didaktické selhání.

Prompt P2: Test pojmové hierarchie a inkluzivního myšlení

- **Zadání:** „Ahoj, jsem student učitelství a připravuji si podklady pro svou praxi pro výuku geometrie na 1. stupni ZŠ. Napiš mi prosím podklad pro žáky 5. třídy na téma obvod obdélníku. Úkol: Najdi všechny možné obdélníky, které mají obvod 16 cm a délky jejich stran jsou celá čísla. Požadavky: 1. Vysvětli žákům postup, jak jsi řešení hledal. 2. Uveď, zda jsi vyčerpal všechny možnosti.“
- **Sledovaný didaktický problém:** Úloha primárně cílí na analýzu inkluzivního vs. exkluzivního vymezení pojmů. Jak uvádí De Villiers (1998), moderní didaktika vyžaduje, aby byl čtverec vnímán jako speciální případ obdélníku. Sledujeme, zda AI do výčtu variant ($1 + 7$, $2 + 6$, $3 + 5$, $4 + 4$) zahrne i čtverec. Schopnost modelu toto ošetřit indikuje připravenost technologie podporovat rozvoj vyšších úrovní geometrického myšlení (2. úroveň – abstrakce dle van Hieleho). Sekundárně úloha testuje logickou integritu při hledání vyčerpávajícího počtu řešení.

3.4. Metoda analýzy a testovací kritéria

Všechny vygenerované výstupy byly podrobeny expertní analýze, která reflektuje průnik oborové didaktiky a technických limitů LLM. Hodnocení probíhalo ve čtyřech klíčových dimenzích na škále 1 (zcela správně/vhodně) až 3 (zcela chybně/nevhodně). Kritéria byla navržena tak, aby identifikovala specifické typy halucinací definované Huangem et al. (2023) a úroveň didaktické transformace:

1. Věcná (obsahová) správnost (CK) – posuzuje stabilitu obsahové znalosti a přítomnost logických halucinací.
   Je podle návodu možné útvar narýsovat? Jsou respektovány geometrické axiomy a existenční podmínky?
2. Terminologická a jazyková přesnost – hodnotí přítomnost terminologických halucinací (Huang et al., 2023).

Odpovídá použité názvosloví českým zvyklostem (např. rozdíl mezi kružnicí a kruhem) a jazyku odpovídající úrovně dle van Hieleho (Vojkůvková, 2012)?

3. Didaktická srozumitelnost (PCK) – sleduje kvalitu didaktické transformace obsahu. Je text srozumitelný pro cílovou skupinu (žák 5. třídy)? Neobsahuje metodicky nevhodné postupy, které by u žáků budovaly miskoncepce?
4. Logická integrita (Logická integrita) – hodnotí schopnost modelu udržet logickou linku v celém řetězci kroků (Frieder et al., 2023).
   Navazují instrukce na sebe, nebo model v průběhu generování „zapomněl“ výchozí parametry zadání?

4. Testování modelů

V následujících částech textu předkládáme relevantní doslovné přepisy generovaných odpovědí pro každý ze zkoumaných modelů. Pro zachování autenticity a možnosti expertní validace jsou výstupy ponechány v původním znění, včetně případných obsahových a terminologických nepřesností.

Je však nutné zdůraznit, že v průběhu testování docházelo u všech modelů k opakovaným a kritickým halucinacím v momentech, kdy se systémy pokoušely o vizuální reprezentaci geometrických konceptů (např. pomocí ASCII artu, schémat nebo generovaných obrázků). Tyto vizualizace vykazovaly totální absenci prostorové logiky a absolutně neodpovídaly geometrické skutečnosti. Tento jev je přímým důsledkem technologické podstaty LLM, které, jak bylo uvedeno v teoretické části, fungují jako pravděpodobnostní prediktory textových tokenů, nikoliv jako modely disponující sémantickým pochopením prostoru nebo grafickou přesností.

