ISSN 2694-8133

ROVNICE V KONSTRUKTIVISTICKÉ VÝUCE 1. STUPNĚ ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Renáta ZEMANOVÁ[1]
[1]Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
renata.zemanova@osu.cz

Abstrakt

Téma rovnic a jejich soustav je v České republice povinným výstupem 2. stupně základní školy. Následně prolíná výukou matematiky a řady dalších předmětů všech stupňů a typů škol. Žáci a studenti se úlohy většinou naučí správně řešit. Nedokážou však podle reálné situace rovnice sestavit. V hlubším zkoumání příčin obtíží žáků a studentů vidíme, že rovnice řeší bez porozumění formálními algoritmy typu „převedeme na druhou stranu a změníme znaménko“. V genetické výuce matematiky, respektující konstruktivistický přístup, je systematické budování rovnosti zahájeno už v mateřské škole, graduje na 1. stupni základní školy v několika didaktických prostředích neboli sémantických i strukturálních kontextech a vrcholí v 5. ročníku řešením lineárních rovnic a jejich soustav. Popíšeme typové úlohy napříč těmito prostředími, ukážeme jejich potenciál pro porozumění rovnicím a způsobu jejich řešení od mateřské školy po 5. ročník základní školy. Představíme šetření v 5. ročníku základní školy: v několika vyučovacích hodinách jsme žákům zadali úlohu o myšleném čísle s výzvou, aby ji převedli do co nejvíce různých prostředí. Žáci našli osm prostředí, v nichž úlohu řešili a řešení komentovali. Průběh jejich řešení jsme evidovali videozáznamem. Představíme žákovská řešení, komentáře a jejich analýzu. Ukážeme kritická místa, slepé cesty i vysoký potenciál tohoto zadání pro sestavování rovnic a reedukaci formalismu v jejich řešení.

Klíčová slova: rovnost, rovnice, didaktické prostředí, genetická metoda výuky matematiky, izomorfismus úloh

THE EQUATION IN CONSTRUCTIVISTIC LEARNING AT PRIMARY SCHOOL

Abstract

The topic of equations and their systems is an obligatory outcome of the secondary school in the Czech Republic. Subsequently, it blends the teaching of mathematics and a number of other subjects of all grades and types of schools. Pupils and students mostly learn to solve problems correctly. However, they cannot create equations related to the real situation. In a deeper investigation of the causes of pupils´ and students´ difficulties, we see that they solve equations without understanding by formal algorithms such as "transfer to the other side and change the sign." In genetic mathematics teaching, respecting the constructivist approach, systematic building of equality starts already in pre-school education, graduates to the primary school in several substantial learning environments, semantic and structural contexts, and culminates in the 5th grade by solving linear equations and their systems. We will describe the type problems across these environments, show their potential for understanding equations and how to solve them from pre-school to the 5th grade of primary school. We will present the survey in 5th grade of primary school: in several classes, we gave pupils task about hidden number with a challenge to transcribe it into as many different environments as possible. The pupils found eight environments in which they solved the problem and commented on the solution. We recorded the course of their solution with a video recording. We will present pupils' solutions, comments and their analysis. We will show critical points, dead ends as well as the high potential of this task for compiling equations and reeducating formalism in their solution.

Keywords: equality, equations, learning environment, genetic method of teaching mathematics, isomorphism of tasks

1. Úvod

S mnoha situacemi budujícími představy o rovnosti se dítě setkává od narození. Zjišťuje, zda jsou objekty (předměty, jevy nebo procesy) stejné nebo se liší, rozdíly pojmenovává. Po přirozeném porovnávání (je – není stejný) nastupuje porovnávání základní (větší – menší – stejný, rychlejší – pomalejší – stejný…), porovnávání rozdílem (o kolik?) a podílem (kolikrát?). Samostatnou kapitolou v porovnávání je pak porovnávání množství a počtu. V každém z těchto typů porovnávání nacházíme možnost „je stejný, stejně“, tedy rovnost. V případě rovnosti pak mohou děti objekty přiřazovat (dávají k sobě ty, které jsou stejné, je jich stejně) a třídit (vytvářejí skupiny stejných objektů, rovnajícího se množství a počtu). Odtud směřují k porozumění čísla jako názvu třídy.

