Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics

The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Olomouc 2023

ISSN 2694-8133

Univerzita Palackého v Olomouci
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

ve spolupráci s

Jednotou českých matematiků a fyziků
pobočný spolek Olomouc

Elementary Mathematics Education Journal

ročník 5, číslo 1

2023

Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

in cooperation with

The Union of Czech Mathematicians and Physicists
Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 5, No. 1

2023

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Vydavatel: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika

Adresa a kontakty:
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Informace pro autory:
Časopis uveřejňuje články k aktuálním problémům z teorie elementární matematiky, o inovacích, trendech a výzkumech v primárním a preprimárním matematickém vzdělávání. Jednotlivé články jsou anonymně posuzovány dvěma odborníky v recenzním řízením typu „double-blind peer review“. Další informace a podrobné pokyny pro autory jsou k dispozici na webu: http://emejournal.upol.cz.

Za kvalitu obrázků, jazykovou správnost, dodržení bibliografické normy a dodržování publikační etiky odpovídají autoři jednotlivých článků.

Časopis vychází dvakrát ročně.

Ročník 5, číslo 1

ISSN 2694-8133

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Publisher: Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Editor-in-chief: David Nocar (Palacký University Olomouc, Czech Republic)

Address and contacts:
Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic
emej@upol.cz

Information for authors:
The journal publishes articles on current issues in the theory of elementary mathematics, about innovation, trends and research in primary and pre-primary mathematics education. Each article is reviewed by two anonymous experts ("double-blind peer review"). More information and other instructions for authors are available at: http://emejournal.upol.cz.

The authors of the articles are responsible for the quality of the images, language accuracy, compliance with bibliographic standards and adherence to publication ethics.

The journal is published twice a year.

Vol. 5, No. 1

ISSN 2694-8133

Obsah

Jaroslav BERÁNEK: *Mnohoúhelníky a jejich analytické vyjádření* 6

Reza HABIBI: *A note on dividing angles to equal parts* 17

Jana HNATOVÁ: *Využitie technológie rozšírenej reality pri tvorbe a riešení slovnej úlohy z matematiky študentmi učiteľstva pre primárne vzdelávanie* 22

Karel PASTOR: *Zamyšlení nad pravidly soutěže Matematický klokan* 32

Anton PRAYITNO: *The constructing concepts of fraction: represented by circles, rectangles, and number lines* 37

Elena RAILEAN: *Computer-based assessment as a method for enforcing professional competencies of in-service primary math teachers* 57

Büşra USLUOĞLU, Veli TOPTAŞ: *Investigation of the effects of creative games and activities on mathematics attitudes and achievements ın prımary school* 65

Renáta ZEMANOVÁ: *Rovnice v konstruktivistické výuce 1. stupně základní školy* 74

Content

Jaroslav BERÁNEK: *Polygons and their analytical representation* 6

Reza HABIBI: *A note on dividing angles to equal parts* 17

Jana HNATOVÁ: *Utilization of augmented reality technology in creating and solving a mathematical word problem by primary education teacher trainees* 22

Karel PASTOR: *Thoughts on the rules of the Mathematical kangaroo competition* 32

Anton PRAYITNO: *The constructing concepts of fraction: represented by circles, rectangles, and number lines* 37

Elena RAILEAN: *Computer-based assessment as a method for enforcing professional competencies of in-service primary math teachers* 57

Büşra USLUOĞLU, Veli TOPTAŞ: *Investigation of the effects of creative games and activities on mathematics attitudes and achievements ın prımary school* 65

Renáta ZEMANOVÁ: *The equation in constructivist learning at primary school* 74

ISSN 2694-8133

MNOHOÚHELNÍKY A JEJICH ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ

Jaroslav BERÁNEK[1]
[1]Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta
beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

Tématem příspěvku jsou náměty pro problémovou výuku v matematice na středních a vysokých školách. Je řešen problém, jak vyjádřit zadaný rovinný geometrický útvar (např. jednoduchou lomenou čáru nebo mnohoúhelník) pomocí jediné rovnice s absolutními hodnotami v proměnných x, y. Při řešení je využíván i matematický program Derive.

Klíčová slova: Mnohoúhelník, binární relace, absolutní hodnota, funkce

POLYGONS AND THEIR ANALYTICAL REPRESENTATION

Abstract

The article offers ideas for problem teaching in mathematics at secondary schools and universities. There is being solved the problem of expressing the given planar geometrical figure (e.g. a simple polygonal line or a polygon) using one equation with absolute values of variables x, y. While solving the computer mathematical program Derive is used.

Keywords: Polygon, binary relation, function, absolute value

1. Úvod

Mezi důležité úkoly ve výuce matematiky patří rozvíjení matematického myšlení studentů a získávání jejich zájmu o studium matematiky. Studenti, kteří mají o matematiku zájem a jsou motivováni k jejímu studiu, dosahují lepších studijních výsledků, což následně ovlivňuje i jejich další studijní úsilí. Při získávání zájmu studentů o matematiku má svůj význam také samostatná „objevitelská“ činnost studentů v rámci problémové výuky matematiky. Student, který vlastním zkoumáním a úsilím „objeví“ nějaký matematický poznatek, prožívá radost z úspěchu a je motivován k dalšímu studiu a zkoumání. V tomto příspěvku je obsažen jeden možný námět vhodný pro takovou problémovou výuku. Jedná se o analytické vyjádření jednoduchých rovinných geometrických útvarů pomocí jediné výrokové formy dvou proměnných. S ohledem na rozsah příspěvku se zaměříme pouze na analytické vyjádření jednoduché lomené čáry a některých mnohoúhelníků pomocí jediné výrokové formy s absolutními hodnotami.

2. Lomená čára

Poznamenejme, že podrobnosti a důkazy k této části příspěvku lze nalézt v publikacích (Trávníček, 1961/62; Trávníček, 1992/93; Trávníček, 2008/09). Úvodem připomeneme definice základních pojmů. Lomenou čáru v rovině budeme definovat jako sjednocení úseček, pro které platí určité vlastnosti.

Definice: Nechť body $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n$ ($n \geq 2$) leží v jedné rovině. Lomenou čárou $A_1A_2 ... A_{n-1}A_n$ nazveme sjednocení úseček $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-2}A_{n-1}, A_{n-1}A_n$, z nichž každé dvě sousední mají společný pouze krajní bod a neleží v téže přímce. Body $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n$ budeme nazývat vrcholy lomené čáry, úsečky $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-2}A_{n-1}, A_{n-1}A_n$ budeme nazývat strany lomené čáry.

Definice: Nechť je dána lomená čára $A_1A_2…A_{n-1}A_n$. Tato lomená čára se nazývá uzavřená lomená čára, právě když její vrcholy A_1 a A_n splynou. Lomená čára, která není uzavřená, se nazývá otevřená lomená čára.

Definice: Nechť je dána lomená čára $A_1A_2...A_{n-1}A_n$. Tato lomená čára se nazývá jednoduchá lomená čára, právě když žádné dvě její nesousední strany nemají společný bod.

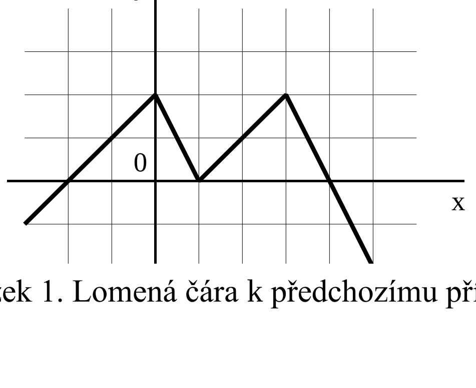
Pro účely tohoto příspěvku se omezíme na jednoduchou lomenou čáru, pro kterou žádné dva její body nemají tutéž první souřadnici, tzn. žádné dva její body neleží na přímce kolmé k ose x v kartézské soustavě souřadnic. Označíme-li souřadnice vrcholů lomené čáry $A_i = [x_i, y_i]$ pro $i = 1, ..., n,$ pak bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Taková lomená čára je tedy grafem jisté po částech lineární funkce a naším úkolem bude nalézt její funkční předpis pomocí jediné rovnice (stručně budeme tento předpis nazývat rovnice lomené čáry). Aby byla hledaná funkce definovaná na celé reálné ose, zavedeme ještě dva další, tzv. „směrové body“ $P = [x_P, y_P]$, $Q = [x_Q, y_Q]$, pro které platí $x_P < x_1, x_n < x_Q$. Tyto body nejsou vrcholy dané lomené čáry, ale určují graf hledané funkce vlevo od bodu A_1 a vpravo od bodu A_n. Přesněji řečeno, vektor $\overrightarrow{A_1P}$ je směrovým vektorem polopřímky $\mapsto A_1P$, určující průběh lomené čáry pro $x \to -\infty$, vektor $\overrightarrow{A_nQ}$ je směrovým vektorem polopřímky $\mapsto A_nQ$, určující průběh lomené čáry pro $x \to \infty$. Určením souřadnic bodů $P, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, Q$ je tedy jednoznačně určena lomená čára v oboru všech reálných čísel.