Vzhledem k tomu, že tyto grafické výstupy vykazovaly nulovou didaktickou hodnotu a jejich interpretace by byla pro žáka zavádějící, byly z popisu výsledků a následné analýzy u všech modelů vyloučeny. Šetření se tedy soustředí výhradně na textové konstrukční postupy a metodické instrukce, které představují klíčový prvek didaktické transformace obsahu.

4.1. Prompt P1

„Ahoj, jsem student učitelství a připravuji si podklady pro výuku geometrie na 1. stupni ZŠ. Napiš mi prosím podrobný postup konstrukce trojúhelníku ABC, který má strany o délkách: a = 6 cm, b = 3 cm, c = 2 cm. Postup piš tak, aby byl srozumitelný pro žáka 5. třídy.“

4.1.1. ChatGPT-4o (doslovný přepis)

Ahoj! Rád ti pomohu s konstrukcí trojúhelníku. Nicméně, podle trojúhelníkové nerovnosti nemůže existovat trojúhelník s délkami stran a = 6 cm, b = 3 cm a c = 2 cm, protože součet délek dvou kratších stran ($b + c$ = 5 cm) musí být větší než délka nejdelší strany (a = 6 cm).

Pokud chceš, mohu ti pomoci s konstrukcí trojúhelníku s jinými délkami stran, které splňují trojúhelníkovou nerovnost. Dej mi vědět, jaké délky bys chtěl použít!

4.1.2. Copilot (Precise) (doslovný přepis)

Nejdřív rychlá kontrola: Může takový trojúhelník existovat?
Pravidlo (trojúhelníková nerovnost):
Součet dvou kratších stran musí být větší než třetí (nejdelší) strana.

- Máme: a = 6 cm, b = 3 cm, c = 2 cm
- Součet kratších: 3 cm + 2 cm = 5 cm
- Nejdelší: 6 cm

Protože 5 cm není větší než 6 cm, takový trojúhelník neexistuje.
Závěr: Trojúhelník s těmito délkami nelze sestrojit.

„Pokus o konstrukci“ – krok za krokem (aby žáci viděli, proč to nejde)
Pomůcky: pravítko, kružítko, tužka.

1. Narýsuj úsečku BC dlouhou 6 cm (to je strana a).
2. Do kružítka vezmi 2 cm a opiš kružnici se středem v bodě B.
   (Hledáme bod A tak, aby $AB = 2$ cm.)
3. Do kružítka vezmi 3 cm a opiš kružnici se středem v bodě C.
   (Současně má platit $AC = 3$ cm.)
4. Podívej se, zda se kružnice protínají.
   - Vzdálenost středů B a C je 6 cm.
   - Součet poloměrů kružnic je 2 cm + 3 cm = 5 cm.
   - Když je součet poloměrů menší než vzdálenost středů, kružnice se neprotnou.
5. Kružnice se neprotnou → neexistuje bod A, který by splnil obě podmínky ($AB = 2$ cm a $AC = 3$ cm).

Závěr: Trojúhelník s těmito délkami nelze narýsovat.
Žákovská pomůcka / analogie:
Představ si tři špejle: 6 cm, 3 cm a 2 cm. Z těchto tří špejlí „trojúhelník“ nezavřeš, protože dvě kratší dohromady nedosáhnou na tu nejdelší.

Jak to žákům vysvětlit jednoduše

- „Dvě kratší strany dohromady musí být delší než ta dlouhá. Když nejsou, tvar se nezavře.“
- „Kružítka se musí potkat. Když se dvě kružnice nepotkají, chybí nám třetí vrchol.“

Tip: Změň čísla a konstrukce půjde
Např. $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ cm (tady $3 + 2 = 5 > 4$, takže OK).
Postup (SSS – všechny tři strany známe):

1. Narýsuj úsečku AB dlouhou $c = 2$ cm.
2. Se středem v A opiš kružnici s poloměrem $b = 3$ cm.
3. Se středem v B opiš kružnici s poloměrem $a = 4$ cm.
4. Průsečík kružnic označ C.
   (Pokud jsou dva průsečíky, vyber jeden — vzniknou dvě „zrcadlové“ možnosti.)
5. Spoj AC a BC. Máš trojúhelník ABC.
6. Kontrola: Změř pravítkem AB (2 cm), AC (3 cm), BC (4 cm).

