ISSN 2694-8133

ZAMYŠLENÍ NAD PRAVIDLY SOUTĚŽE MATEMATICKÝ KLOKAN

Karel PASTOR[1]
[1] Palacký University, Faculty of Education (Czech Republic)
karel.pastor@upol.cz

Abstrakt

Článek se zamýšlí nad pravidly soutěže Matematický klokan, podle kterých soutěžící vstupuje do soutěže s 24 body (v kategoriích Klokánek, Benjamin, Kadet, Junior a Student), resp. s 18 body (v kategorii Cvrček), přičemž za každou nesprávnou odpověď se 1 bod odčítá. Podle těchto pravidel může soutěžící bez jakékoliv snahy úlohy řešit získat více bodů než žák, který se bude o správná řešení intenzivně pokoušet. Úkolem učitele je tedy pokusit se žáky motivovat k aktivnímu přístupu k soutěži a tím rozvinout jejich logické myšlení. Článek by mohl poskytnout pravděpodobnostní zázemí k tomuto úkolu. Ukážeme mimo jiné, s jakou pravděpodobností je možné při náhodném tipování výsledků získat například 12 bodů.

Klíčová slova: Matematický klokan, logické myšlení, pravděpodobnost.

THOUGHTS ON THE RULES OF THE MATHEMATICAL KANGAROO COMPETITION

Abstract

The paper is focused on the rules of the Mathematical Kangaroo competition. A contestant enters the competition with 24 points (in the Ecolier, Benjamin, Cadet, Junior, and Student categories) or 18 points (in the Pre-Ecolier category), with 1 point deducted for each incorrect answer. According to these rules, a contestant who does not show effort to solve the problems can get more points than a student who tries hard to find the correct solutions. The teacher's task is to motivate the students to actively approach the competition and thus develop their logical thinking. The paper could provide a probabilistic background to this task. Among other things, we will show with what probability it is possible to get, for example, 12 points when randomly guessing.

Keywords: Mathematical Kangaroo, logical thinking, probability.

1. Úvod

Nejstarší předmětovou soutěží v ČR je Matematická olympiáda, ve školním roce 2022/2023 se konal již její 72. ročník. Mezinárodní matematická olympiáda je pro nejlepší řešitele nejvyšší kategorie A (určená maturitním a předmaturitním ročníkům) pořádána od roku 1959 (Matematická olympiáda, 2023). Matematické olympiády se účastní zpravidla nejtalentovanější žáci, jedná se o poměrně náročnou soutěž, která od účastníků vyšších kategorií vyžaduje i pečlivou přípravu.

Za méně náročnou matematickou soutěží, do které se může zapojit větší počet matematicky zdatných žáků 2. stupně základních škol a příslušných ročníků víceletých gymnázií, můžeme považovat Pythagoriádu. Ve školním roce 2022/2023 proběhl její 45. ročník (Pythagoriáda, 2023).

Matematickou soutěží, která si klade za cíl zapojit pokud možno všechny žáky od 2. třídy základní školy až po maturitní ročníky středních škol, je Matematický klokan. Jedná se o mezinárodně koordinovanou soutěž pořádanou od roku 1991, která byla inspirována obdobnou australskou matematickou soutěží (Wikipedia, 2023), proto je v názvu soutěže klokan. Česká republika se do soutěže Matematický klokan zapojuje od roku 1995 (Matematický klokan ČR, 2023).

2. Zajímavá pravidla

Připomeňme si nejprve stručně pravidla soutěže Matematický klokan (Matematický klokan ČR, 2023). Soutěží se v 6 kategoriích:

- Cvrček: žáci 2. a 3. ročníku ZŠ,
- Klokánek: žáci 4. a 5. ročníku ZŠ,
- Benjamín: žáci 6. a 7. ročníku ZŠ,
- Kadet: žáci 8. a 9. ročníku ZŠ,
- Junior: studenti 1. a 2. ročníku střední školy,
- Student: studenti 3. a 4. ročníku střední školy.

Studenti víceletých gymnázií soutěží ve věkově adekvátních kategoriích (například student 2. ročníku šestiletého gymnázia soutěží v kategorii Kadet). Účastníci soutěže v kategorii Cvrček řeší 18 uzavřených úloh (6 úloh za 3 body, 6 úloh za 4 body a 6 úloh za 5 bodů). Účastníci ostatních kategorií řeší 24 úloh (8 úloh za 3 body, 8 úloh za 4 body a 8 úloh za 5 bodů).

U každé úlohy si soutěžící může vybrat z 5 nabízených odpovědí, přičemž právě jedna je správná. Za každou správně zvolenou odpověď získává soutěžící příslušný počet bodů (tedy 3, 4 nebo 5). Pokud zvolí nesprávnou odpověď, jeden bod se mu odečítá. Pokud soutěžící nezvolí žádnou odpověď, na jeho bodovém zisku se to neprojeví.

