MNOHOÚHELNÍKY A JEJICH ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ

Jaroslav BERÁNEK[1]
[1]Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta
beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

Tématem příspěvku jsou náměty pro problémovou výuku v matematice na středních a vysokých školách. Je řešen problém, jak vyjádřit zadaný rovinný geometrický útvar (např. jednoduchou lomenou čáru nebo mnohoúhelník) pomocí jediné rovnice s absolutními hodnotami v proměnných x, y. Při řešení je využíván i matematický program Derive.

Klíčová slova: Mnohoúhelník, binární relace, absolutní hodnota, funkce

POLYGONS AND THEIR ANALYTICAL REPRESENTATION

Abstract

The article offers ideas for problem teaching in mathematics at secondary schools and universities. There is being solved the problem of expressing the given planar geometrical figure (e.g. a simple polygonal line or a polygon) using one equation with absolute values of variables x, y. While solving the computer mathematical program Derive is used.

Keywords: Polygon, binary relation, function, absolute value

1. Úvod

Mezi důležité úkoly ve výuce matematiky patří rozvíjení matematického myšlení studentů a získávání jejich zájmu o studium matematiky. Studenti, kteří mají o matematiku zájem a jsou motivováni k jejímu studiu, dosahují lepších studijních výsledků, což následně ovlivňuje i jejich další studijní úsilí. Při získávání zájmu studentů o matematiku má svůj význam také samostatná „objevitelská“ činnost studentů v rámci problémové výuky matematiky. Student, který vlastním zkoumáním a úsilím „objeví“ nějaký matematický poznatek, prožívá radost z úspěchu a je motivován k dalšímu studiu a zkoumání. V tomto příspěvku je obsažen jeden možný námět vhodný pro takovou problémovou výuku. Jedná se o analytické vyjádření jednoduchých rovinných geometrických útvarů pomocí jediné výrokové formy dvou proměnných. S ohledem na rozsah příspěvku se zaměříme pouze na analytické vyjádření jednoduché lomené čáry a některých mnohoúhelníků pomocí jediné výrokové formy s absolutními hodnotami.

2. Lomená čára

Poznamenejme, že podrobnosti a důkazy k této části příspěvku lze nalézt v publikacích (Trávníček, 1961/62; Trávníček, 1992/93; Trávníček, 2008/09). Úvodem připomeneme definice základních pojmů. Lomenou čáru v rovině budeme definovat jako sjednocení úseček, pro které platí určité vlastnosti.

Definice: Nechť body $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ ($n \geq 2$) leží v jedné rovině. Lomenou čárou $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ nazveme sjednocení úseček $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}, A_{n-1}A_n$, z nichž každé dvě sousední mají společný pouze krajní bod a neleží v téže přímce. Body $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ budeme nazývat vrcholy lomené čáry, úsečky $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}, A_{n-1}A_n$ budeme nazývat strany lomené čáry.

Definice: Nechť je dána lomená čára $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$. Tato lomená čára se nazývá uzavřená lomená čára, právě když její vrcholy A_1 a A_n splynou. Lomená čára, která není uzavřená, se nazývá otevřená lomená čára.

Definice: Nechť je dána lomená čára $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$. Tato lomená čára se nazývá jednoduchá lomená čára, právě když žádné dvě její nesousední strany nemají společný bod.

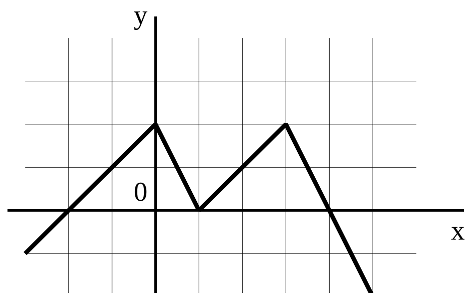
Pro účely tohoto příspěvku se omezíme na jednoduchou lomenou čáru, pro kterou žádné dva její body nemají tutéž první souřadnici, tzn. žádné dva její body neleží na přímce kolmé k ose x v kartézské soustavě souřadnic. Označíme-li souřadnice vrcholů lomené čáry $A_i = [x_i, y_i]$ pro $i = 1, \ldots, n,$ pak bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Taková lomená čára je tedy grafem jisté po částech lineární funkce a naším úkolem bude nalézt její funkční předpis pomocí jediné rovnice (stručně budeme tento předpis nazývat rovnice lomené čáry). Aby byla hledaná funkce definovaná na celé reálné ose, zavedeme ještě dva další, tzv. „směrové body" $P = [x_P, y_P]$, $Q = [x_Q, y_Q]$, pro které platí $x_P < x_1, x_n < x_Q$. Tyto body nejsou vrcholy dané lomené čáry, ale určují graf hledané funkce vlevo od bodu A_1 a vpravo od bodu A_n. Přesněji řečeno, vektor $\overrightarrow{A_1P}$ je směrovým vektorem polopřímky $\mapsto A_1P$, určující průběh lomené čáry pro $x \to -\infty$, vektor $\overrightarrow{A_nQ}$ je směrovým vektorem polopřímky $\mapsto A_nQ$, určující průběh lomené čáry pro $x \to \infty$. Určením souřadnic bodů $P, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n, Q$ je tedy jednoznačně určena lomená čára v oboru všech reálných čísel.