Didaktické tipy

- Nechte děti nejdřív zkusit odhad: „Bude tohle možné?“ a použijte pravidlo sečtení kratších stran.
- Pak udělejte „pokus o konstrukci“, aby viděly, že se kružnice nepotkají.
- Krátká praktická aktivita: tři provázky/špejle (6, 3, 2 cm) a pokusit se je spojit do trojúhelníku – nejde to.

Pokud chceš, připravím ti k tomu pracovní list nebo jednoduchý obrázek k vytištění (PDF), kde budou:

- pravidlo trojúhelníkové nerovnosti,
- „pokus o konstrukci“ s obrázkem,
- a jeden „správný“ příklad k narýsování.

Chceš raději jednu stránku A4 nebo krátkou prezentaci (PowerPoint)?

4.1.3. Google Gemini 2.0 Flash (doslovný přepis)

Ahoj! Bohužel, takový trojúhelník nelze sestrojit. Součet dvou kratších stran ($b + c$) musí být větší než délka nejdelší strany (a). V tomto případě 3 cm + 2 cm = 5 cm, což je méně než 6 cm. Trojúhelník se "nespojí".

Pokud bys chtěl/a postup pro trojúhelník, který sestrojit jde, dej mi vědět s novými délkami stran!

4.1.4. Diskuse výsledků šetření P1

První testovací úloha (P1) byla zaměřena na schopnost modelů identifikovat matematickou nemožnost konstrukce trojúhelníku v důsledku porušení trojúhelníkové nerovnosti ($b + c < a$). Z hlediska rámce TPACK tato úloha testovala především stabilitu složky Content Knowledge (CK) a schopnost její didaktické transformace (PCK).

Výsledky šetření ukazují, že v této základní úrovni geometrického uvažování všechny tři testované modely uspěly v detekci chyby. Nedošlo k žádné logické halucinaci, při které by model generoval postup pro neexistující objekt, což indikuje výrazný posun oproti starším verzím LLM (srov. Frieder et al., 2023).

- **ChatGPT-4o:** Prokázal vysokou úroveň CK. Chybu identifikoval okamžitě a jasně ji zdůvodnil. Z hlediska PCK je však výstup strohý – model pouze konstatuje nemožnost a nabízí pomoc s jiným zadáním. Pro studenta učitelství představuje tento výstup bezpečnou „pojistku", ale nenabízí žádnou přidanou didaktickou hodnotu pro výuku.
- **Copilot (Precise):** Tento model vykázal nejvyšší úroveň didaktické kompetence. Nejenže chybu identifikoval, ale v souladu s moderními trendy v didaktice (Polák, 2019) ji využil jako „teachable moment". Nabídl „pokus o konstrukci", který žákům vizualizuje, proč kružnice nemohou vytvořit průsečík (třetí vrchol). Výstup obsahuje analogii se špejlemi, která odpovídá vizualizační úrovni (0) dle van Hieleho, a následně nabízí i správný příklad pro srovnání. Z hlediska metodiky jde o komplexní podklad pro vyučovací hodinu.
- **Gemini 2.0 Flash:** Model reagoval věcně správně a velmi efektivně. Jeho vysvětlení, že se trojúhelník „nespojí", je srozumitelné pro cílovou skupinu (5. třída). Stejně jako ChatGPT se však omezil na korekci zadání bez hlubšího didaktického rozpracování.

V tabulce níže uvádíme průměrné skóre v jednotlivých dimenzích (1 = nejlepší, 3 = nejhorší):

Tabulka 1. průměrné skóre LLM ve sledovaných dimenzích promptu P1

Kritérium	ChatGPT-4o	Copilot (Precise)	Gemini 2.0 Flash
Věcná správnost (CK)	1	1	1
Terminologická přesnost*	1	3	2
Didaktická srozumitelnost (PCK)	2	1	2
Logická integrita	1	1	1

*Hodnocení terminologické přesnosti jednotlivých LLM je vzhledem k rozdílné délce vygenerovaných odpovědí velmi obtížné objektivně hodnotit. Odpověď modelu Copilot byla nesrovnatelně komplexnější, čímž vznikl mnohem větší prostor k matematicky nekorektnímu výstupu. Toto kritérium tak nebylo možné brát zcela v potaz.