V šetření využíváme matematických didaktických prostředích tak, jak je vymezuje německý badatel E. Wittmann (2001) v pojmu podnětné výukové prostředí (substantial learning environment. Navazuje na myšlenky o procesu učení Deweye (1938), Piageta (2010) a Freudenthala (1991). Wittmann zejména požadoval, aby žáci měli možnost řešením úloh v daném prostředí odhalovat zákonitosti a klíčové matematické pojmy. M. Hejný pojem didaktické matematické prostředí precizoval (Hejný, 2014).

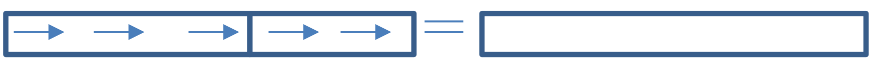
V předškolním vzdělávání je téma rovnosti ještě více zpracováno, a to prakticky ve všech didaktických prostředích rozvíjejících číselné představy: Krokování, Schody, Vláčky, Autobus… i představy prostorové: Stavitelé, Podlaháři, Dřívka, Papírnictví… (Slezáková a kol., 2020).

Na 1. stupni ZŠ se schéma rovnosti v těchto didaktických prostředích rozšiřuje a přibývají prostředí nová, cílená na budování schématu rovnic, nerovnic a jejich soustav: Myslím si číslo, Děda Lesoň, Součtové trojúhelníky, Hadi, Pavučiny, Váhy… V těchto didaktických prostředích se žáci učí dobře rovnicím, nerovnicím a jejich soustavám porozumět, k reálné situaci rovnici, nerovnici nebo soustavu sestavit, převádět zadání úloh mezi prostředími a identifikovat v jednotlivých prostředích navzájem izomorfní úlohy (Hejný a kol., 2018–2022).

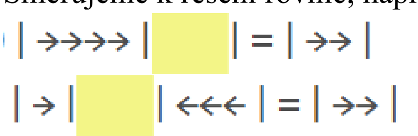
2. Didaktická prostředí pro budování schématu rovnic

Ze všech didaktických prostředí vybíráme jen ta, která žáci využili pro řešení rovnice v našem šetření, a to Součtové trojúhelníky, Hadi, Pavučiny, Krokování, Schody, Autobus, Vláčky (žáci nevyužili, uvádíme pro srovnání s Dědou Lesoněm), Děda Lesoň. Ukázky úloh čerpáme z blogu společnosti H-mat, o.p.s. (2018).

Krokování je sémantickým didaktickým prostředím, které využívá zkušeností dětí z chůze. Čísla v zadávaných pokynech jsou ve významu operátoru změny – Udělej tři kroky dopředu. Rovnice můžeme ilustrovat jednoduchými činnostmi, kdy děti A a B stojí na stejném poli krokovacího pásu, dítě A dostane pokyn: Udělej tři kroky dopředu, potom dva kroky dopředu, začni teď. Kolik roků musí udělat dítě B, aby stálo vedle dítěte A? Zapisujeme:



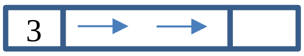
Směřujeme k řešení rovnic, např.:



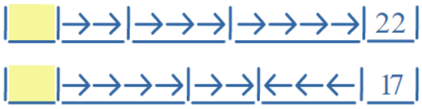
Tedy $4 + x = 2$
$1 + x - 3 = 2$

Schody navazují na prostředí Krokování. Na krokovací pás doplníme čísla ve významu lineární adresy. Rovnice můžeme ilustrovat jednoduchými činnostmi, kdy dítě stojí na čísle 3 krokovacího pásu, dostane pokyn: Udělej dva kroky dopředu, začni teď. Na kterém čísle krokovacího pásu bude po provedení pokynu stát?