Určit funkční předpis pro funkci, jejímž grafickým vyjádřením je zadaná lomená čára, není obecně problém. Stačí určit rovnice přímek, ve kterých leží strany lomené čáry i polopřímky $\mapsto A_1P$, $\mapsto A_nQ$ a hledanou funkci $f(x)$ definovat pro každý interval na reálné ose zvlášť. Problémem však může být definování funkce $f(x)$ pomocí jediného funkčního předpisu. Podle Trávníčka (1961/62) je $f(x)$ funkce s absolutními hodnotami. V pracích (Trávníček, 1961/62; Trávníček, 1992/93; Trávníček, 2008/09) je odvozen následující početní postup:
Obecnou rovnici jednoduché lomené čáry, zadané souřadnicemi bodů $P, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, Q$, je možno zapsat ve tvaru

$$y = kx + q + \sum_{i=1}^{n} k_i |x - x_i| \text{ , } i = 1, ..., n.$$

Při výpočtu neznámých $k, q, k_1, ..., k_n$ lze využít metody neurčitých koeficientů. Do poslední rovnice dosadíme souřadnice bodů $P, Q, X_1, ..., X_n$. Obdržíme soustavu $n + 2$ rovnic o $n + 2$ neznámých $k, q, k_1, ..., k_n$, ze které potřebné neurčité koeficienty vypočítáme.

Uvedeme příklad. Na obrázku 1 je znázorněna lomená čára zadaná body $P = [-1, 1]$, $A_1 = [0,2]$, $A_2 = [1, 0]$, $A_3 = [3, 2]$, $Q = [4, 0]$, kde $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$.



Obrázek 1. Lomená čára k předchozímu příkladu

Obecná rovnice je potom

$$y = kx + q + k_1|x| + k_2|x-1| + k_3|x-3|.$$

Po dosazení obdržíme soustavu

$$\begin{aligned}
-k + q + k_1 + 2k_2 + 4k_3 &= 1\\
q + k_2 + 3k_3 &= 2\\
k + q + k_1 + 2k_3 &= 0\\
3k + q + 3k_1 + 2k_2 &= 2\\
4k + q + 4k_1 + 3k_2 + k_3 &= 0
\end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou hodnoty: $k = -\frac{1}{2}$, $q = 5$, $k_1 = -\frac{3}{2}$, $k_2 = \frac{3}{2}$, $k_3 = -\frac{3}{2}$. Hledaná rovnice lomené čáry je potom po dosazení

$$y = -\frac{1}{2}x + 5 - \frac{3}{2}|x| + \frac{3}{2}|x-1| - \frac{3}{2}|x-3|.$$

Popsaným způsobem je velmi snadné analyticky popsat jakoukoliv zadanou lomenou čáru, popř. sestavit zadání rovnic s absolutní hodnotou s předem zvoleným řešením.

3. Mnohoúhelník

V této části se budeme věnovat analytickému vyjádření některých mnohoúhelníků. Jak dále uvidíme, poskytuje tato problematika řadu námětů k samostatné výzkumné činnosti studentů. Poznamenejme, že v celé této kapitole budeme pod označením mnohoúhelník rozumět pouze jeho hranici (v planimetrii je mnohoúhelník definován jako rovinný útvar ohraničený jednoduchou uzavřenou lomenou čarou).

3.1. Čtyřúhelník

V učebnicích jsou běžně uváděny příklady typu: Graficky znázorněte rovinný útvar, analyticky vyjádřený rovnicí a) $2|x-y| = 3$; b) $2x + 3|x-y| = 1$. Jejich řešení je snadné. V prvním případě se jedná o dvě rovnoběžky, ve druhém případě o úhel. Naskýtá se nyní přirozená otázka, zda není možné podobnou rovnicí dvou proměnných s absolutními hodnotami analyticky popsat některý mnohoúhelník. Zvolíme nejjednodušší možnost zadání $|x| + |y| = 1$. Snadno zjistíme, že tato rovnice popisuje čtverec o straně $\sqrt{2}$. Nyní je možné zadat problém, jaký útvar je popsán obecnou rovnicí

$$a|x| + b|y| = c, \tag{1}$$

kde a, b, c jsou nenulová kladná reálná čísla. Po chvíli zkoumání a snadných výpočtech zjistíme, že rovnice (1) popisuje kosočtverec se středem v počátku soustavy souřadnic. Jeho vrcholy mají souřadnice $[\frac{c}{a}, 0]$, $[-\frac{c}{a}, 0]$, $[0, \frac{c}{b}]$, $[0, -\frac{c}{b}]$, délka strany je $l = \frac{c}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$, úhlopříčky mají délky $e = \frac{2c}{a}$, $f = \frac{2c}{b}$ a pro jeho obsah platí vztah $S = \frac{2c^2}{ab}$. Velikosti vnitřních úhlů jsou určeny vztahy $\alpha = 2arctg\frac{a}{b}$, $\beta = \pi - \alpha$. Odvození všech uvedených vztahů není náročné a bez obtíží je zvládne student střední školy. Z uvedeného lze sestavovat zajímavé úlohy.

Uvedeme příklad.

Příklad 1: Určete rovnici kosočtverce s vnitřními úhly o velikostech 60° a 120° a obsahem $S = 6\sqrt{3}$.

Označme α úhel o velikosti 60°. Z výše uvedeného vztahu pro α plyne $tg\frac{\alpha}{2} = tg30° = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tedy musí platit $a = t$, $b = t\sqrt{3}$, kde t je reálný nenulový parametr. Dosadíme do vztahu pro obsah S a upravíme:

$$S = \frac{2c^2}{ab} = \frac{2c^2}{t^2\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} \Rightarrow c = 3t.$$

Po dosazení do rovnice (1) a vydělení parametrem t obdržíme hledanou rovnici kosočtverce

$$|x| + \sqrt{3}\,|y| = 3.$$

□

O analytickém vyjádření čtverce už byla zmínka. Nyní je možné se rovnicí čtverce zabývat obecněji. Vyjdeme z rovnice (1). Je zřejmé, že jedině v případě $a = b$ vycházejí vnitřní úhly kosočtverce pravé, jedná se tedy o čtverec. Obecná rovnice čtverce je tedy

$$|x| + |y| = c, \text{ kde } c \in \mathbb{R}, c > 0.$$

Parametr c určuje jak délku strany, tak následně i obsah čtverce. Dosadíme-li do vztahů pro kosočtverec $a = b = 1$, pak délka strany čtverce je $c\sqrt{2}$ a obsah je roven $2c^2$. Ze vztahu $S = 2c^2$ lze dále vypočítat $c = \sqrt{\frac{S}{2}}$; proto je možné okamžitě napsat rovnici čtverce s předem daným obsahem: $|x| + |y| = \sqrt{\frac{S}{2}}$. Např. čtverec s obsahem $S = 8$ má rovnici $|x| + |y| = 2$.

Prozatím jsme se zabývali analýzou obecné rovnice (1). Poznamenejme, že na levé straně této rovnice nemůže být znaménko minus, neboť by se nejednalo o mnohoúhelník, ale o dva úhly. Nyní je možno zadat problém, co se stane, když rovnici (1) změníme na tvar

$$a\,|x| + b\,|x - y| = c, \text{ kde } c \in \mathbb{R}, c > 0. \tag{2}$$

V tomto případě výpočtem zjistíme (technické detaily s ohledem na rozsah nebudeme uvádět), že se jedná o kosodélník, středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic. Jeho vrcholy mají souřadnice $[0, -\frac{c}{b}]$, $[\frac{c}{a}, \frac{c}{a}]$, $[0, \frac{c}{b}]$, $[-\frac{c}{a}, -\frac{c}{a}]$; délky stran jsou určeny vztahy

$$u = \frac{c}{ab}\sqrt{(a+b)^2 + b^2}, \quad v = \frac{c}{ab}\sqrt{(a-b)^2 + b^2}.$$

Výšku kosodélníku určíme např. jako vzdálenost vrcholu $[0, -\frac{c}{b}]$ od přímky, v níž leží protější strana (má rovnici $y = \frac{a+b}{b}x + \frac{c}{b}$). Po výpočtu máme $v = \frac{2c}{\sqrt{(a+b)^2 + b^2}}$. Nyní není obtížné odvodit vztah pro obsah kosodélníku: $S = \frac{2c^2}{ab}$. Pomocí znalostí z analytické geometrie lze určit i velikosti vnitřních úhlů (známe-li souřadnice vrcholů). Tyto vztahy již uvádět nebudeme.