Z analýzy zbývajících kritérií se ukazuje, že pro budoucího učitele je v této fázi nejvíce přínosný model Copilot, který nejlépe simuluje roli zkušeného metodika. Modely ChatGPT a Gemini fungují spíše jako expertní korektoři, kteří sice zabrání věcné chybě (stabilní CK), ale

didaktickou transformaci (PCK) ponechávají plně na uživateli. Tento nález potvrzuje, že i při bezchybném výstupu AI zůstává role učitele jako designéra výuky (Koehler et al., 2013) nezastupitelná.

4.2. Prompt P2

Ahoj, jsem student učitelství a připravuji si podklady pro svou praxi pro výuku geometrie na 1. stupni ZŠ. Napiš mi prosím podklad pro žáky 5. třídy na téma obvod obdélníku. Úkol: Najdi všechny možné obdélníky, které mají obvod 16 cm a délky jejich stran jsou celá čísla. Požadavky: 1. Vysvětli žákům postup, jak jsi řešení hledal. 2. Uveď, zda jsi vyčerpal všechny možnosti.

4.2.1. ChatGPT-4o

Podklad pro žáky: Obvod obdélníku

Úkol: Najdi všechny možné obdélníky, které mají obvod 16 cm a délky jejich stran jsou celá čísla.

1. Vysvětlení postupu:

Obvod obdélníku se počítá podle vzorce:

[O = 2 \times (a + b)]

Kde (O) je obvod, (a) je délka jedné strany a (b) je délka druhé strany.

V našem případě je obvod (O = 16) cm. Dosadíme do vzorce:

[16 = 2 \times (a + b)]

Zjednodušíme rovnici:

[8 = a + b]

Musíme tedy najít všechny dvojice celých čísel (a) a (b), které splňují tuto rovnici.

2. Vizuální znázornění řešení:

Možné dvojice ((a, b)) jsou:

(a = 1), (b = 7)
(a = 2), (b = 6)
(a = 3), (b = 5)
(a = 4), (b = 4)

Ano, vyčerpali jsme všechny možnosti. Pro každou dvojici (a) a (b) platí (a + b = 8), kde (a) a (b) jsou celá čísla. Všechny možné kombinace jsme našli a znázornili.

4.2.2. Copilot (Precise)

Zde je podklad pro žáky 5. třídy k tématu obvod obdélníku na zadaný úkol. Je psaný přímo pro děti – můžeš ho vytisknout jako pracovní list nebo promítnout.

Pracovní list: Obvod obdélníku – Úkol s obvodem 16 cm

Co je obvod obdélníku?

Obvod obdélníku je délka „okraje“ (všech čtyř stran).

Vzorec: O = 2 × (a + b), kde a a b jsou délky stran.

Zadání

Najdi všechny možné obdélníky, které mají obvod 16 cm a délky jejich stran jsou celá čísla (v centimetrech).

Jak na to – postup krok za krokem (vysvětlení pro žáky)

Použij vzorec pro obvod:

O = 2 × (a + b). Máme O = 16, tedy

2 × (a + b) = 16 ⇒ a + b = 8.

Hledáme dvě celá kladná čísla, která sečtená dají 8.
Začneme nejmenší možnou celou délkou $a = 1$ a k ní dopočítáme $b = 8 - a$.
Postupuj systematicky:
Zvyšuj a o 1 (1, 2, 3, 4, …) a vždy spočítej $b = 8 - a$.
Zastav se, jakmile by a „přeskočilo“ b (protože obdélník s délkami a, b je stejný jako s délkami b, a).
Zkontroluj každou dvojici:
Pro jistotu u každé dvojice ověř: $2 \times (a + b) = 16$.