ISSN 2694-8133



Směřujeme k řešení rovnic, např.:



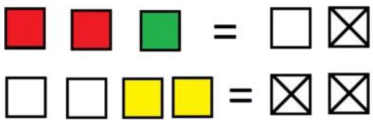
Tedy $x + 2 + 3 + 4 = 22$
$x + 4 + 2 - 3 = 17$

Autobus je sémantickým didaktickým prostředím, které využívá zkušenosti dítěte z cestování hromadnou dopravou. Čísla jsou zde zastoupena jako operátory změny (přistoupili dva cestující) nebo stavy jako počet (v autobuse jeli tři cestující). Jednoduché zadání představuje úloha: Na zastávku přijeli tři cestující, nikdo nevystoupil, dva cestující nastoupili. Kolik cestujících odjelo ze zastávky? Směřujeme k řešení rovnic (V – vystoupili, N – nastoupili, J – jeli), např.:

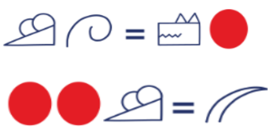
	A	B	C	D	E
V			5		13
N		3		2	0
J	11	10	14		

Situace na zastávce B: $11 - x + 3 = 10$
Situace na zastávce C: $10 - 5 + x = 14$
Situace na zastávce D: $14 - x + 2 = 13$

Vláčky a Děda Lesoň jsou sémantickými didaktickými prostředími, která pracují se stavy jako veličinou (délka vagónku, síla zvířátka). V případě Vláčků je síla vyjádřena délkou vagónku, přičemž délka bezprostředně následujícího v barevném pořadí je stejná jako délka bezprostředně předcházejícího a bílého (červený je stejně dlouhý jako dva bílé, zelený je stejně dlouhý jako červený a bílý, fialový je stejně dlouhý jako zelený a bílý, žlutý je stejně dlouhý jako fialový a bílý…). V případě Dědy Lesoně je síla zvířátek dána dohodou, opět se přidává k síle bezprostředně předchozího zvířátka síla myši (kočka má stejnou sílu jako dvě myši, husa má sílu jako kočka a myš, pes má sílu jako husa a myš…). Jednoduché zadání představuje úloha: Z nabídky vagónků postav stejně dlouhé vláčky jako fialový vagónek (4 bílé). Z nabídky zvířátek sestav družstvo, které bude mít stejnou sílu jako pes (4 myši). Směřujeme k řešení rovnic, např. zjisti, který vagónek se ukrývá pod plachtou (čtverec s křížkem), resp. které zvířátko se ukrývá pod maskou (barevný kruh), např.:

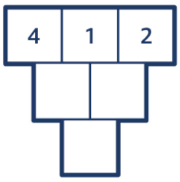


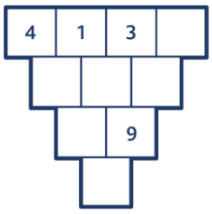
Tedy $2 + 2 + 3 = 1 + x$
$1 + 1 + 5 + 5 = 2x$



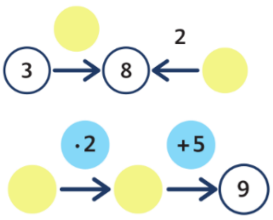
Tedy $1 + 6 = 4 + x$
$2x + 1 = 5$

Součtové trojúhelníky jsou strukturálním prostředím, kde platí, že součet sousedních dvou čísel v jednom řádku je roven číslu mezi nimi o řádek níže. Úlohy vyzývají k doplnění všech čísel součtového trojúhelníka, směřujeme k řešení rovnic, resp. jejich soustav, např.:



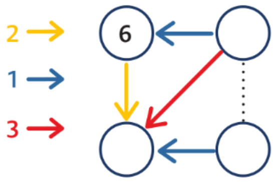


Hadi jsou strukturálním prostředím, kde platí, že čísla v těle hada jsou stavy ve významu počtu a čísla nad tělem hada jsou operátory nebo skaláry změny. Úlohy vyzývají k doplnění všech čísel hada tak, aby dala správný výsledek početní operace, přičemž operace se provádí ve směru šipky. Směřujeme k řešení rovnic, resp. soustav rovnic, např.:



Tedy $\begin{aligned} 3 + x &= 8,\ y + 2 = 8 \\ 2x + 5 &= 9 \end{aligned}$

Pavučiny jsou strukturálním prostředím, kde platí, že čísla ve vrcholech pavučiny jsou stavy ve významu počtu a čísla nad šipkami (nebo šipky stejné barvy) jsou operátory nebo skaláry změny. Úlohy vyzývají k doplnění všech čísel (nebo barevných šipek) do pavučiny tak, aby dala správný výsledek početní operace, přičemž operace se provádí ve směru šipky. Směřujeme k řešení rovnic, resp. soustav rovnic, např.:



Tedy $\begin{aligned} x + 1 &= 6 \\ 6 + 2 &= y \\ x + 3 &= y \\ x + z + 1 &= y \end{aligned}$

Převádění zadání rovnice v jednom prostředí do prostředí jiných, tedy hledání izomorfních úloh, buduje u žáků dobré porozumění a dává jim možnost řešení v tom prostředí, které je pro ně nejpřívětivější.