Zajímavým problémem je nyní zkoumat analogickým způsobem další možnosti modifikace rovnice (2):

$$a\,|x| + b\,|x + y| = c, \qquad a\,|y| + b\,|x - y| = c, \qquad a\,|y| + b\,|x + y| = c.$$

Znaménko mezi absolutními hodnotami na levé straně nemůžeme ovšem změnit na minus (jednalo by se o dva úhly). Ve všech třech uvedených modifikacích se jedná opět o kosodélník. Zajímavé jsou vztahy mezi čtyřmi kosodélníky popsanými rovnicí (2) a jejími třemi modifikacemi, ponecháme-li u všech tytéž hodnoty *a, b, c.* Uvedeme příklad, kdy popíšeme kosodélníky určené rovnicemi:

$$a)\ 2\,|x| + |x - y| = 4,$$

$$b)\ 2\,|x| + |x + y| = 4,$$

$$c)\ 2\,|y| + |x - y| = 4,$$

$$d)\ 2\,|y| + |x + y| = 4.$$

Délky stran, obsah i velikosti vnitřních úhlů všech čtyř kosodélníků je stejný. Určíme jen souřadnice vrcholů: V případě a) jsou vrcholy [*2, 2*], [*0, 4*], [*–2, –2*], [*0, –4*], v případě b) jsou souřadnice vrcholů [*2, –2*], [*0, 4*], [*–2, 2*], [*0, –4*]. Oba kosodélníky jsou souměrné podle obou souřadnicových os. V případě c) jsou vrcholy [*2, 2*], [*–4, 0*], [*–2, –2*], [*4, 0*], v případě d) pak [*2, –2*], [*4, 0*], [*–2, 2*], [*–4, 0*]. Také tyto dva kosodélníky jsou osově souměrné podle osy *x* i osy *y*.

Jako další námět pro výzkumný přístup lze zkoumat situaci, kdy kosodélník určený rovnicí (2) přejde v obdélník (víme už, že pro $a \neq b$ nemůže již být čtvercem). Při řešení využijeme faktu, že obdélník je pravoúhelníkem. Napíšeme rovnice přímek, v nichž leží jedna dvojice sousedních stran a vyřešíme, kdy budou na sebe kolmé. Rovnice přímek ve směrnicovém tvaru jsou

$$y = \frac{a+b}{b}x - \frac{c}{b}, \quad y = \frac{b-a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Součin směrnic položíme roven -1 a vypočítáme $a = \sqrt{2}\,b$. Druhé možné řešení $a = -\sqrt{2}\,b$ nevyhovuje, neboť v rovnici (2) jsou u obou absolutních hodnot znaménka plus. Hodnoty *b, c* jsou libovolná nenulová reálná čísla. Po dosazení $\sqrt{2}\,b\,|x| + b\,|x - y| = c$. Číslo $\frac{c}{b}$ označíme *C*; rovnice obdélníka je pak tvaru

$$\sqrt{2}\,|x| + |x - y| = C.$$

Délky stran jsou $u = C\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $v = C\sqrt{2-\sqrt{2}}$, obsah je roven $S = C^2\sqrt{2}$. Poznamenejme, že analogické rovnice obdélníka obdržíme i ze všech tří modifikací rovnice (2).

Příklad 2: Napište rovnici obdélníka o obsahu $S = 4\sqrt{2}$.
$S = 4\sqrt{2} = C^2\sqrt{2}$, odtud $C = 2$ (hodnota -2 nevyhovuje). Rovnice je $\sqrt{2}\,|x| + |x - y| = 2$.

Posledním námětem ke zkoumání studentů je v části o čtyřúhelnících analýza obecné rovnice

$$a\,|x + y| + b\,|x - y| = c, \text{ kde } a, b, c \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Řešení již nebudeme uvádět; poznamenejme jen, že také v tomto případě dostaneme kosodélník. Další poznámkou je možnost, že by v absolutních hodnotách místo součtu nebo rozdílu argumentů *x, y* mohl být zadán jejich součin nebo i podíl. V tomto případě ale nedostaneme žádný základní geometrický útvar (mnohoúhelník nebo úhel,...). Zkoumání takových rovnic ale má také svůj význam, alespoň pro procvičení řešení rovnic s absolutními hodnotami.

3.2. Šestiúhelník

V předchozí části jsme se zabývali rovnicemi obsahujícími lineární kombinaci dvou absolutních hodnot, jejichž argumenty jsou x, y, $x + y$ nebo $x - y$. Ve všech případech (jsou-li koeficienty a, b, c kladná čísla a před oběma absolutními hodnotami je znaménko plus) dostáváme rovnice čtyřúhelníku. Problémem, kterým se studenti mohou zabývat, je otázka, co bude popisovat analogická rovnice, přidáme-li jednu absolutní hodnotu stejného tvaru jako v předchozím. Jedná se tedy o následující typy rovnic (vždy platí $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$):

$$a\,|x| + b\,|y| + c\,|x + y| = d,$$

$$a\,|x| + b\,|y| + c\,|x - y| = d,$$

$$a\,|x| + b\,|x + y| + c\,|x - y| = d,$$

$$a\,|y| + b\,|x + y| + c\,|x - y| = d.$$

Už dopředu můžeme konstatovat, že vždy se jedná o rovnice šestiúhelníku. Jeho charakterizací se nyní budeme zabývat. Vzhledem k rozsahu příspěvku podrobně rozebereme pouze poslední z rovnic, tj. rovnici

$$a\,|y| + b\,|x + y| + c\,|x - y| = d. \tag{3}$$

Řešení rovnice (3) je již obtížnější. I když nepřesahuje znalosti studentů střední školy, je poměrně pracné a vyžaduje od studentů při obecném řešení nejen pozornost při výpočtu, ale i značnou dávku trpělivosti a úsilí. Uvedeme pouze výsledky. Vrcholy šestiúhelníku mají následující souřadnice:

$$A = \left[\frac{d}{a+2b}, \frac{d}{a+2b}\right],\ B = \left[\frac{-d}{a+2c}, \frac{d}{a+2c}\right],\ C = \left[\frac{-d}{b+c}, 0\right],\ D = \left[\frac{-d}{a+2b}, \frac{-d}{a+2b}\right],$$

$$E = \left[\frac{d}{a+2c}, \frac{-d}{a+2c}\right],\quad F = \left[\frac{d}{b+c}, 0\right].$$

Je nutno si uvědomit, že všechny výrazy ve jmenovatelích zlomků nejsou rovny nule, protože podle předpokladu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$. Pro délky stran lze pak odvodit vztahy (pod odmocninou jsou vždy kladná čísla):

$$|AF| = |CD| = \frac{d}{(a+2b)(b+c)}\sqrt{(a-c)^2 + 2b^2 + c^2 + 2ab},$$

$$|AB| = |DE| = \frac{2d}{(a+2b)(a+2c)}\sqrt{(a+c)^2 + 2b^2 + c^2 + 2ab},$$

$$|BC| = |EF| = \frac{d}{(a+2c)(b+c)}\sqrt{(a-c)^2 + 2b^2 + c^2 + 2ab}.$$

ISSN 2694-8133

Vztahy pro vnitřní úhly lze určit pomocí analytické geometrie ze znalostí souřadnic vrcholů šestiúhelníku. I když ani tyto vztahy nebudeme uvádět (jsou poměrně komplikované), lze určit, že tyto vnitřní úhly nikdy nejsou rovny 60°, proto šestiúhelník určený rovnicí (3) nemůže být pravidelný. Lze se o tom přesvědčit i porovnáním všech tří vypočtených délek stran, které nemohou být všechny tři sobě rovné. Výpočet je ale ještě komplikovanější, jak lze vytušit ze složitosti vztahů pro délky stran. Budeme tedy zkoumat, jak se co nejvíce „přiblížit" pravidelnému šestiúhelníku. Poměrně snadno lze určit ze znalostí souřadnic vrcholů vzdálenosti všech vrcholů od počátku soustavy souřadnic. Porovnáním těchto vzdáleností (všechny výpočty by opět měl zvládnout středoškolák) vychází poměrně jednoduché tvrzení, že tato vzdálenost od počátku je nutně $\frac{d}{2b}$. Jinými slovy: Pokud mají být všechny vrcholy šestiúhelníku definovaného rovnicí (3) stejně vzdáleny od počátku, musí ležet na kružnici o poloměru $\frac{d}{2b}$.