Určit funkční předpis pro funkci, jejímž grafickým vyjádřením je zadaná lomená čára, není obecně problém. Stačí určit rovnice přímek, ve kterých leží strany lomené čáry i polopřímky $\mapsto A_1P$, $\mapsto A_nQ$ a hledanou funkci $f(x)$ definovat pro každý interval na reálné ose zvlášť. Problémem však může být definování funkce $f(x)$ pomocí jediného funkčního předpisu. Podle Trávníčka (1961/62) je $f(x)$ funkce s absolutními hodnotami. V pracích (Trávníček, 1961/62; Trávníček, 1992/93; Trávníček, 2008/09) je odvozen následující početní postup:
Obecnou rovnici jednoduché lomené čáry, zadané souřadnicemi bodů $P, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n, Q$, je možno zapsat ve tvaru

$$y = kx + q + \sum_{i=1}^{n} k_i |x - x_i| \text{ , } i = 1, \ldots, n.$$

Při výpočtu neznámých $k, q, k_1, \ldots, k_n$ lze využít metody neurčitých koeficientů. Do poslední rovnice dosadíme souřadnice bodů $P, Q, X_1, \ldots, X_n$. Obdržíme soustavu $n + 2$ rovnic o $n + 2$ neznámých $k, q, k_1, \ldots, k_n$, ze které potřebné neurčité koeficienty vypočítáme.

Uvedeme příklad. Na obrázku 1 je znázorněna lomená čára zadaná body $P = [-1, 1], A_1 = [0,2]$, $A_2 = [1, 0], A_3 = [3, 2], Q = [4, 0]$, kde $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$.



Obrázek 1. Lomená čára k předchozímu příkladu

ISSN 2694-8133

Obecná rovnice je potom

$$y = kx + q + k_1|x| + k_2|x-1| + k_3|x-3|.$$

Po dosazení obdržíme soustavu

$$\begin{aligned}
-k + q + k_1 + 2k_2 + 4k_3 &= 1\\
q + k_2 + 3k_3 &= 2\\
k + q + k_1 + 2k_3 &= 0\\
3k + q + 3k_1 + 2k_2 &= 2\\
4k + q + 4k_1 + 3k_2 + k_3 &= 0
\end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou hodnoty: $k = -\frac{1}{2}$, $q = 5$, $k_1 = -\frac{3}{2}$, $k_2 = \frac{3}{2}$, $k_3 = -\frac{3}{2}$. Hledaná rovnice lomené čáry je potom po dosazení

$$y = -\frac{1}{2}x + 5 - \frac{3}{2}|x| + \frac{3}{2}|x-1| - \frac{3}{2}|x-3|.$$

Popsaným způsobem je velmi snadné analyticky popsat jakoukoliv zadanou lomenou čáru, popř. sestavit zadání rovnic s absolutní hodnotou s předem zvoleným řešením.

3. Mnohoúhelník

V této části se budeme věnovat analytickému vyjádření některých mnohoúhelníků. Jak dále uvidíme, poskytuje tato problematika řadu námětů k samostatné výzkumné činnosti studentů. Poznamenejme, že v celé této kapitole budeme pod označením mnohoúhelník rozumět pouze jeho hranici (v planimetrii je mnohoúhelník definován jako rovinný útvar ohraničený jednoduchou uzavřenou lomenou čarou).

3.1. Čtyřúhelník

V učebnicích jsou běžně uváděny příklady typu: Graficky znázorněte rovinný útvar, analyticky vyjádřený rovnicí a) $2|x-y| = 3$; b) $2x + 3|x-y| = 1$. Jejich řešení je snadné. V prvním případě se jedná o dvě rovnoběžky, ve druhém případě o úhel. Naskýtá se nyní přirozená otázka, zda není možné podobnou rovnicí dvou proměnných s absolutními hodnotami analyticky popsat některý mnohoúhelník. Zvolíme nejjednodušší možnost zadání $|x| + |y| = 1$. Snadno zjistíme, že tato rovnice popisuje čtverec o straně $\sqrt{2}$. Nyní je možné zadat problém, jaký útvar je popsán obecnou rovnicí

$$a|x| + b|y| = c, \tag{1}$$

kde a, b, c jsou nenulová kladná reálná čísla. Po chvíli zkoumání a snadných výpočtech zjistíme, že rovnice (1) popisuje kosočtverec se středem v počátku soustavy souřadnic. Jeho vrcholy mají souřadnice $[\frac{c}{a}, 0]$, $[-\frac{c}{a}, 0]$, $[0, \frac{c}{b}]$, $[0, -\frac{c}{b}]$, délka strany je $l = \frac{c}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$, úhlopříčky mají délky $e = \frac{2c}{a}$, $f = \frac{2c}{b}$ a pro jeho obsah platí vztah $S = \frac{2c^2}{ab}$. Velikosti vnitřních úhlů jsou určeny vztahy $\alpha = 2arctg\frac{a}{b}$, $\beta = \pi - \alpha$. Odvození všech uvedených vztahů není náročné a bez obtíží je zvládne student střední školy. Z uvedeného lze sestavovat zajímavé úlohy.