3. Řešení úloh v 5. ročníku ZŠ

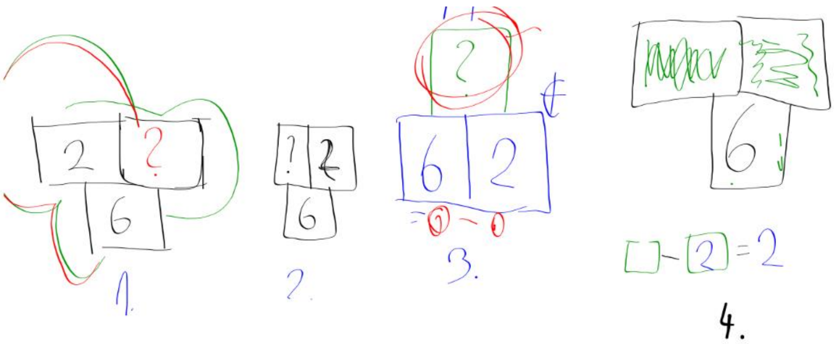
V prosinci 2021 a lednu 2022 byla v 5. ročníku ZŠ Provaznická v Ostravě žákům zadána úloha o myšleném čísle s výzvou, aby úlohu převedli do co nejvíce didaktických prostředí, která znají a společně řešení diskutovali. Šetření se zúčastnilo sedmnáct žáků třídy 5.B a jejich třídní učitel v roli experimentátora. Ten zadal úlohu a výzvu, řešení žáků a jejich diskuzi zaznamenával na video. Z žákovských prací a videozáznamů jsme zpracovali analýzu.

Zadanou úlohou o myšleném čísle bylo: *„Myslím si číslo, když k němu přičtu 2, dostanu 6. Které číslo si myslím.“* Tedy rovnice $x + 2 = 6$. Úloha není náročná na výpočet, na ten necílí. Cílem aktivity bylo zvědomění izomorfismu napříč didaktickými prostředími. Učitel se snažil povzbudit žáky, aby se pokusili tento izomorfismus odhalit v co nejvíce prostředích, jakkoli je to v některých jednodušší, v jiných obtížnější. Zajímalo nás, kolik a která prostředí žáci využijí, zda a kde budou v přepisu do prostředí chybovat. Výsledky analýzy jsou využitelné (1) pro učitele, protože mu dávají zpětnou vazbu týkající se porozumění jeho žáků rovnicím, (2) pro studenty, připravující se na povolání učitele, protože mohou porovnat vlastní poznatky s poznatky žáků a upravit tak svá očekávání, (3) pro učitelé těchto studentů, protože podobné výzvy a jejich analýzy mohou cíleně zařazovat do jejich přípravy a (4) pro autory učebnic, protože mohou svá zadání korigovat.

ISSN 2694-8133

3.1. Převod úlohy do prostředí Součtových trojúhelníků

Identifikovali jsme tři různé způsoby záznamu u devíti žáků, obrázek 1. V diskuzi žáků k řešení 1 zazněl argument, že čísla v trojúhelníku neodpovídají zadání úlohy. Myšlené číslo by mělo být vlevo (jako tomu je v řešení 2). Trojúhelník 1 odpovídá jinému zadání: „K číslu 2 přičtu myšlené číslo a vyjde číslo 6. Které číslo jsem přičetl?“ Vzhledem ke komutativnosti operace sčítání lze přemýšlet, zda zadání „když myšlené číslo přičtu k číslu 2“ zapsat x + 2 nebo 2 + x. Diskuze ve třídě ukázala, že žáci preferují zápis x + 2, pravděpodobně i proto, že „myslím si číslo“ zaznělo na počátku úlohy. V řešení 3 žák používá nestandardní trojúhelník. Spolužáci namítají, že nevědí, jaká pravidla v něm platí. Autor ukazuje, že 6 – 2 = ? a vysvětluje, že úlohu o myšleném čísle řeší „odzadu“ inverzní operací a neumí to do sčítacího trojúhelníku zapsat. V řešení 4 žák doplnil podmínku x – 2 = 2 a v trojúhelníku považuje za neznámá obě čísla na prvním řádku. Ukazuje, že myšlené číslo musí být 4, aby podmínka platila. Číslo určil zpaměti a chtěl „nějak“ doplnit do trojúhelníku. Jeho řešení žáci zcela nepřijali, vadí, že se v trojúhelníku neobjeví zadané „když k němu přičtu 2“. Podmínku považují za zbytečnou, za údaj navíc. Trojúhelníků s podmínkou se ve třídě objevilo několik různých, na správnosti žádného se žáci neshodli, opakovali stejné argumenty jako ve 4. řešení, obrázek 1.