Při výpočtu rovněž obdržíme následující podmínky: $c = b$, $a = 2b(\sqrt{2} - 1)$, b je kladný reálný parametr. Po dosazení těchto podmínek do vztahů pro délky stran, obdržíme po dosti obtížném výpočtu, vyžadujícím opět úsilí a trpělivost, poměrně jednoduché vztahy:

$$|AF| = |CD| = \frac{d}{2b}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,, \qquad |AB| = |DE| = \frac{d}{2b}\sqrt{2}\,, \qquad |BC| = |EF| = \frac{d}{2b}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.$$

První a třetí vztah vyjadřuje tutéž hodnotu, tedy čtyři ze stran mají stejnou délku. Strany $|AB|, |DE|$ ale tutéž velikost mít nemohou. I když tedy dosadíme vypočtené podmínky ($c = b$, $a = 2b(\sqrt{2} - 1)$ do rovnice (3) a rovnici upravíme (vydělíme nenulovým číslem $2b$), nebude šestiúhelník definovaný touto rovnicí

$$(\sqrt{2} - 1)\ |y| + \frac{1}{2}\ |x + y| + \frac{1}{2}\ |x - y| = \frac{d}{2b}$$

zcela pravidelný. Bude mít všechny vrcholy ve stejné vzdálenosti $\frac{d}{2b}$ od počátku, shodné čtyři strany AF, CD, BC, EF o velikosti $\frac{d}{2b}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ a shodné zbylé dvě strany AB, DE o velikosti $\frac{d}{2b}\sqrt{2}$. Vrcholy C, F leží na ose x a strany AB, DE jsou s osou x rovnoběžné. Rovnoběžné jsou přitom každé dvě protější strany.

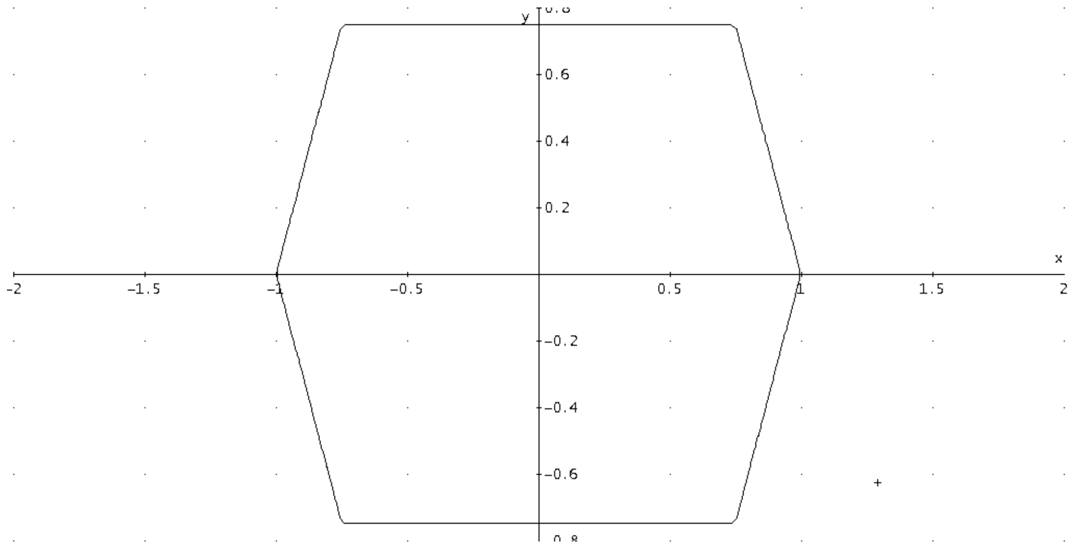
Příklad 3: Určete souřadnice vrcholů a délky stran šestiúhelníku popsaného rovnicí

$$2|y| + 3|x + y| + 3|x - y| = 6.$$

Ze vztahů v předchozím textu po dosazení vypočítáme:

$$A = \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right],\ B = \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right],\ C = [-1, 0],\ D = \left[-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right],\ E = \left[\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right],\ F = [1, 0].$$

Délky stran AF, CD, BC a EF jsou $\frac{\sqrt{10}}{4}$, délky stran AB, DE jsou $\frac{3}{2}$ (viz obr. 2, vytvořený programem Derive).



Obrázek 2. Šestiúhelník z příkladu 3

Poznámka: Při analýze geometrického útvaru popsaného rovnicí s více absolutními hodnotami je výhodné užít i znázornění pomocí některého matematického softwaru, např. Maple nebo Derive. Oba tyto matematické programy, stejně jako mnohé další (Matlab, Cabri, ...) jsou v dnešní době pro matematiky nepostradatelné a proto by se s nimi měli seznamovat i studenti, zejména budoucí učitelé matematiky.

V předchozím textu jsme se zabývali analýzou šestiúhelníku popsaného rovnicí (3). Pro ostatní tři rovnice uvedené na počátku této části (např. $a\,|x| + b\,|y| + c\,|x - y| = d$) by se postupovalo analogicky. Stále ale přetrvává problém, jak analyticky popsat pravidelný šestiúhelník, což je opět téma k výzkumnému přístupu a problémové výuce. Zřejmě v absolutních hodnotách v rovnici (3) a rovnicích modifikovaných nemohou být jen argumenty $x, y, x + y, x - y$. Jak se po chvíli zkoumání ukáže, je nutno pro šestiúhelník *ABCDEF* začít od průvodičů, tj. od přímek *AD, BE, CF*, které pro zjednodušení procházejí počátkem soustavy souřadnic. Nechť přímkou *AD* je osa *x*, přímka *BE* musí svírat s osou *s* úhel o velikosti 60°, zatímco přímka *CF* musí svírat s osou *s* úhel o velikosti –60°. Přímky *BE, CF* mají po řadě rovnice $y = \sqrt{3}\,x$, $y = -\sqrt{3}\,x$. Nechť je hledaný pravidelný šestiúhelník vepsán do kružnice o poloměru *r*. Souřadnice jeho vrcholů jsou

$$A=[r,\ 0],\ B=\left[\frac{r}{2},\frac{\sqrt{3}}{2r}\right],\ C=\left[-\frac{r}{2},\frac{\sqrt{3}}{2r}\right],\ D=[-r,\ 0],\ E=\left[-\frac{r}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2r}\right],\quad F=\left[\frac{r}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2r}\right].$$

V absolutních hodnotách musí být zřejmě výrazy $y \pm \sqrt{3}x$; obecná rovnice je např.

$$a\,|y| + b\left|y+\sqrt{3}x\right| + c\left|y-\sqrt{3}x\right| = d. \tag{4}$$

Je třeba nalézt hodnoty *a, b, c, d.* Do rovnice (4) dosadíme za *x, y* souřadnice vrcholů pravidelného šestiúhelníku, které byly výše uvedeny, a upravíme. Při výpočtu je třeba dát pozor na znaménka argumentů v absolutních hodnotách; např. pro $y \geq 0,\ y+\sqrt{3}x \geq 0,\ y-\sqrt{3}x < 0$ má po odstranění absolutních hodnot rovnice (4) tvar

$$ay + by + \sqrt{3}\,bx - cy + \sqrt{3}\,cx = d.$$

Po dosazení souřadnic vhodných bodů A, B (vzhledem k podmínkám $y \geq 0$, $y+\sqrt{3}x \geq 0$, $y-\sqrt{3}x < 0$) dostaneme po úpravě rovnice $\sqrt{3}\,br + \sqrt{3}\,cr = d$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}r + b\sqrt{3}r = d$. Provedeme-li tyto výpočty pro všechny možnosti (vzhledem k symetrii stačí uvažovat $y \geq 0$), obdržíme soustavu tří rovnic:

$$\sqrt{3}\,br + \sqrt{3}\,cr = d$$
$$\frac{a\sqrt{3}}{2}r + b\sqrt{3}r = d$$
$$\frac{a\sqrt{3}}{2}r + c\sqrt{3}r = d\,.$$

Jejím řešením jsou hodnoty: $a = \frac{d}{\sqrt{3}r}$, $b = \frac{d}{2\sqrt{3}r}$, $c = \frac{d}{2\sqrt{3}r}$. Po dosazení do (4) a úpravě máme

$$2\,|y| + \left|y+\sqrt{3}x\right| + \left|y-\sqrt{3}x\right| = 2\sqrt{3}\,r,$$ kde r je parametr (délka strany).