Řešení (všechny dvojice celých čísel)
Celá kladná čísla a, b s $a + b = 8$:
$a = 1$, $b = 7 \rightarrow$ obvod $2 \times (1 + 7) = 16$
$a = 2$, $b = 6 \rightarrow$ obvod $2 \times (2 + 6) = 16$
$a = 3$, $b = 5 \rightarrow$ obvod $2 \times (3 + 5) = 16$
$a = 4$, $b = 4 \rightarrow$ obvod $2 \times (4 + 4) = 16$
Poznámka: Dvojice (5, 3), (6, 2), (7, 1) jsou stejné tvary „jen otočené“. Abychom neměli stejné obdélníky dvakrát, stačí uvést ty s $a \leq b$.
Jsou to opravdu všechny možnosti?
Ano. Vysvětlení:
Víme, že $a + b = 8$ a a, b mají být celá kladná čísla (strana nemůže být 0).
Když systematicky projdeme $a = 1, 2, 3, 4$, dostaneme $b = 7, 6, 5, 4$.
Pro $a = 5, 6, 7$ bychom dostali jen stejné obdélníky, ale otočené ($b = 3, 2, 1$).
Proto jsou všechny různé tvary (bez ohledu na otočení) právě: 1×7, 2×6, 3×5, 4×4.

Kontrolní otázky (pro sebe hodnocení)
Proč jsme rovnost $2 \times (a + b) = 16$ přepsali na $a + b = 8$?
Proč nebereme dvojici (0, 8)?
Který z nalezených obdélníků je čtverec? Proč?
Dokázal/a bys najít všechny obdélníky s obvodem 20 cm se stejným postupem?

Tip (volitelné): Rozšíření pro zvídavé
Zkus se zamyslet: mají nalezené obdélníky stejný obsah? (Obsah je $S = a \times b$.) Který má největší obsah a proč?

4.2.3. Google Gemini 2.0 Flash

Ahoj! Tady máš podklad pro žáky 5. třídy na téma obvod obdélníku:
Obvod obdélníku – hledači obdélníků
Cíl: Naučit se vypočítat obvod obdélníku a hledat různé obdélníky se stejným obvodem.
Pomůcky: Pravítko, tužka, papír, (volitelně) čtverečkovaný papír.
Úvod:
Zopakujte si, co je to obdélník (čtyřúhelník se 4 pravými úhly, protilehlé strany jsou stejně dlouhé).
Zopakujte si, co je obvod (součet délek všech stran).
Připomeňte vzorec pro obvod obdélníku: $O = 2 * (a + b)$, kde ‘a’ je délka jedné strany a ‘b’ je délka druhé strany.
Úkol:
Najděte všechny možné obdélníky, které mají obvod přesně 16 cm a délky jejich stran jsou celá čísla.

Postup:

Zjednodušení vzorce: Víme, že obvod je 16 cm, takže můžeme vzorec upravit: 16 = 2 * (a + b). Když obě strany rovnice vydělíme 2, dostaneme: 8 = a + b. To znamená, že součet délek dvou sousedních stran musí být 8 cm.

Hledání dvojic čísel: Nyní hledáme všechny dvojice celých čísel, které dávají součet 8. Začneme systematicky:

Pokud je a = 1 cm, pak b = 7 cm (protože 1 + 7 = 8)
Pokud je a = 2 cm, pak b = 6 cm (protože 2 + 6 = 8)
Pokud je a = 3 cm, pak b = 5 cm (protože 3 + 5 = 8)
Pokud je a = 4 cm, pak b = 4 cm (protože 4 + 4 = 8)

Pokud bychom pokračovali dál (a = 5 cm), dostali bychom b = 3 cm, což už je obdélník, který jsme našli (pouze prohozené strany).

Závěr: Našli jsme 4 různé obdélníky s obvodem 16 cm a celočíselnými délkami stran:
1 cm x 7 cm
2 cm x 6 cm
3 cm x 5 cm
4 cm x 4 cm (což je čtverec!)

Odpověď: Našli jsme všechny možnosti. Existují 4 různé obdélníky, které splňují zadané podmínky.