ISSN 2694-8133

Uvedeme příklad.

Příklad 1: Určete rovnici kosočtverce s vnitřními úhly o velikostech 60° a 120° a obsahem $S = 6\sqrt{3}$.

Označme α úhel o velikosti 60°. Z výše uvedeného vztahu pro α plyne $tg\frac{\alpha}{2} = tg30° = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tedy musí platit $a = t,\ b = t\sqrt{3}$, kde t je reálný nenulový parametr. Dosadíme do vztahu pro obsah S a upravíme:

$$S = \frac{2c^2}{ab} = \frac{2c^2}{t^2\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} \Rightarrow c = 3t.$$

Po dosazení do rovnice (1) a vydělení parametrem t obdržíme hledanou rovnici kosočtverce

$$|x| + \sqrt{3}\,|y| = 3.$$

□

O analytickém vyjádření čtverce už byla zmínka. Nyní je možné se rovnicí čtverce zabývat obecněji. Vyjdeme z rovnice (1). Je zřejmé, že jedině v případě $a = b$ vycházejí vnitřní úhly kosočtverce pravé, jedná se tedy o čtverec. Obecná rovnice čtverce je tedy

$$|x| + |y| = c,\ \text{kde}\ c \in \mathbb{R},\ c > 0.$$

Parametr c určuje jak délku strany, tak následně i obsah čtverce. Dosadíme-li do vztahů pro kosočtverec $a = b = 1$, pak délka strany čtverce je $c\sqrt{2}$ a obsah je roven $2c^2$. Ze vztahu $S = 2c^2$ lze dále vypočítat $c = \sqrt{\frac{S}{2}}$; proto je možné okamžitě napsat rovnici čtverce s předem daným obsahem: $|x| + |y| = \sqrt{\frac{S}{2}}$. Např. čtverec s obsahem $S = 8$ má rovnici $|x| + |y| = 2$.

Prozatím jsme se zabývali analýzou obecné rovnice (1). Poznamenejme, že na levé straně této rovnice nemůže být znaménko minus, neboť by se nejednalo o mnohoúhelník, ale o dva úhly. Nyní je možno zadat problém, co se stane, když rovnici (1) změníme na tvar

$$a\,|x| + b\,|x - y| = c,\ \text{kde}\ c \in \mathbb{R},\ c > 0. \tag{2}$$

V tomto případě výpočtem zjistíme (technické detaily s ohledem na rozsah nebudeme uvádět), že se jedná o kosodélník, středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic. Jeho vrcholy mají souřadnice $[0, -\frac{c}{b}]$, $[\frac{c}{a}, \frac{c}{a}]$, $[0, \frac{c}{b}]$, $[-\frac{c}{a}, -\frac{c}{a}]$; délky stran jsou určeny vztahy

$$u = \frac{c}{ab}\sqrt{(a+b)^2 + b^2},\quad v = \frac{c}{ab}\sqrt{(a-b)^2 + b^2}.$$

Výšku kosodélníku určíme např. jako vzdálenost vrcholu $[0, -\frac{c}{b}]$ od přímky, v níž leží protější strana (má rovnici $y = \frac{a+b}{b}x + \frac{c}{b}$). Po výpočtu máme $v = \frac{2c}{\sqrt{(a+b)^2 + b^2}}$. Nyní není obtížné odvodit vztah pro obsah kosodélníku: $S = \frac{2c^2}{ab}$. Pomocí znalostí z analytické geometrie lze určit i velikosti vnitřních úhlů (známe-li souřadnice vrcholů). Tyto vztahy již uvádět nebudeme.

ISSN 2694-8133

Zajímavým problémem je nyní zkoumat analogickým způsobem další možnosti modifikace rovnice (2):

$$a\,|x| + b\,|x + y| = c, \qquad a\,|y| + b\,|x - y| = c, \qquad a\,|y| + b\,|x + y| = c.$$

Znaménko mezi absolutními hodnotami na levé straně nemůžeme ovšem změnit na minus (jednalo by se o dva úhly). Ve všech třech uvedených modifikacích se jedná opět o kosodélník. Zajímavé jsou vztahy mezi čtyřmi kosodélníky popsanými rovnicí (2) a jejími třemi modifikacemi, ponecháme-li u všech tytéž hodnoty *a, b, c.* Uvedeme příklad, kdy popíšeme kosodélníky určené rovnicemi:

a) $2\,|x| + |x - y| = 4,$

b) $2\,|x| + |x + y| = 4,$

c) $2\,|y| + |x - y| = 4,$

d) $2\,|y| + |x + y| = 4.$

Délky stran, obsah i velikosti vnitřních úhlů všech čtyř kosodélníků je stejný. Určíme jen souřadnice vrcholů: V případě a) jsou vrcholy $[2, 2]$, $[0, 4]$, $[-2, -2]$, $[0, -4]$, v případě b) jsou souřadnice vrcholů $[2, -2]$, $[0, 4]$, $[-2, 2]$, $[0, -4]$. Oba kosodélníky jsou souměrné podle obou souřadnicových os. V případě c) jsou vrcholy $[2, 2]$, $[-4, 0]$, $[-2, -2]$, $[4, 0]$, v případě d) pak $[2, -2]$, $[4, 0]$, $[-2, 2]$, $[-4, 0]$. Také tyto dva kosodélníky jsou osově souměrné podle osy x i osy y.