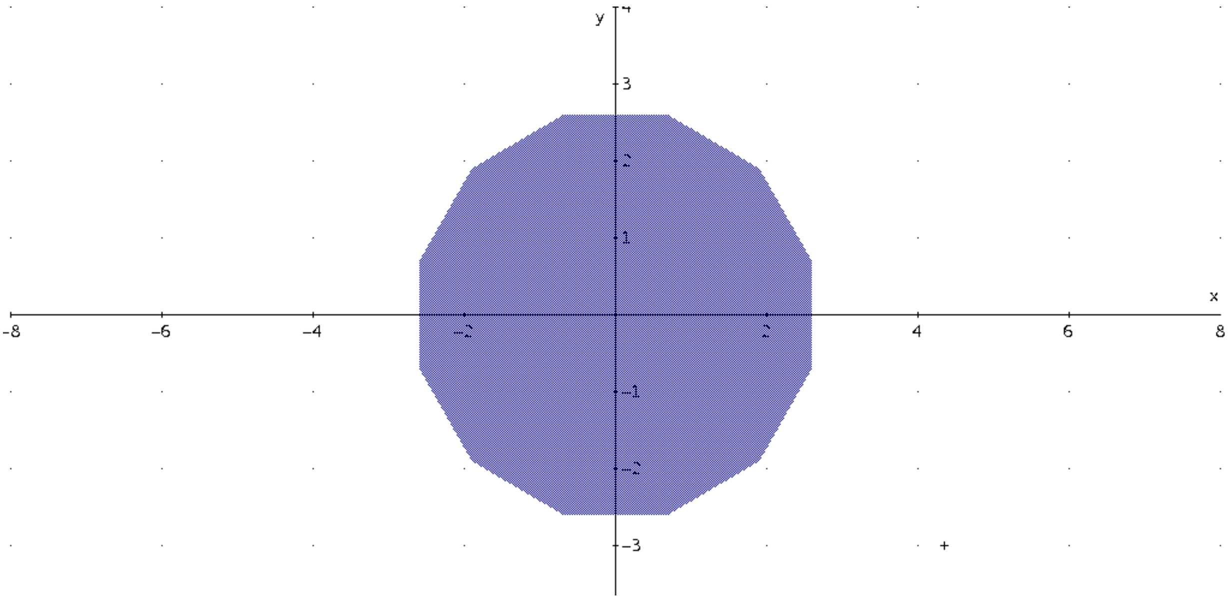
Poslední rovnice je analytickým vyjádřením pravidelného šestiúhelníku. Existuje ještě jedna možnost, kdy dva vrcholy leží na ose y. V tom případě analogicky odvodíme rovnici

$$2\,|x| + \left|x+\sqrt{3}y\right| + \left|x-\sqrt{3}y\right| = 2\sqrt{3}\,r.$$

Oba pravidelné šestiúhelníky popsané posledními dvěma rovnicemi jsou při stejném r shodné, pouze pootočené o 30°. Proto všechny body v rovině, které vyhovují soustavě nerovnic

$$2\,|y| + \left|y+\sqrt{3}x\right| + \left|y-\sqrt{3}x\right| \leq 2\sqrt{3}\,r$$
$$2\,|x| + \left|x+\sqrt{3}y\right| + \left|x-\sqrt{3}y\right| \leq 2\sqrt{3}\,r$$

jsou body pravidelného dvanáctiúhelníku (i se svou vnitřní oblastí). Na obr. 3 vytvořeném opět pomocí programu Derive je zobrazen takový pravidelný dvanáctiúhelník s parametrem $r = 3$.



Obrázek 3. Dvanáctiúhelník

ISSN 2694-8133

3.3. Osmiúhelník

V této části uvedeme již jen výsledek zkoumání. V analogii s předchozími úvahami, kdy rovnice se dvěma absolutními hodnotami popisovala čtyřúhelník a rovnice se třemi absolutními hodnotami šestiúhelník, je přirozenou otázkou vyzkoušet, jaký útvar bude popsán rovnicí

$$a\,|x| + b\,|y| + c\,|x+y| + d\,|x-y| = e.$$

Po vyřešení (opět i za přispění počítačového programu, např. MAPLE nebo DERIVE) zjistíme, že se jedná o osmiúhelník. Popis souřadnic vrcholů a délky stran si již odpustíme. Dalším problémem je nalezení rovnice pravidelného osmiúhelníku. V práci [1] je uvedena rovnice pravidelného osmiúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru 1:

$$|x| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x+y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x-y| = \sqrt{2}+1.$$

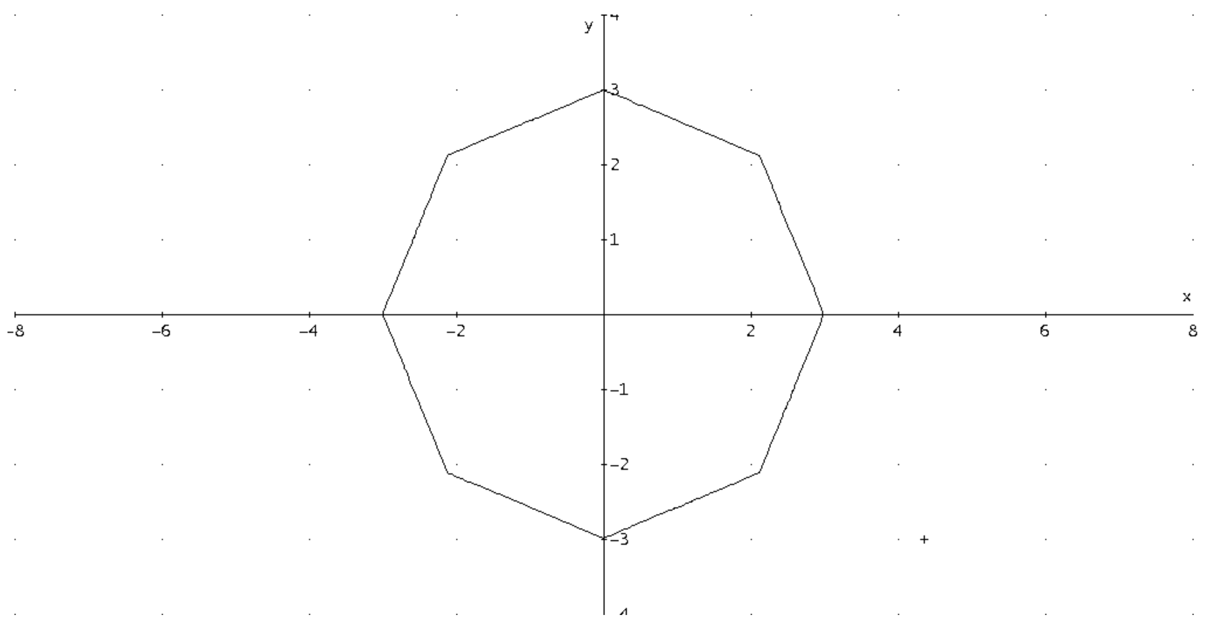
Analogickým postupem jako u šestiúhelníku (za pomoci průvodičů) lze obecně odvodit rovnice pravidelného osmiúhelníku s předem zadanými parametry. Je-li zadán poloměr r kružnice pravidelnému osmiúhelníku opsané, má jeho analytické vyjádření tvar

$$|x| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x+y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x-y| = (\sqrt{2}+1)\,r.$$

Je-li zadána délka s strany pravidelného osmiúhelníku, pak má rovnice tvar

$$|x| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x+y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x-y| = (2+\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot s.$$

Na obrázku 4 je znázorněn pomocí programu Derive pravidelný osmiúhelník s parametrem $r = 3$.



Obrázek 4. Osmiúhelník

ISSN 2694-8133

4. Závěr

Zkoumání geometrických útvarů definovaných rovnicemi s absolutními hodnotami je velmi rozsáhlé a poskytuje řadu námětů pro zkoumání studentů (viz např. Hejný, 1990; Odvárko, 2002). V příspěvku jsme uvedli pouze situace, kdy daná rovnice popisovala lomenou čáru nebo mnohoúhelník. V případě, že bychom do absolutních hodnot zařadili i jiné výrazy než x, y, $x + y$, $x - y$, nebo že bychom mezi jednotlivé absolutní hodnoty zařadili také jiná znaménka než plus, dostali bychom velmi rozličné geometrické útvary. Dalším problémem je, zda lze takto popsat pomocí jediné rovnice i jiné n-úhelníky než v textu popsané, např. pětiúhelník. Tyto problémy se zdají být otevřené a jsou výzvou pro další, studentům přístupný, výzkum.

Literatura

Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky.* 2. vyd. Slovenské pedagogické nakladateľstvo: Bratislava.

Odvárko, O. (2002). *Matematika pro gymnázia: funkce*. 3. upr. vyd. Prometeus: Praha.

Trávníček, S. (1961/62). O jedné definici funkce. *Rozhledy matematicko-fyzikální, 41*. 97–100, 147–152.