Obrázek 1. Součtové trojúhelníky

3.2. Převod úlohy do prostředí Hadů

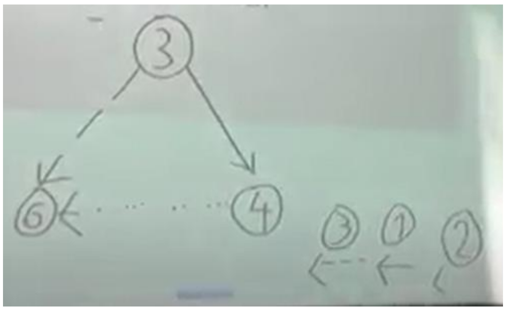
Do tohoto prostředí přepsalo úlohu pět žáků, všichni použili podobný záznam, lišil se pouze tvar šipky, obrázek 2. V diskuzi se žáci shodli, že na tvaru šipky nezáleží.

Obrázek 2. Hadi

3.3. Převod úlohy do prostředí Pavučin

Do tohoto prostředí přepsali úlohu čtyři žáci, diskutovaný záznam uvádíme na obrázku 3. První záznam komentoval autor takto: *„Když tady máme nápovědu, že tečkovaná čára jsou 2, takže od 6 se odečítají 2, takže tady máme 4, a plná čára se rovná 1, takže zase 4 – 1 = 3 a díky tomu zjistíme, že čárkovaná čára se rovná 3. A to myslím si číslo je to dole.“*

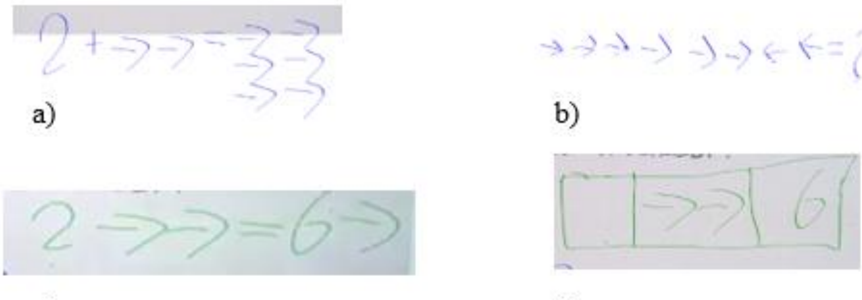
Žáci považují číslo 3 v pavučině za zbytečné, protože se v zadání neobjevuje. Autor argumentuje, že do pavučiny nějaké číslo dát musí (jinak by vyšel had). Učitel se žáků ptá, zda opravdu tuto pavučinu převedou do myšleného čísla tak, jak je myšlené číslo zadáno. Třída se shodla, pavučina je vyřešena správně, ale úloze o myšleném čísle neodpovídá. Je v ní více úloh o myšleném čísle, např. *„Myslím si číslo, když k němu přičtu 1 dostanu 4"*, že v pavučině je několik hadů.