Jako další námět pro výzkumný přístup lze zkoumat situaci, kdy kosodélník určený rovnicí (2) přejde v obdélník (víme už, že pro $a \neq b$ nemůže již být čtvercem). Při řešení využijeme faktu, že obdélník je pravoúhelníkem. Napíšeme rovnice přímek, v nichž leží jedna dvojice sousedních stran a vyřešíme, kdy budou na sebe kolmé. Rovnice přímek ve směrnicovém tvaru jsou

$$y = \frac{a+b}{b}x - \frac{c}{b}, \quad y = \frac{b-a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Součin směrnic položíme roven -1 a vypočítáme $a = \sqrt{2}\,b$. Druhé možné řešení $a = -\sqrt{2}\,b$ nevyhovuje, neboť v rovnici (2) jsou u obou absolutních hodnot znaménka plus. Hodnoty b, c jsou libovolná nenulová reálná čísla. Po dosazení $\sqrt{2}\,b\,|x| + b\,|x - y| = c$. Číslo $\frac{c}{b}$ označíme C; rovnice obdélníka je pak tvaru

$$\sqrt{2}\,|x| + |x - y| = C.$$

Délky stran jsou $u = C\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $v = C\sqrt{2-\sqrt{2}}$, obsah je roven $S = C^2\sqrt{2}$. Poznamenejme, že analogické rovnice obdélníka obdržíme i ze všech tří modifikací rovnice (2).

Příklad 2: Napište rovnici obdélníka o obsahu $S = 4\sqrt{2}$.
$S = 4\sqrt{2} = C^2\sqrt{2}$, odtud $C = 2$ (hodnota -2 nevyhovuje). Rovnice je $\sqrt{2}\,|x| + |x - y| = 2$.

Posledním námětem ke zkoumání studentů je v části o čtyřúhelnících analýza obecné rovnice

$$a\,|x + y| + b\,|x - y| = c, \text{ kde } a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0, c > 0.$$

Řešení již nebudeme uvádět; poznamenejme jen, že také v tomto případě dostaneme kosodélník. Další poznámkou je možnost, že by v absolutních hodnotách místo součtu nebo rozdílu argumentů *x, y* mohl být zadán jejich součin nebo i podíl. V tomto případě ale nedostaneme žádný základní geometrický útvar (mnohoúhelník nebo úhel,...). Zkoumání takových rovnic ale má také svůj význam, alespoň pro procvičení řešení rovnic s absolutními hodnotami.

3.2. Šestiúhelník

V předchozí části jsme se zabývali rovnicemi obsahujícími lineární kombinaci dvou absolutních hodnot, jejichž argumenty jsou $x, y, x + y$ nebo $x - y$. Ve všech případech (jsou-li koeficienty a, b, c kladná čísla a před oběma absolutními hodnotami je znaménko plus) dostáváme rovnice čtyřúhelníku. Problémem, kterým se studenti mohou zabývat, je otázka, co bude popisovat analogická rovnice, přidáme-li jednu absolutní hodnotu stejného tvaru jako v předchozím. Jedná se tedy o následující typy rovnic (vždy platí $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$):

$$a\,|x| + b\,|y| + c\,|x + y| = d,$$

$$a\,|x| + b\,|y| + c\,|x - y| = d,$$

$$a\,|x| + b\,|x + y| + c\,|x - y| = d,$$

$$a\,|y| + b\,|x + y| + c\,|x - y| = d.$$

Už dopředu můžeme konstatovat, že vždy se jedná o rovnice šestiúhelníku. Jeho charakterizací se nyní budeme zabývat. Vzhledem k rozsahu příspěvku podrobně rozebereme pouze poslední z rovnic, tj. rovnici

$$a\,|y| + b\,|x + y| + c\,|x - y| = d. \tag{3}$$

Řešení rovnice (3) je již obtížnější. I když nepřesahuje znalosti studentů střední školy, je poměrně pracné a vyžaduje od studentů při obecném řešení nejen pozornost při výpočtu, ale i značnou dávku trpělivosti a úsilí. Uvedeme pouze výsledky. Vrcholy šestiúhelníku mají následující souřadnice:

$$A = \left[\frac{d}{a+2b}, \frac{d}{a+2b}\right],\ B = \left[\frac{-d}{a+2c}, \frac{d}{a+2c}\right],\ C = \left[\frac{-d}{b+c}, 0\right],\ D = \left[\frac{-d}{a+2b}, \frac{-d}{a+2b}\right],$$

$$E = \left[\frac{d}{a+2c}, \frac{-d}{a+2c}\right],\quad F = \left[\frac{d}{b+c}, 0\right].$$