Trávníček, S. (1992/93). Sestavování úloh s absolutní hodnotou. *Matematika-fyzika-informatika, 2*. 69–74.

Trávníček, S. (2008/09). Lomené čáry jako grafy funkcí s absolutními hodnotami. *Matematika-fyzika-informatika, 18*. 426–432.

ISSN 2694-8133

A NOTE ON DIVIDING ANGLES TO EQUAL PARTS

Reza HABIBI[1]
[1] Iran Banking Institute, Department of Banking, Tehran (Iran)
r_habibi@ibi.ac.ir

Abstract

Dividing angles to three equal parts is a traditional problem in geometry. Some mathematician has proved that it is impossible using the usual tools in geometry. By the way, some approximated methods are given. In this paper, we give a simple recursive method. We show that our method works well, and its convergence rate is good. This method enables us, to divide an angle with unknown size to k > 2 equal parts. The stochastic version of our method is also considered.

Keywords: Angle, Geometry, Rate of convergence, Recursive partitions

1. Introduction

An angle is a figure in geometry which its position, direction, precision are too important in real world. It forms when two rays meet at a common vertex. An angle can be divided to two equal parts by angle bisector. However, it is a very old problem in geometry that it is impossible to divide an angle with unknown size to 3 equal parts using the straightedge and compasses. The routine method for bisection of geometric angles has continued to dominate the scene despite the fact that it divides angles only into 2, 4, 8 etc. excluding 3, 5, 6, 7, 9 etc. equal parts. This could be caused by the absence of other simple methods or that some angles that cannot be obtained through bisection can be copied from the protractor or the use of set squares, see Elekwa (2011). The method by Odogwu (2015) is mathematically complex, tedious and cannot be practiced easily. There is therefore the need for other methods to be introduced.

In this paper, we show that it is possible to divide an angel to $k > 2$ equal parts using algebraic infinite series. Dividing an angle with size α, (α unknown) is equivalent to dividing a line with length α. To see that, it is enough to consider the angle, as a central angle of a circle with unit radius.

1.1. Three parts.

It is easy to see that (see for example Rudin, 1976)

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1/2)^i = \frac{2}{3}.$$

Here, we interpret this series, geometrically. Consider line A_0A_1 with (unknown) length α. Suppose that a particle is at A_1. Particle moves from A_1 to A_0. From A_0, the particle returns to the middle of A_0A_1 (call it A_2). Note that it isn't necessary to know the size of lines (angels) for dividing them to two equal parts. Our moving particle goes from A_2 to A_3 (the middle of A_0A_2) and returns to A_4. Repeat this moving and returning until infinity. Figure 1 illustrates more.

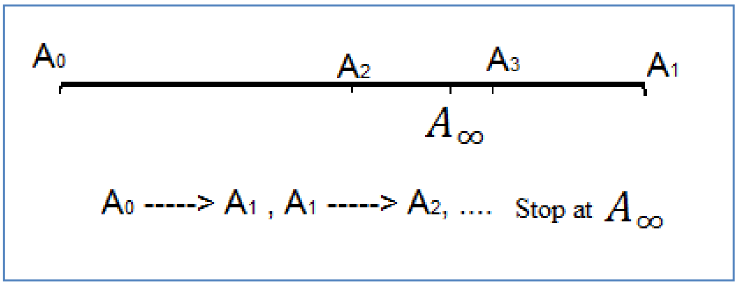


Figure 1. Particle movements among A's

It is obvious the particle stops at A_∞. Since the length of $A_n A_{n-1}$ converges to zero. The length of $A_1 A_\infty$ equals to distance moved by particle which is

$$\alpha(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...) = \alpha\sum_{i=0}^{\infty}(-1/2)^i = \frac{2}{3}\alpha.$$

Therefore, it is enough to divide $A_1 A_\infty$ to two equal parts. In fact, we have proved our claim. It is easy to see that

$$|\alpha\sum_{i=0}^{n}(-1/2)^i - \frac{2}{3}\alpha| = (\alpha/3)2^{-n}.$$

This shows that the speed of convergence A_n to A_∞ (that is 2^{-n}) is good. The above equation also suggests to drop the first *n* moves and to start from A_n. As follows, a simple proof is given for $\sum_{i=0}^{\infty}(-1/2)^i = \frac{2}{3}$. Let *n* be an arbitrary natural number and *a* be a real number such that $|a| < 1$. Then, $\sum_{i=1}^{n}(-a)^i = \frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}$. As $n \to \infty$, then $(-a)^{n+1}$ goes to zero and $\sum_{i=1}^{\infty}(-a)^i = \frac{1}{1+a}$. By assuming $a = 0.5$, the proof is completed.

1.2. The *k* parts

In this part, we generalize our result to *k* equal parts. Our approach is based on induction. We show that if we can divide a line to $k > 2$ parts then partitioning to $(k + 1)$ parts is possible. In this way, since we have done for $k = 3$, therefore we have done for $k = 3, 4, \dots$. The proof is easy. One can check that

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1/k)^i = \frac{k}{k+1}.$$

Again, consider moving particle and in each stage divide the segmented line to *k* parts (instead of *2* parts). The above infinite series says that you will divide the $A_0 A_1$ to *k* equal parts.

2. Generalizations

Here, we rephrase our problem. Suppose that *f* is positive function such that $f(\alpha) \le \alpha$. How can we part $f(\alpha)$ from line (angel) with unknown length α. In the previous section, we solve this problem for $f(\alpha) = \alpha / k$. Here, we present some special cases. Let $f(\alpha) = \frac{\alpha}{r}$ where $r \ge 1$ is a rational number. Let $r = \frac{k'}{k''}$ for some $1 = k' \le k'' = 2,3,\dots$. Then $f(\alpha) = \frac{k''}{k'}\alpha$.

Therefore, the problem reduces to deriving $\frac{1}{k'}$ of an angle with size $k''\alpha$. This is solved in the previous section. A natural generalization is $f(\alpha)=c\alpha$ where $0<c\le 1$ is an irrational number. There is a sequence of rational numbers $\{c_n\}$ such that $c_n \uparrow c$ (Rudin, 1976). Let $d_n = c_n - c_{n-1}$ with $c_0 = 0$. Then

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} d_i .$$

To update the moving and returning algorithm, in the *n-th* stages of algorithm, let particle moves from A_{n-1} to A_n such that the length of $A_n A_{n-1}$ is d_n Therefore, we have shown we can solve our problem for $f(\alpha)=b\alpha$ where $0<b\le 1$ is a positive real number.

3. Stochastic version

In this section, we consider the stochastic version of above mentioned problem. Suppose that $U_1,...,U_n$ are independent and identically distributed random variables defined on (0,1). Consider again the line A_0A_1 and mentioned moving particle. Suppose that the moving particle goes from A_0 to A_1. Then, it returns to A_2 where the length of A_1A_2 is $U_1\alpha$. That is, the particle returns $U_1\alpha$. units. This possibility is shown in previous section.
Next, the particle moves form A_2 to A_3 such that the length of A_2A_3 is $U_2U_1\alpha$. By letting $U_1 = U_2 = ... = 1/2$ with probability one, the angle is divided to 3 equal parts. The location of particle in *n*-th steps is given by

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \prod_{i=1}^{k} U_i \ .$$

Suppose that the expectation of U_1 is μ. One can show that

$$E(S_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-\mu)^k = 1 - \frac{1-(-\mu)^n}{1+\mu}\mu.$$

Since $0<\mu<1$, then $|(-\mu)^n|$ goes to zero as *n* goes to infinity. Using the Monte Carlo method, then, $E(S_n)$ converges to $\frac{1}{1+\mu}$. As soon as faced with uncertainty in estimation of unknown parameter, Monte Carlo method uses multiple values and averages the results.
If we suppose that U_1 is uniformly distributed on (0,1) then $E(S_n)$ converges to 2/3. In this way, the angle is divided to 3 equal parts. If we suppose that U_1 has a beta distribution with parameter α, β then the limiting values of $E(S_n)$ is $\frac{\theta}{\alpha+\theta}$, where $\theta = \alpha + \beta$. By choosing suitable values for α, β the angle can be divided every rational number. The rate of convergence of $E(S_n)$ to $\frac{1}{1+\mu}$ is $(-\mu)^n$.

Next, suppose that for R realization of U_i's, $i = 1, \ldots, n$, we derive the $S_n^1, \ldots, S_n^R$, independently. The SLLN (Resnick, 2001) guaranties that $\overline{S_R} = (1/R)\sum_{r=1}^{R} S_n^r$ converges almost surely to $\frac{1}{1+\mu}$ as n, R goes to infinity. The following Table gives the values of $\overline{S_R}$ for some selected values of n and R=1000, under the uniform distribution, and the corresponding standard deviations.