Při vstupu do soutěže získává každý účastník právě tolik bodů, kolik řeší úloh. To znamená, že účastníci kategorie Cvrček dostávají na začátku 18 bodů a účastníci ostatních kategorií bodů 24. Nejhorší možný dosažený výkon je tak ve všech kategoriích 0 bodů. Naopak nejlepším možným výsledkem v kategorii Cvrček je zisk 90 bodů, u starších kategorií je to pak 120 bodů.

Předchozí pravidla jsou zajímavá, unikátní a jsou samozřejmě pro všechny (v rámci jednotlivých kategorií) stejná. Nicméně podle těchto pravidel může dojít k relativně paradoxnímu jevu, kdy soutěžící bez jakékoliv snahy úlohy řešit získá více bodů než žák, který se bude o správná řešení intenzivně pokoušet. Nahlédněme nyní do statistik uvedených ve sbornících soutěže (Matematický klokan ČR, 2023). Tabulky 1 a 2 ukazují počty účastníků v jednotlivých kategorií a dále počet soutěžících, kteří získali stejně nebo méně než soutěžící, který se spokojí se vstupními body (tj. 18 v kategorii Cvrček a 24 v ostatních kategoriích) a o řešení příkladů se ani nepokusí.

Pokud si tuto situaci žák, který získal méně bodů, než se kterými do soutěže vstupoval, uvědomí, může příští rok na řešení úloh rezignovat, což samozřejmě neodpovídá cílům soutěže Matematický klokan.

Zajímá nás, zda k takovému rozhodnutí u žáků dochází. Na základě grafů znázorňujících bodové výsledky v jednotlivých kategoriích a ročnících uvedených ve sbornících soutěže Matematický klokan (Matematický klokan ČR, 2023) je možné se domnívat, že takových žáků příliš nebude, protože bodový výsledek 24 bodů (resp. 18 bodů) v příslušných grafech nevykazuje větších anomálií. To je velmi pozitivní zjištění. Existuje zřejmě více důvodů, proč ze strany žáků k takovému jednání nedochází, například:

Tabulka 1. Cvrček, 2013-2022

Celkový počet soutěžících	**Počet soutěžících s maximálně 18 body**	**Počet soutěžících s maximálně 18 body v %**
857 168	65 410	7,6

Tabulka 2. Klokánek – Student, 2013-2022

Kategorie	**Celkový počet soutěžících**	**Počet soutěžících s maximálně 24 body**	**Počet soutěžících s maximálně 24 body v %**
Klokánek	869 591	48 108	5,5
Benjamín	637 203	67 642	10,6
Kadet	546 244	56 994	10,4
Junior	136 564	12 108	8,9
Student	64 738	6 620	10,2

- Z tabulek 1 a 2 je patrné, že starších kategorií se účastní méně soutěžících než v kategoriích Cvrček a Klokánek, což koresponduje s tím, že na mnoha školách učitelé do soutěže Matematický klokan bohužel posílají jen matematicky nadanější žáky, od kterých lze očekávat výsledek překonávající hodnotu vstupních bodů.
- Pro žáky to může být výzva: „minulý rok jsem hodnotu vstupních bodů nepřekonal, letos se o to pokusím".
- Žáci si nedovolí o řešení se nepokusit a odevzdat nevyplněné zadání úloh.
- Učitelé odvádějí kvalitní práci a k aktivní účasti na soutěži Matematický klokan se jim daří žáky motivovat.

Domníváme se, že pro motivování žáků je dobré mít mimo jiné přehled o pravděpodobnostech při náhodných volbách odpovědí na úkoly, k čemuž slouží příklady z následující kapitoly.

3. Pravděpodobnosti

Podle strategie řešení můžeme hovořit o těchto typech soutěžících:

- *Pasivní soutěžící*: úlohy neřeší a ani nehádá jejich řešení, jeho výsledek odpovídá hodnotě vstupních bodů (tj. 18 v kategorii Cvrček a 24 v ostatních kategoriích).
- *Tipující soutěžící*: úlohy neřeší a řešení pouze hádá, může získat 0 - 90 bodů v kategorii Cvrček nebo 0 – 120 bodů ve vyšších kategoriích.
- *Aktivní soutěžící*: snaží se vyřešit všechny úlohy, může získat 0 - 90 bodů v kategorii Cvrček nebo 0 – 120 bodů ve vyšších kategoriích.

Strategie ostatních soutěžících je možné považovat za kombinaci předchozích základních kategorií.

Příklad 1. Jaká je pravděpodobnost, že tipující soutěžící v kategorii Cvrček získá plný počet bodů?

Řešení: $\boldsymbol{P} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\mathbf{18}} \cong \mathbf{2,6214 \cdot 10^{-13}}$.

Příklad 2. Jaká je pravděpodobnost, že tipující soutěžící v kategorii Klokánek získá plný počet bodů?

Řešení: $\boldsymbol{P} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\mathbf{24}} \cong \mathbf{1,6777 \cdot 10^{-17}}$.

Příklad 3. Jaká je pravděpodobnost, že tipující soutěžící v kategorii Klokánek získá 118 nebo více bodů?