Doplňkové aktivity:

Nakreslete si tyto obdélníky na čtverečkovaný papír.
Zkuste najít obdélníky s jiným obvodem.
Co kdyby délky stran mohly být i desetinná čísla? Kolik by bylo možností?

Hodně štěstí s praxí!

4.2.4. Diskuse výsledků šetření P2

Druhá testovací úloha (P2) byla navržena k prověření pokročilejších aspektů „Pedagogical Content Knowledge“ (PCK). Cílem bylo zjistit, zda modely pracují s inkluzivním pojetím geometrických pojmů (zda zahrnou čtverec mezi obdélníky) a zda dokážou systematicky a úplně vyčerpat stavový prostor řešení u úlohy s obvodem 16 cm.

Všechny tři zkoumané modely v této úloze prokázaly vysokou úroveň logické integrity. Žádný z modelů se nedopustil logické halucinace typu „zapomenutí zadání“ nebo výpočtové chyby při odvození vztahu $a + b = 8$.

- **ChatGPT-4o:** Model zvolil ryze matematický, analytický přístup. Správně odvodil zjednodušený součet stran a nalezl všechny čtyři celočíselné kombinace. Z hlediska didaktiky je však jeho výstup neutrální; ačkoliv čtverec (4, 4) do seznamu zahrnul (inkluzivní přístup), nijak na tento fakt didakticky neupozornil. Pro studenta učitelství tak výstup představuje korektní klíč řešení, ale postrádá metodický komentář k pojmové hierarchii.
- **Copilot (Precise):** Tento model opět potvrdil svou orientaci na školní praxi. Výstup transformoval do podoby komplexního pracovního listu. Velmi cenným prvkem z hlediska didaktiky je zařazení kontrolní otázky: „Který z nalezených obdélníků je čtverec? Proč?“. Tímto krokem model aktivně podporuje přechod žáka na 2. úroveň dle van Hieleho (abstrakce), kde dochází k pochopení vztahů mezi vlastnostmi obrazců (Vojkůvková, 2012). Systém také metodicky správně vysvětlil, proč stačí uvést pouze čtyři dvojice a vyhnout se duplicitám vzniklým v důsledku komutativity.
- **Google Gemini 2.0 Flash:** Model Gemini se v této úloze projevil jako didakticky nejpřesnější. Nejenže nalezl všechna řešení, ale u varianty obdélník o stranách 4 cm a 4 cm explicitně a v kontextu výpočtu uvedl poznámku „(což je čtverec!)“. Tím přímo

naplňuje požadavek na inkluzivní klasifikaci (De Villiers, 1998). Gemini také jako jediný model doplnil „Doplňkové aktivity“ (práce s čtverečkovaným papírem, úvaha o desetinných číslech), což svědčí o vysoké úrovni didaktické flexibility.

Tabulka 2. průměrné skóre LLM ve sledovaných dimenzích promptu P2

Kritérium	**ChatGPT-4o**	**Copilot (Precise)**	**Gemini 2.0 Flash**
Věcná správnost (CK)	2	2	2
Inkluzivní pojetí (VO3)	2 (implicitní)	1 (explicitní v otázce)	1 (explicitní v textu)
Didaktická srozumitelnost (PCK)	2	1	1
Úplnost řešení	1 (4/4)	1 (4/4)	1 (4/4)

Analýza úlohy P2 ukazuje, že současná generace LLM (v testovaných verzích) již netrpí neschopností systematického prohledávání u jednodušších kombinatorických úloh. Klíčovým nálezem je, že modely Copilot a Gemini aktivně integrují inkluzivní definice, což je pro budoucí učitele zásadní. Pokud by model čtverec vynechal, fixoval by u studenta i žáka častou miskoncepci, že čtverec a obdélník jsou izolované pojmy bez vzájemného inkluzivního vztahu. Z hlediska TPACK modely v této úloze prokázaly efektivní synergii mezi technologickou formou a hlubokým didaktickým obsahem. U všech modelů však nadále zůstává velmi problematická symbolická a terminologická správnost odpovědí

5. Závěr

Předkládaná studie podrobila kritické analýze tři dominantní jazykové modely (GPT-4o, Copilot, Gemini 2.0 Flash) v kontextu přípravy materiálů pro konstrukční geometrii na 1. stupni ZŠ. Výsledky šetření ukazují na významný posun v matematické spolehlivosti LLM, ale zároveň odhalují přetrvávající limity v oblasti didaktické a kulturní integrity.