Table 1. Values of $\overline{S_R}$

n	10	25	40	70	100
$\overline{S_R}$	0.577	0.5633	0.5258	0.5087	0.5012
$stdev(\overline{S_R})$	0.00758	0.00728	0.007547	0.00731	0.00727

4. Simulation.

In this section, it is surveyed, how simulation methods such as Monte Carlo approach may be applied to divide an angle with parts in size of an arbitrary function of angle. To this end, first, notice the following Remark.

Remark 1. The main idea of previous section was the use of Taylor expansion $f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$. In mathematics, taylor expansion of a function is an infinite sum of terms that is expressed in terms of function dreivatives at a single point (Rudin, 1976). Solomon (1991) proposed a simulation based method for approximation of infinite series. Here, first, his method is applied to $\sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}}$ and second it is extended for general functions. Then, a geometrical method to divide an angle to three equal parts is given. First notice that $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}} = 1$ and $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty}(-1)^{\mathrm{i}+1}2^{-\mathrm{i}} = \frac{1}{3}$. Therefore, $\frac{1}{3} = \mathrm{E}\,(-1)^{\mathrm{N}+1}$ where $\mathrm{P}(\mathrm{N} = \mathrm{i}) = 2^{-\mathrm{i}}, \mathrm{i} \geq 1$. Notations E and P stand for mathematical expectations and probability functions, respectively. Let $\mathrm{U_n}$'s be a sequence of independent and identically uniformly distributed random variables on (0,1) and N is the first index such that $\mathrm{U_N}$ gets larger than 0.5. Then, $\mathrm{P}(\mathrm{N} = \mathrm{i}) = 2^{-\mathrm{i}}, \mathrm{i} \geq 1$. Therefore, it is enough to generate uniform random variables and then find the first index such that it goes beyond 0.5 and to find the average of $(-1)^{\mathrm{N}+1}$.

For general functions which is differentiable infinitely times, the Taylor expansion if given by

$$\boldsymbol{f(\alpha) = f(\alpha_0) + \sum_{i=1}^{\infty} f^{(i)}(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0)^i / i!} =$$
$$= \boldsymbol{f(\alpha_0) + \sum_{i=1}^{\infty} p_i\, a_i},$$

where $\boldsymbol{p_i} = \frac{\boldsymbol{i-1}}{\boldsymbol{i}!}$ and $\boldsymbol{a_i} = \frac{\boldsymbol{f^{(i)}(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0)^i}}{\boldsymbol{(i-1)}}$.

Then, $\boldsymbol{f(\alpha) = f(\alpha_0) + E(a_N)}$. For example, for $\boldsymbol{f(\alpha) = e^{-\alpha}}$, then $\boldsymbol{f(\alpha) = 1 + E(a_N)}$, where

$$\boldsymbol{\alpha_0 = 0,\ a_i = \frac{(-\alpha)^i}{(i-1)}}.$$

Following Solomon (1991) the point N is the first index at which $\boldsymbol{U_N > U_{N-1}}$. The following algorithm gives the geometrical approach, briefly.

(a) Consider interior point $\boldsymbol{\alpha_0}$ from support f and derive the taylor expansion.

(b) Move for $\boldsymbol{f(\alpha_0)}$ and move in size of $\boldsymbol{a_i = \frac{f^{(i)}(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0)^i}{(i-1)}}$ with probability of $\boldsymbol{p_i = P(N = i) = \frac{i-1}{i!}}$. Obtain m times of point N and take sample average of $\boldsymbol{a_i}$'s.

(c) To simulate N, notice that N is the first index at which $\boldsymbol{U_N > U_{N-1}}$.

5. Conclusion

This paper studied the method for dividing an angle to equal parts. First, methods for dividing angles to three equal parts are studied. After then, it is verified, how for a general function of angle is done. Simulation methods and Monte Carlo computations play important role in this part.

References

Elekwa, I, O. (2011). *Basic technology for junior secondary school. 2nd edition*. Evans Brothers: Nigeria.

Odogwu, H. N. (2015). *New concept mathematics for senior secondary schools*. Wiley: USA.

Resnick, S. I. (2001). *A Probability Path*. Birkhäuser: USA.

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill: USA.

Solomon, F. (1991). Monte Carlo simulation of infinite series. *Mathematics Magazine, 64*(3), 188–196. https://doi.org/10.2307/2691302.

VYUŽITIE TECHNOLÓGIE ROZŠÍRENEJ REALITY PRI TVORBE A RIEŠENÍ SLOVNEJ ÚLOHY Z MATEMATIKY ŠTUDENTMI UČITEĽSTVA PRE PRIMÁRNE VZDELÁVANIE

Jana HNATOVÁ[1]
[1]Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (SR)
jana.hnatova@unipo.sk

Abstrakt

Technológia rozšírenej reality patrí medzi moderné a v súčasnosti už aj dostupné technológie umožňujúce zmysluplne využívať inteligentné mobilné zariadenia (smartfóny, tablety) v pregraduálnej matematickej príprave študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie. Príspevok obsahuje zistenia ohľadom inkorporácie tejto technológie do tvorby slovných úloh z matematiky a kvantifikuje dosiahnutú úroveň začlenenia technológie do spracovaných výstupov študentov pomocou modelu SAMR.

Kľúčové slová: AR, matematická edukácia, slovná úloha, rozšírená realita

UTILIZATION OF AUGMENTED REALITY TECHNOLOGY IN CREATING AND SOLVING A MATHEMATICAL WORD PROBLEM BY PRIMARY EDUCATION TEACHER TRAINEES

Abstract

The technology of augmented reality belongs among modern technologies that are currently also available, allowing for meaningful utilization of intelligent mobile devices (smartphones, tablets) in the pre-service mathematical training of primary education teacher trainees. This contribution presents findings regarding the incorporation of this technology into the creation of mathematical word problems and quantifies the achieved level of technology integration into the processed outputs of students using the SAMR model.

Keywords: augmented reality, AR, mathematics education, word task

1. Úvod

Rozšírená realita (*augmented reality*, skr. AR) patrí k moderným technológiám umožňujúcim v jednom obraze interaktívne prepájať reálny a digitálny svet v čiastočne pohlcujúcom zážitku. Používateľovi poskytuje „vylepšenú" verziu zobrazenia reálneho sveta, ktorá býva doplnená digitálnymi vizuálnymi prvkami, zvukmi ako aj ďalšími možnými zmyslovými podnetmi (Schmalstieg & Höllerer, 2016). V súčasnosti existujú rôzne systémy AR detegujúce značky (*markers*), projekčnú plochu (*projecton*), polohu používateľa (*location*) alebo skutočné objekty a scény (*superimposition*) a systémové volania na vopred definovaný obsah, ktorý má byť vo výslednom obraze prekrytý virtuálnymi objektmi (Aggarwal & Singhal, 2019). Pomer medzi reálnym a virtuálnym svetom je vo výslednom zobrazení tvorenom AR technológiou priklonený k zobrazeniu reálneho sveta (Milgram & Kishino, 1994).

V odbornej literatúre možno konštatovať konsenzus viacerých autorov (Azuma et al., 2001; Dunleavy et al., 2009; Garzón, 2021), v definovaní požadovaných funkcií AR. Patria k nim nutnosť kombinácie digitálneho a fyzického sveta, presná 3D identifikácia a interaktivita prebiehajúca v reálnom čase. Práve tieto možnosti spolu s aktuálnou finančnou dostupnosťou zariadení podporujúcich prácu s AR technológiou majú pozitívny dopad na jej čoraz častejšie využívanie v rôznych odvetviach ľudskej činnosti − priemysel, výroba, zábava, reklama, obchod, cestovný ruch, vzdelávanie. Na rozdiel od ďalších imerzívnych technológií, AR technológia zachytáva existujúce prostredie používateľa (v našom prípade študenta učiteľstva pre primárne vzdelávanie), umožňuje mu bezprostrednú komunikáciu a prípadnú spoluprácu s okolím bez toho, aby dochádzalo k jeho personálnej izolácii. K ďalším najčastejšie uvádzaným výhodám patrí používateľský komfort, kognitívne zlepšenie matematického výkonu sledované v dimenzii poznatkov i procesov a multisenzorické prezentovanie informácií (Hnatová, 2023), ktoré vytvára jedinečné vzdelávacie podmienky a je samotnou podstatou AR.

V matematike je možné s podporou AR priblížiť žiakom a študentom aj zložitejšie a pre nich abstraktné matematické koncepty (Salinas & Pulido, 2017; Thamrongrat & Law, 2019). Technológia AR podporuje u žiakov a študentov rozvoj špecifických schopnosti, ku ktorým patrí kreativita, kritické myslenie, riešenie problémov, komunikácia a kooperácia (Dunleavy et al., 2009), taktiež rozvoj matematického modelovania (Cahyono et al., 2020; Prídavková, 2022) majúce priamu väzbu na tvorbu a riešenie slovných úloh v školskej matematike.