Řešení: Ve skutečnosti soutěžící vzhledem k bodování příkladů nemůže získat ani 118, ani 119 bodů. Řešení Příkladu 3 je tak stejné jako řešení Příkladu 2, tj. hledaná pravděpodobnost je $\boldsymbol{P} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\mathbf{24}} \cong \mathbf{1,6777 \cdot 10^{-17}}$.

Příklad 4. Jaká je pravděpodobnost, že tipující soutěžící v kategorii Klokánek získá 116 bodů?

Řešení: Soutěžící musí uhádnout správně všechny úlohy s výjimkou jedné tříbodové. Jelikož tříbodových úloh je 8, hledaná pravděpodobnost je

$$\boldsymbol{P} = \mathbf{8} \cdot \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{23}} \cong \mathbf{5,36871 \cdot 10^{-16}}.$$

Příklad 5. Jaká je pravděpodobnost, že tipující soutěžící v kategorii Klokánek získá 0 bodů?

Řešení: $\boldsymbol{P} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\mathbf{24}} \cong \mathbf{0,00472}$.

Příklad 6. Jaká je pravděpodobnost, že tipující soutěžící v kategorii Klokánek získá 12 bodů?

Řešení: Soutěžící může 12 bodů získat dvěma způsoby:

- Uhodne řešení 3 úloh za 3 body a k tomu mu zůstanou 3 vstupní body. Odpovídající pravděpodobnost je $\boldsymbol{P_1} = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\mathbf{3}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\mathbf{21}} \cong \mathbf{0,004132}$.
- Uhodne řešení 2 úloh za 5 bodů a k tomu mu zůstanou 2 vstupní body. Odpovídající pravděpodobnost je $\boldsymbol{P_2} = \binom{8}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\mathbf{2}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\mathbf{22}} \cong \mathbf{0,008264}$.

Soutěžící tak může získat 12 bodů s pravděpodobností $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P_1} + \boldsymbol{P_2} \cong \mathbf{0,01240}$.

Příklad 7. Jaká je střední hodnota náhodné veličiny $\boldsymbol{X}$: „počet bodů získaný za tříbodové úlohy tipujícím soutěžícím v kategorii Klokánek“?

Řešení: Tipující soutěžící v průměru uhádne $8 \cdot 0,2 = 1,6$ odpovědí na tříbodové úlohy, za které získá $1,6 \cdot 3 = 4,8$ bodů a k tomu mu zůstane 1,6 vstupních bodů. Odtud

$$E(X) = 4,8 + 1,6 = 6,4.$$

Příklad 8. Jaká je střední hodnota náhodné veličiny $\boldsymbol{X}$: „počet bodů získaný za čtyřbodové úlohy tipujícím soutěžícím v kategorii Klokánek“?

Řešení: Tipující soutěžící v průměru uhádne $8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$ odpovědí na čtyřbodové úlohy, za které získá $1{,}6 \cdot 4 = 6{,}4$ bodů a k tomu mu zůstane 1,6 vstupních bodů. Proto

$$E(X) = 6{,}4 + 1{,}6 = 8.$$

Příklad 9. Jaká je střední hodnota náhodné veličiny $\boldsymbol{X}$: „počet bodů získaný za pětibodové úlohy tipujícím soutěžícím v kategorii Klokánek“?

Řešení: Tipující soutěžící v průměru uhádne $8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$ odpovědí na pětibodové úlohy, za které získá $1{,}6 \cdot 5 = 8$ bodů a k tomu mu zůstane 1,6 vstupních bodů. Tudíž

$$E(X) = 8 + 1{,}6 = 9{,}6.$$

Příklad 10. Jaká je střední hodnota náhodné veličiny $\boldsymbol{X}$: „počet bodů získaný za všechny úlohy tipujícím soutěžícím v kategorii Klokánek“?

Řešení: Z řešení Příkladů 7-9 vyplývá, že příslušná střední hodnota je

$$E(X) = 6{,}4 + 8 + 9{,}6 = 24,$$

tedy je rovna hodnotě vstupních bodů.

4. Závěr

Podle předchozích příkladů je možné doporučit následující strategii pro úlohy, které soutěžící neumí vyřešit: tipovat řešení pětibodových úloh a u těch tříbodových se spokojit se vstupními body. Jedná se samozřejmě o „statistickou“ radu, někdy bude jistě lepší, když soutěžící dá na svou intuici.

Soutěž Matematický klokan obsahuje zajímavé a pěkné úlohy, které přispívají k rozvoji kombinatorických a logických schopností žáků (1. stupně). Je výborné, pokud má žák (i ten méně talentovaný na matematiku) radost z některé úspěšně vyřešené úlohy.

Literatura

Wikipedia (2023). *Mathematical Kangaroo*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_Kangaroo (accessed on 20 October 2023).

Matematická olympiáda (2023). Retrieved from https://www.matematickaolympiada.cz/ (accessed on 20 October 2023).

Matematický klokan ČR (2023). Retrieved from https://matematickyklokan.net/ (accessed on 20 October 2023).

Pythagoriáda (2023). Retrieved from https://www.pythagoriada.cz/ (accessed on 20 October 2023).