Klíčová zjištění lze shrnout do dvou stěžejních bodů:

1. Logická a pojmová stabilita: Modely vykazují vysokou úspěšnost v detekci matematických sporů (trojúhelníková nerovnost) a v moderním inkluzivním pojetí klasifikace geometrických objektů (klasifikace čtverce jako obdélníku). V této rovině se LLM stávají validním partnerem pro brainstorming studentů.

2. Terminologický a kulturní nesoulad: Výstupy jsou silně ovlivněny anglosaskou symbolikou a při snaze o didaktické zjednodušení sklouzávají k terminologické nepřesnosti, která je v rozporu s českými zvyklostmi.

Z výzkumu vyplývá, že pro budoucí učitele 1. stupně je nezbytné rozvíjet tzv. kritickou technologicko-obsahovou znalost. Umělá inteligence v současné fázi vývoje nemůže sloužit jako autonomní generátor hotových edukačních materiálů, ale pouze jako „hrubý asistent“, jehož výstupy vyžadují důslednou expertní lokalizaci a validaci.

Hlavním přínosem práce je upozornění na fakt, že v éře AI neklesá význam hluboké oborové a didaktické přípravy studentů; naopak, tato erudice se stává jedinou funkční pojistkou proti šíření technologicky generovaných miskoncepcí v primárním vzdělávání. Další výzkum by se měl zaměřit na efektivitu cíleného promptingu (tzv. chain-of-thought) při eliminaci zjištěných terminologických nepřesností.

Acknowledgements

Příspěvek vznikl v rámci realizace projektu „*Inovativní přístup k přípravě budoucích učitelů matematiky v éře umělé inteligence*“ č. projektu: IGA_PdF_2025_034, realizovaného na Katedře matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Literatura

Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 461–555). Information Age Publishing.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 248–255). Stellenbosch University.

Frieder, S., Pinchetti, L., Chevalier, A., Griffiths, R.-R., Salvatori, T., Lukasiewicz, T., Petersen, P. C., & Bibani, N. (2023). *Mathematical capabilities of ChatGPT*. arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.13867

Huang, L., Yu, W., Ma, W., Zhong, W., Feng, Z., Wang, H., Chen, Q., Peng, W., Feng, X., Qin, B., & Liu, T. (2023). A survey on hallucination in large language models: Principles, taxonomy, challenges, and open questions. *arXiv*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.05232

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2013). *The Technological Pedagogical Content Knowledge Framework for Teachers and Teacher Educators*. Commonwealth Educational Media Centre for Asia.

Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2013). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)? *Journal of Education*, *193*(3), 13–19. https://doi.org/10.1177/002205741319300303

Polák, J. (2019). Didaktika matematiky v 21. století a realita výuky. *Učitel matematiky*, *27*(2), 91–105.

Rosenberg, J. M., & Koehler, M. J. (2015). Context and Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK). *Journal of Research on Technology in Education*, *47*(3), 186–210. https://doi.org/10.1080/15391523.2015.1052663

Vojkůvková, I. (2012). The van Hiele model of geometric thinking. In *WDS'12 Proceedings of Contributed Papers, Part I* (pp. 72–75). Matfyzpress.

Žilková, K. (2013). *Teória a prax geometrických manipulácií v primárnom vzdelávaní*. Praha: Powerprint.

ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL

Editorial Office: Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

Address: Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Czech Republic

Phone: +420 58 563 5709

E-mail: emej@upol.cz

Electronic edition: http://emejournal.upol.cz/issues

2025

Vol. 7, No. 2

ISSN 2694-8133