Obrázek 3. Pavučiny

3.4. Převod úlohy do prostředí Krokování a Schody

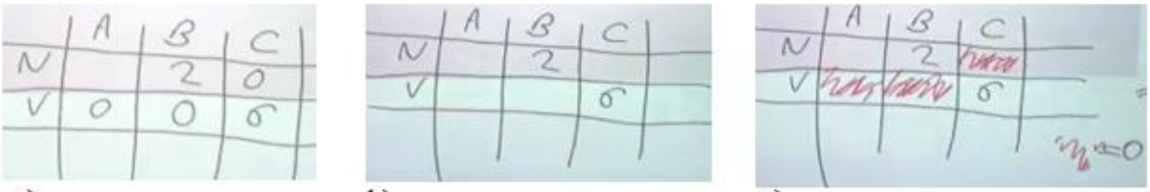
Do prostředí Krokování přepsali úlohu dva žáci, jejich záznamy uvádíme na obrázku 4a, b. V diskuzi se žáci shodli, že záznam a) je až na grafiku v pořádku: *„Kolik kroků a kterým směrem musím udělat, abych po dalších dvou krocích vpřed udělal celkem 6 kroků vpřed?"* V záznamu b) autor zná strategii řešení úloh o myšleném čísle (odzadu), do záznamu ji zapracuje, tedy od výsledku 6 odečítá operátor 2 a za neznámou považuje pravou stranu krokovací rovnice. Spolužáci namítají, že záznam neodpovídá zadání, přestože vyjde správný výsledek. Aby odpovídal, musel by to být záznam na obrázku 4c. Do diskuze vstoupil učitel s připsáním rámečků, obrázek 4d. Tím se z prostředí Krokování dostal do prostředí Schodů: *„Na jakém schodu stojím, když po dvou krocích vzhůru budu na schodu 6?"*, resp. *„Na jakém podlaží bydlím, když po přestěhování o 2 podlaží budu bydlet na podlaží 6?"* Třída souhlasí.



Obrázek 4. Krokování a Schody

3.5. Převod úlohy do prostředí Autobus

Do prostředí Autobus přepsal úlohu jeden žák, jeho záznam uvádíme na obrázku 5a: „Kolik cestujících nastoupilo na první zastávce A do autobusu, když na zastávce B nikdo nevystoupil, 2 cestující nastoupili a na konečnou přijelo 6 cestujících?" Diskutuje se uvedení nul v tabulce, nápad, aby se namísto nich uvedl nějaký nenulový počet nastoupivších a stejný počet vystoupivších. Autor vysvětloval, že chce použít pouze čísla ze zadání a nuly mu připadají vhodnější než např. + 4, - 4. Spolužák navrhuje nepsat do polí s nulami nic, obrázek 5b. Třída se shoduje, že by pak úloha měla mnoho řešení, což zadaná úloha nemá (musí vyjít 4). Objevil se nápad přidat k tabulce podmínku, obrázek 5c, následně se třída shoduje, že je tabulka 5c shodná s 5a (5a je jednodušší).



a) b) c)

Obrázek 5. Autobus

3.6. Převod úlohy do prostředí Zvířátka dědy Lesoně

Do tohoto prostředí přepsalo úlohu třináct žáků, jejich záznamy uvádíme na obrázku 6. Nejdříve se na tabuli zapsal záznam 6a. Zde žáci namítali, že by pes (zakroužkovaný symbol) neměl být v záznamu uveden, je to neznámé zvířátko: *„Jaké zvířátko musí přijít kočce na pomoc, aby byli stejně silní jako beran?"*, obrázek 6b. Následovala diskuze ohledně pořadí zvířátek na levé straně rovnice, obdobná jako diskuze v 3.1., žáci navrhovali záměnu, obr. 6c.

a) b) c)

Obrázek 6: Zvířátka dědy Lesoně

3.7. Převod úlohy do prostředí slovních úloh

Slovní úlohy nejsou specifickým didaktickým prostředím, přesto jeden žák úlohu o myšleném čísle do zadání slovní úlohy převedl, a to takto: *„Na táboře je blablabla dětí. Každé má dostat 1 koláč, ale ještě musíme dát dvoum vedoucím. Kolik je na táboře dětí?"* Jako první v diskuzi zaznělo, že „to nedává smysl" a následně, že „vypadlo to číslo 6". Autor zadání upravil: *„Na táboře je 6 koláčů a má se to rozdělit mezi několik dětí, a ještě mají dostat 2 vedoucí. Kolik je na táboře dětí?"* S tímto přepisem se třída i učitel spokojili. Předpokládáme, že nebrali v úvahu možnost dělení koláčů a měli na mysli spravedlivé dělení. Úloha by tedy mohla znít: „Mezi děti tábora a 2 vedoucí bylo spravedlivě rozděleno 6 koláčů, koláče se nedělily. Kolik dětí bylo na táboře?" Jistě bychom mohli zpochybnit reálnost situace, kdy je na táboře tak malý počet dětí, avšak žáci by jistě našli „vysvětlení".