Je nutno si uvědomit, že všechny výrazy ve jmenovatelích zlomků nejsou rovny nule, protože podle předpokladu $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. Pro délky stran lze pak odvodit vztahy (pod odmocninou jsou vždy kladná čísla):

$$|AF| = |CD| = \frac{d}{(a+2b)(b+c)}\sqrt{(a-c)^2 + 2b^2 + c^2 + 2ab},$$

$$|AB| = |DE| = \frac{2d}{(a+2b)(a+2c)}\sqrt{(a+c)^2 + 2b^2 + c^2 + 2ab},$$

$$|BC| = |EF| = \frac{d}{(a+2c)(b+c)}\sqrt{(a-c)^2 + 2b^2 + c^2 + 2ab}.$$

Vztahy pro vnitřní úhly lze určit pomocí analytické geometrie ze znalostí souřadnic vrcholů šestiúhelníku. I když ani tyto vztahy nebudeme uvádět (jsou poměrně komplikované), lze určit, že tyto vnitřní úhly nikdy nejsou rovny 60°, proto šestiúhelník určený rovnicí (3) nemůže být pravidelný. Lze se o tom přesvědčit i porovnáním všech tří vypočtených délek stran, které nemohou být všechny tři sobě rovné. Výpočet je ale ještě komplikovanější, jak lze vytušit ze složitosti vztahů pro délky stran. Budeme tedy zkoumat, jak se co nejvíce „přiblížit“ pravidelnému šestiúhelníku. Poměrně snadno lze určit ze znalostí souřadnic vrcholů vzdálenosti všech vrcholů od počátku soustavy souřadnic. Porovnáním těchto vzdáleností (všechny výpočty by opět měl zvládnout středoškolák) vychází poměrně jednoduché tvrzení, že tato vzdálenost od počátku je nutně $\frac{d}{2b}$. Jinými slovy: Pokud mají být všechny vrcholy šestiúhelníku definovaného rovnicí (3) stejně vzdáleny od počátku, musí ležet na kružnici o poloměru $\frac{d}{2b}$.

Při výpočtu rovněž obdržíme následující podmínky: $c = b$, $a = 2b(\sqrt{2} - 1)$, b je kladný reálný parametr. Po dosazení těchto podmínek do vztahů pro délky stran, obdržíme po dosti obtížném výpočtu, vyžadujícím opět úsilí a trpělivost, poměrně jednoduché vztahy:

$$|AF| = |CD| = \frac{d}{2b}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,, \qquad |AB| = |DE| = \frac{d}{2b}\sqrt{2}\,, \qquad |BC| = |EF| = \frac{d}{2b}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.$$

První a třetí vztah vyjadřuje tutéž hodnotu, tedy čtyři ze stran mají stejnou délku. Strany $|AB|, |DE|$ ale tutéž velikost mít nemohou. I když tedy dosadíme vypočtené podmínky ($c = b$, $a = 2b(\sqrt{2} - 1)$ do rovnice (3) a rovnici upravíme (vydělíme nenulovým číslem $2b$), nebude šestiúhelník definovaný touto rovnicí

$$(\sqrt{2}-1)\ |y| + \frac{1}{2}\ |x+y| + \frac{1}{2}\ |x-y| = \frac{d}{2b}$$

zcela pravidelný. Bude mít všechny vrcholy ve stejné vzdálenosti $\frac{d}{2b}$ od počátku, shodné čtyři strany AF, CD, BC, EF o velikosti $\frac{d}{2b}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ a shodné zbylé dvě strany AB, DE o velikosti $\frac{d}{2b}\sqrt{2}$. Vrcholy C, F leží na ose x a strany AB, DE jsou s osou x rovnoběžné. Rovnoběžné jsou přitom každé dvě protější strany.

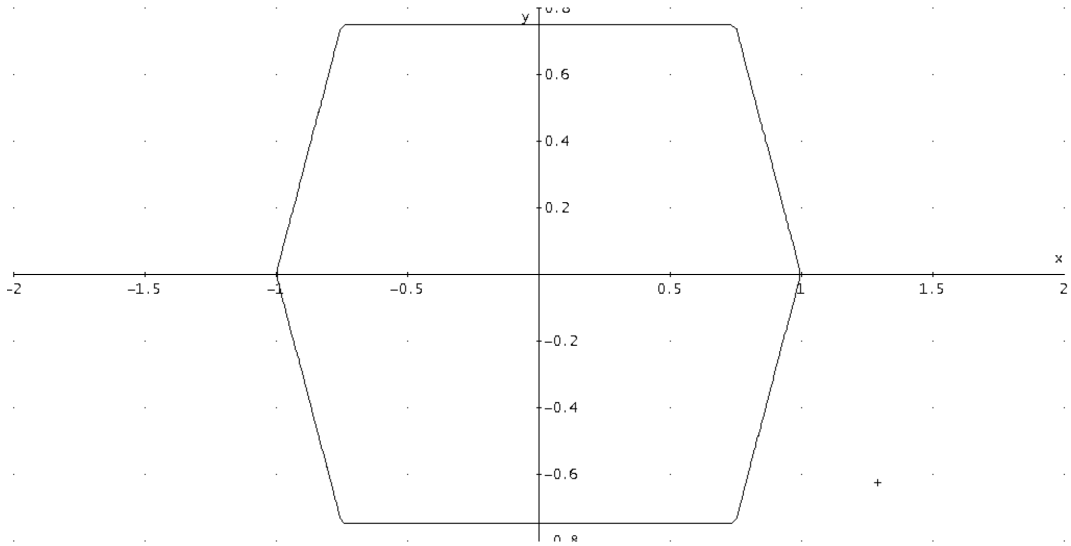
Příklad 3: Určete souřadnice vrcholů a délky stran šestiúhelníku popsaného rovnicí

$$2|y| + 3|x+y| + 3|x-y| = 6.$$

Ze vztahů v předchozím textu po dosazení vypočítáme:

$$A = \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right],\ B = \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right],\ C = [-1, 0],\ D = \left[-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right],\ E = \left[\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right],\ F = [1, 0].$$

Délky stran AF, CD, BC a EF jsou $\frac{\sqrt{10}}{4}$, délky stran AB, DE jsou $\frac{3}{2}$ (viz obr. 2, vytvořený programem Derive).



Obrázek 2. Šestiúhelník z příkladu 3

Poznámka: Při analýze geometrického útvaru popsaného rovnicí s více absolutními hodnotami je výhodné užít i znázornění pomocí některého matematického softwaru, např. Maple nebo Derive. Oba tyto matematické programy, stejně jako mnohé další (Matlab, Cabri, ...) jsou v dnešní době pro matematiky nepostradatelné a proto by se s nimi měli seznamovat i studenti, zejména budoucí učitelé matematiky.

V předchozím textu jsme se zabývali analýzou šestiúhelníku popsaného rovnicí (3). Pro ostatní tři rovnice uvedené na počátku této části (např. $a\,|x| + b\,|y| + c\,|x - y| = d$) by se postupovalo analogicky. Stále ale přetrvává problém, jak analyticky popsat pravidelný šestiúhelník, což je opět téma k výzkumnému přístupu a problémové výuce. Zřejmě v absolutních hodnotách v rovnici (3) a rovnicích modifikovaných nemohou být jen argumenty $x, y, x + y, x - y$. Jak se po chvíli zkoumání ukáže, je nutno pro šestiúhelník *ABCDEF* začít od průvodičů, tj. od přímek *AD, BE, CF*, které pro zjednodušení procházejí počátkem soustavy souřadnic. Nechť přímkou *AD* je osa *x*, přímka *BE* musí svírat s osou *s* úhel o velikosti 60°, zatímco přímka *CF* musí svírat s osou *s* úhel o velikosti –60°. Přímky *BE, CF* mají po řadě rovnice $y = \sqrt{3}\,x$, $y = -\sqrt{3}\,x$. Nechť je hledaný pravidelný šestiúhelník vepsán do kružnice o poloměru *r*. Souřadnice jeho vrcholů jsou

$$A=[r,\ 0],\ B=\left[\frac{r}{2},\frac{\sqrt{3}}{2r}\right],\ C=\left[-\frac{r}{2},\frac{\sqrt{3}}{2r}\right],\ D=[-r,\ 0],\ E=\left[-\frac{r}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2r}\right],\ \ F=\left[\frac{r}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2r}\right].$$

V absolutních hodnotách musí být zřejmě výrazy $y \pm \sqrt{3}x$; obecná rovnice je např.

$$a\,|y| + b\left|y + \sqrt{3}x\right| + c\left|y - \sqrt{3}x\right| = d. \tag{4}$$

Je třeba nalézt hodnoty *a, b, c, d*. Do rovnice (4) dosadíme za *x, y* souřadnice vrcholů pravidelného šestiúhelníku, které byly výše uvedeny, a upravíme. Při výpočtu je třeba dát pozor na znaménka argumentů v absolutních hodnotách; např. pro $y \geq 0,\ y + \sqrt{3}x \geq 0,\ y - \sqrt{3}x < 0$ má po odstranění absolutních hodnot rovnice (4) tvar

$$ay + by + \sqrt{3}\,bx - cy + \sqrt{3}\,cx = d.$$

Po dosazení souřadnic vhodných bodů A, B (vzhledem k podmínkám $y \geq 0$, $y+\sqrt{3}x \geq 0$, $y-\sqrt{3}x < 0$) dostaneme po úpravě rovnice $\sqrt{3}\,br + \sqrt{3}\,cr = d$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}r + b\sqrt{3}r = d$. Provedeme-li tyto výpočty pro všechny možnosti (vzhledem k symetrii stačí uvažovat $y \geq 0$), obdržíme soustavu tří rovnic:

$$\sqrt{3}\,br + \sqrt{3}\,cr = d$$
$$\frac{a\sqrt{3}}{2}r + b\sqrt{3}r = d$$
$$\frac{a\sqrt{3}}{2}r + c\sqrt{3}r = d\,.$$

Jejím řešením jsou hodnoty: $a = \frac{d}{\sqrt{3}r}$, $b = \frac{d}{2\sqrt{3}r}$, $c = \frac{d}{2\sqrt{3}r}$. Po dosazení do (4) a úpravě máme

$$2\,|y| + \left|y+\sqrt{3}x\right| + \left|y-\sqrt{3}x\right| = 2\sqrt{3}\,r,$$ kde r je parametr (délka strany).