4. Shrnutí, závěr

Z celkového počtu sedmnácti žáků převedlo úlohu o myšleném čísle třináct žáků do prostředí Zvířátek dědy Lesoně, 9 žáků do prostředí Součtových trojúhelníků, 5 žáků do prostředí Hadů, 4 žáci do prostředí Pavučin, 2 žáci do prostředí Krokování a po jednom žákovi do prostředí Autobusu a na slovní úlohu, tabulka 1. Nemáme evidenci u jednotlivých žáků, tedy nevíme, do kolika a kterých prostředí převáděli. Protože však celkový součet prostředí (pravý sloupec tabulky 1) je 35, průměrný počet prostředí na jednoho žáka je dvě.

Nejčastěji využívaným prostředím jsou Zvířátka dědy Lesoně, následují Součtové trojúhelníky, Hadi a Pavučiny. Tento výsledek zdůvodňujeme vysokým motivačním potenciálem Lesoně spolu se snadným převodem, kdy stačilo do úlohy za myšlené číslo dosadit masku a za ostatní čísla sílu zvířátek. Snadný převod nabízela i prostředí Součtových trojúhelníků a Hadů, jedná se však o strukturální prostředí, která pro žáky nemusí být tak snadno uchopitelná a zapamatovatelná. Prvkem, který rozhodoval o využití prostředí byla i zkušenost žáka s prací v daném v prostředí. Zajímavým výsledkem jsou čtyři převody do Pavučin, kde se převod ukázal jako velmi diskutabilní, a nakonec nebyl uskutečněn (Pavučiny se redukovaly na

Hady). Naopak snazší a fungující převod do Schodů nikdo nepoužil, dva žáci se do tohoto prostředí dostali až skrze Krokování. Tento výsledek můžeme vysvětlit dlouhou prodlevou od poslední práce v prostředí Krokování/Schody. Ukázkou žákovy snahy o nalezení co největšího počtu prostředí je i pokus o převod do Autobusu, který standardním prostředím pro řešení rovnic v žákově pojetí není. Žák by mohl řešit situaci na jedné zastávce, což neučinil. Dobrým pokusem s odhlédnutím od výsledku je pokus o formulaci slovní úlohy řešené úlohou o myšleném čísle, tento by mohl sloužit jako nová výzva v další aktivitě s rovnicemi související.

Tabulka 1. Použitá prostředí

prostředí	počet žáků
Děda Lesoň	13
Trojúhelníky	9
Had	5
Pavučina	4
Krokování	2
Autobus	1
Slovní úloha	1

Nejkontroverznějším a opakujícím se obsahem diskuze se ukázala být pozice neznámého čísla v Lesoňovi a Součtovém trojúhelníku, dále pak konvence zápisů ve všech prostředích včetně označení neznámého čísla.

Přepisy rovnice do různých sémantických nebo strukturálních situaci mohou dobře diagnostikovat úroveň žákova porozumění, schopnost přepsat rovnici do prostředí, ve kterém se žák nejlépe orientuje, mu pak může usnadnit řešení.

Výsledky šetření zamýšlíme využít pro přípravu budoucích učitelů, další vzdělávání učitelů a autory učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ.

Acknowledgements

Článek využívá materiálů projektu Inovace ŠVP ve školních družinách a diferenciace výuky matematiky na 1. stupni ZŠ, 2020–2022, řešeném v H-mat, o.p.s. v rámci OP Výzkum, vývoj a vzdělávání.

Literatura

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. Holt: New York, USA.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Kluwer Academic Publishers.

Hejný, M. (2018–2022). Matematika pro 1.–5. ročník ZŠ, učebnice, pracovní sešity a příručky učitele. H-mat, o.p.s.: Praha.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. PedF UK: Praha.

Kolektiv autorů. *Didaktická prostředí*. Dostupné z http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi (dostupné 22. 2. 2023).

Piaget, J., & Inhelder, B. (2010). *Psychologie dítěte*. Portál: Praha.

Slezáková, J. a kol. (2020). *Předmatematika I. Metodika pro učitele mateřských škol*. H-mat, o.p.s.: Praha.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational studies in Mathematics Education*, *48*(1), 1-20. http://www.jstor.org/stable/3483113.