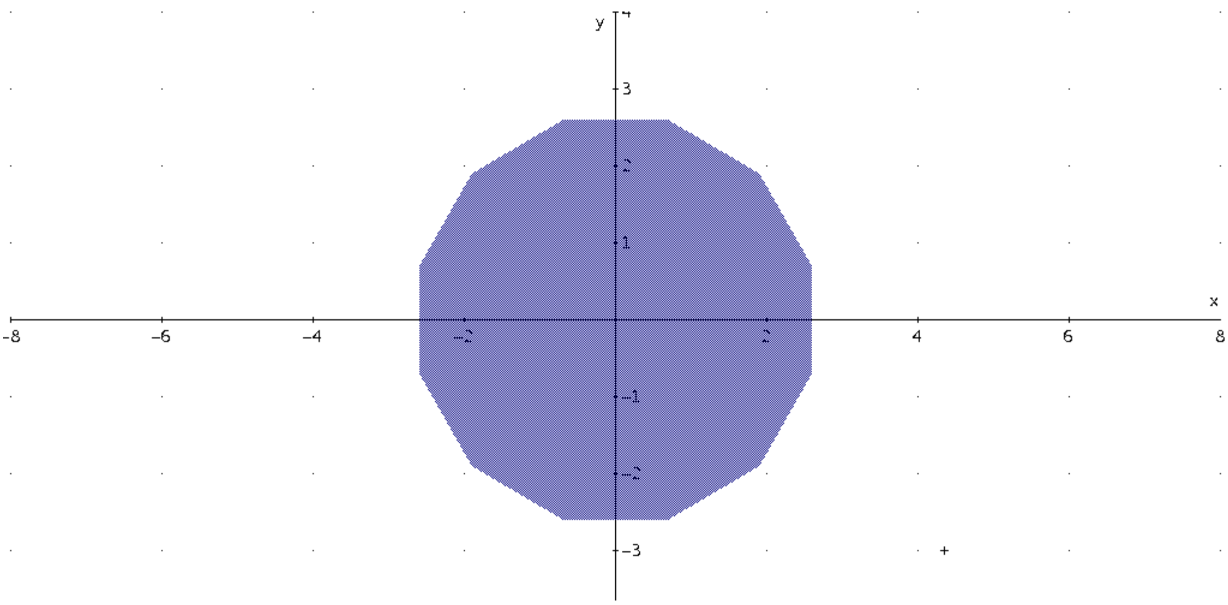
Poslední rovnice je analytickým vyjádřením pravidelného šestiúhelníku. Existuje ještě jedna možnost, kdy dva vrcholy leží na ose y. V tom případě analogicky odvodíme rovnici

$$2\,|x| + \left|x+\sqrt{3}y\right| + \left|x-\sqrt{3}y\right| = 2\sqrt{3}\,r.$$

Oba pravidelné šestiúhelníky popsané posledními dvěma rovnicemi jsou při stejném r shodné, pouze pootočené o 30°. Proto všechny body v rovině, které vyhovují soustavě nerovnic

$$2\,|y| + \left|y+\sqrt{3}x\right| + \left|y-\sqrt{3}x\right| \leq 2\sqrt{3}\,r$$
$$2\,|x| + \left|x+\sqrt{3}y\right| + \left|x-\sqrt{3}y\right| \leq 2\sqrt{3}\,r$$

jsou body pravidelného dvanáctiúhelníku (i se svou vnitřní oblastí). Na obr. 3 vytvořeném opět pomocí programu Derive je zobrazen takový pravidelný dvanáctiúhelník s parametrem $r = 3$.



Obrázek 3. Dvanáctiúhelník

ISSN 2694-8133

3.3. Osmiúhelník

V této části uvedeme již jen výsledek zkoumání. V analogii s předchozími úvahami, kdy rovnice se dvěma absolutními hodnotami popisovala čtyřúhelník a rovnice se třemi absolutními hodnotami šestiúhelník, je přirozenou otázkou vyzkoušet, jaký útvar bude popsán rovnicí

$$a\,|x| + b\,|y| + c\,|x+y| + d\,|x-y| = e.$$

Po vyřešení (opět i za přispění počítačového programu, např. MAPLE nebo DERIVE) zjistíme, že se jedná o osmiúhelník. Popis souřadnic vrcholů a délky stran si již odpustíme. Dalším problémem je nalezení rovnice pravidelného osmiúhelníku. V práci [1] je uvedena rovnice pravidelného osmiúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru 1:

$$|x| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x+y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x-y| = \sqrt{2}+1.$$

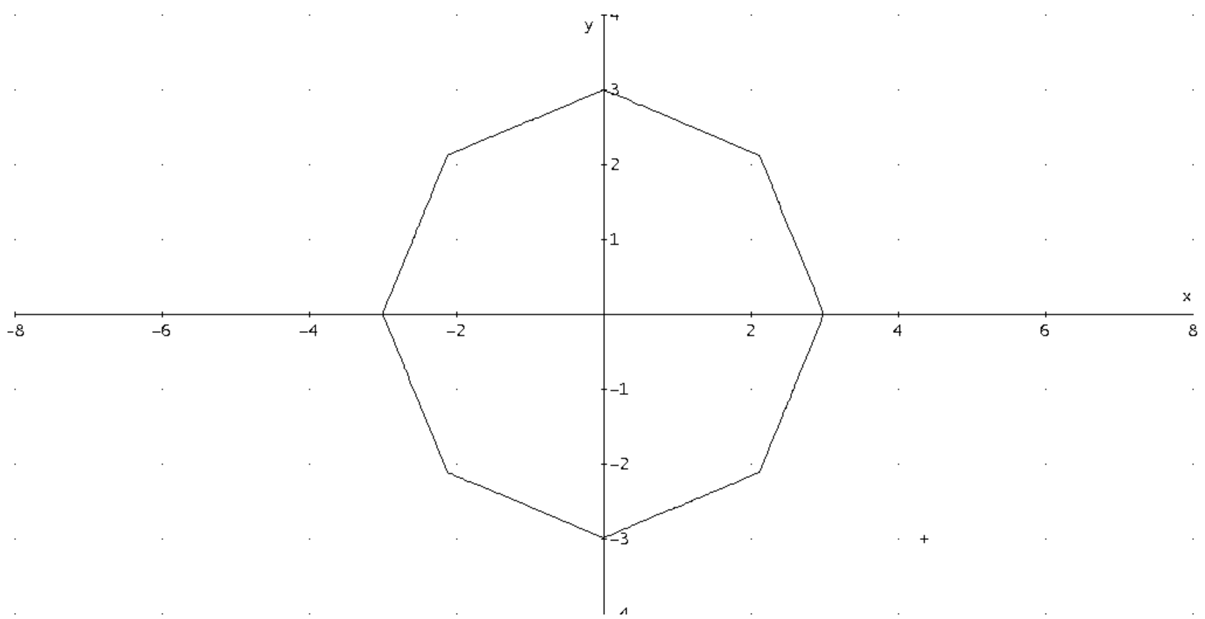
Analogickým postupem jako u šestiúhelníku (za pomoci průvodičů) lze obecně odvodit rovnice pravidelného osmiúhelníku s předem zadanými parametry. Je-li zadán poloměr r kružnice pravidelnému osmiúhelníku opsané, má jeho analytické vyjádření tvar

$$|x| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x+y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x-y| = (\sqrt{2}+1)\,r.$$

Je-li zadána délka s strany pravidelného osmiúhelníku, pak má rovnice tvar

$$|x| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x+y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x-y| = (2+\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot s.$$

Na obrázku 4 je znázorněn pomocí programu Derive pravidelný osmiúhelník s parametrem $r = 3$.



Obrázek 4. Osmiúhelník

4. Závěr

Zkoumání geometrických útvarů definovaných rovnicemi s absolutními hodnotami je velmi rozsáhlé a poskytuje řadu námětů pro zkoumání studentů (viz např. Hejný, 1990; Odvárko, 2002). V příspěvku jsme uvedli pouze situace, kdy daná rovnice popisovala lomenou čáru nebo mnohoúhelník. V případě, že bychom do absolutních hodnot zařadili i jiné výrazy než x, y, $x + y$, $x - y$, nebo že bychom mezi jednotlivé absolutní hodnoty zařadili také jiná znaménka než plus, dostali bychom velmi rozličné geometrické útvary. Dalším problémem je, zda lze takto popsat pomocí jediné rovnice i jiné n-úhelníky než v textu popsané, např. pětiúhelník. Tyto problémy se zdají být otevřené a jsou výzvou pro další, studentům přístupný, výzkum.

Literatura

Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky.* 2. vyd. Slovenské pedagogické nakladateľstvo: Bratislava.

Odvárko, O. (2002). *Matematika pro gymnázia: funkce*. 3. upr. vyd. Prometeus: Praha.

Trávníček, S. (1961/62). O jedné definici funkce. *Rozhledy matematicko-fyzikální, 41*. 97–100, 147–152.

Trávníček, S. (1992/93). Sestavování úloh s absolutní hodnotou. *Matematika-fyzika-informatika, 2*. 69–74.

Trávníček, S. (2008/09). Lomené čáry jako grafy funkcí s absolutními hodnotami. *Matematika-fyzika-informatika, 18*. 426–432.