2. Tvorba slovnej úlohy z matematiky s využitím AR technológie

K zavedeniu pojmu *slovná úloha* je možné v súčasnosti pristupovať z pohľadu viacerých vedných odborov. V didaktike matematiky je slovná úloha chápaná ako verbálny opis problémovej situácie prezentovanej v rámci matematického vzdelávacieho prostredia, v ktorej je položená jedna alebo viacero otázok. Na tieto je možné získať odpovede aplikáciou matematických operácií na číselné údaje dostupné v zadaní úlohy alebo na údaje z nich odvodené (Verschaffel et al., 2000). Z pohľadu jazykového je možné slovnú úlohu chápať ako slovne kódovanú úlohu, tj. úlohu formulovanú pomocou slov bez použitia matematických symbolov (Daroczy et al., 2015; Vondrová et al., 2019; Wang et al., 2016). V prípade súčasného použitia textového a obrazového materiálu v znení slovnej úlohy je daný obrazovo-vecný text možné označiť pojmom multimodálny text. Vužňáková (2022) poukazuje na jeho nové rozmery súvisiace s digitalizáciou vzdelávacieho procesu. Zo psychologicko-pedagogického hľadiska je možné slovnú úlohu popísať ako špecifický typ autentického modelového problému riešeného v reálnom živote (Verschaffel et al., 2020). Spoločným menovateľom týchto zavedení kľúčového pojmu je fakt, že pri matematických slovných úlohách dochádza k štruktúrovaniu prvkov problémovej situácie a jej následnému riešeniu s využitím matematického modelovania (Kaiser, 2017).

Slovné úlohy, vďaka snahe o prepojenie s reálnym životom, vždy tvorili dôležitú súčasť školskej matematiky. Preto je pochopiteľná pretrvávajúca pozornosť výskumníkov o túto problematiku aj v súčasnosti. V oblasti primárneho vzdelávania boli napríklad realizované štúdie zacielené na skúmanie problémov súvisiacich s porozumením obsahu (Daroczy et al., 2015) alebo na systémové kognitívne a metakognitívne analyzovanie riešenia elementárnych slovných úloh (Hnatová & Mokriš, 2021; Kilpatrick et al., 2001; Lipták, 2022; Nováková, 2022; Prídavková, 2021). V znení slovnej úlohy je podľa viacerých autorov (Strohmaier et al., 2019; Vondrová et al., 2019; Voyer, 2011) taktiež žiaduce rozlišovať viacero kategórií, ku ktorým patria:

- informácie nevyhnutne potrebné k riešeniu (*solving information*), tj. náležité informácie konkretizujúce číselné údaje do podoby vyjadrenia počtu/miery/frekvencie výskytu predmetov/osôb /javov dôležitých pre matematické spracovanie nastoleného problému v slovnej úlohe,

- situačné informácie (*situational information*) - umožňujú žiakovi vytvoriť si predstavu o kontexte, v ktorom je matematický problém ukotvený, informácie sa týkajú aktérov, skúsenostného kontextu a témy konkretizovanej do žiakovi známeho prostredia, sú dôležité pre tvorbu reálneho modelu riešenej situácie,
- vysvetľujúce informácie (*explanation information*) konkretizujú vzťahy medzi údajmi, sú dôležité pre tvorbu matematického modelu,
- naratívne informácie (*superfluous*) - sú tvorené ostatnými informáciami uvedenými v slovnej úlohe, ktoré možno považovať za nadbytočné, pričom špecifickým príkladom nadbytočných informácií v matematike sú nadbytočné číselné informácie.

K vyššie uvedeným kategóriám informácií je pre cieľovú skupinu nami sledovaných participantov, tj. študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie, ešte žiaduce doplniť:

- nekorektné informácie (*incorect information*), ktoré by sa nemali vyskytovať v znení vytváranej slovnej úlohy kvôli ich zjavnej alebo skrytej chybovosti.

Pri zaradení tejto kategórie do tvoreného systému informácií, ktorých nositeľom môže byť slovná úloha, vychádzame z možného pseudo-analytického postupu riešenia slovných úloh produkovaného žiakmi na primárnom stupni vzdelávania (Nunes et al., 2016). V ňom žiaci vykazujú tendenciu vytvárať reálny model nie z celého znenia úlohy, ale len z jeho vybraných fragmentov, čo významným spôsobom negatívne ovplyvňuje tvorbu matematického modelu, jeho spracovanie a následnú interpretáciu výsledku. Tento postup bol prekvapivo identifikovaný aj u študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie (Hegarty et al., 1995; Hnatová & Mokriš, 2021).

3. Metodika výskumu

V tejto štúdii bola vykonaná analýza zdrojových výstupov 90 študentov magisterského stupňa vysokoškolského štúdia v študijnom programe Učiteľstvo pre primárne vzdelávanie. Tvorba výstupov prebiehala v akademických rokoch 2021/22 a 2022/23 s cieľom identifikovať:

- preferencie študentov pri grafickom spracovaní kategorizovaných informácií vyskytujúcich sa v matematických slovných úlohách,
- dosiahnutú úroveň inkorporácie digitálnych technológií (včítane AR technológie) do spracovania zdrojových výstupov študentov.

Preferencia spracovania kategórií informácií bola zisťovaná a vyhodnocovaná deskriptívne frekvenciou ich výskytu v študentmi vytvorených slovných úlohách. V tomto šetrení sa pripúšťal výskyt grafického spracovania aj viacerých typov informácií v jednej slovnej úlohe, na druhej strane ale aj úplná absencia grafického spracovania podpory. Z tohto dôvodu sú zistenia prezentované s využitím absolútnej početnosti vzťahujúcej sa na celkový počet študentov výskumnej vzorky a relatívnej početnosti nimi spracovaných výstupov.

Dosiahnutú úroveň inkorporácie digitálnych technológií do spracovania zdrojových výstupov študentov je možné kvantifikovať pomocou štvorúrovňového modelu SAMR (Puentedura, 2014, 2020).

V prípravnej aktivite bola študentom – budúcich učiteľom elementaristom na seminári predložená úloha o mayskom kľúči (Hnatová et al., 2021; Hnatová & Hnat, 2021), ktorej sledovaným kognitívnym cieľom bolo „objaviť“ teleso majúce vo voľnom rovnobežnom premietaní zadané tvary pôdorysu (kruh), nárysu (trojuholník) a bokorysu (štvorec). Táto úloha bola študentmi prvotne riešená s možnosťou využitia im známych digitálnych technológií.

ISSN 2694-8133

Po zoznámení sa s možnosťami využitia AR technológie v matematickej edukácii, študenti riešili modifikovanú úlohu s využitím dynamickej vizualizácie umožňujúcej zobrazenie výsledného telesa v 3D/AR. Nasledovala diskusia o možných modifikáciách kontextu zadanej úlohy, o možných zmenách jej matematického obsahu (napr. zámena alebo zmena tvarov priemetov hľadaného telesa) a o dopade týchto zmien na riešiteľnosť úlohy v konkrétnej cieľovej skupine žiakov. Záverom bola na študentov vznesená požiadavka samostatne vytvoriť slovnú úlohu s návrhom vlastného modelu mayského kľúča. V úlohe bolo žiaduce dodržať nasledujúce pokyny:

- jasne, presne a terminologicky správne formulovať autorské znenie slovnej úlohy včítane pokynu, resp. otázky, v prípade potreby doplnené o obrazový materiál,
- spracovať (úplné) autorské riešenie vytvorenej slovnej úlohy.

Výber cieľovej skupiny a témy, do ktorej mala byť slovná úloha implementovaná, nebol v pokynoch nijako obmedzený, bol však jednoznačne viazaný na oblasť matematickej edukácie, resp. jej prieniky s ďalšími vzdelávacími oblasťami. Taktiež použitie digitálnych technológií pri tvorbe a spracovaní autorského návrhu a riešenia slovnej úlohy nebolo pokynmi nijak limitované, zostalo plne v kompetencii študentov a bolo založené na báze dobrovoľnosti. Výstupy boli študentmi odovzdávané elektronicky, administrácia procesu bola zabezpečovaná vzdelávacím systémom LMS Moodle. Študentom v ňom bolo umožnené, v prípade záujmu a potreby, diskutovať o aktuálnych problémoch vznikajúcich pri tvorbe sledovaného výstupu medzi sebou navzájom, prípadne aj s cvičiacim učiteľom.

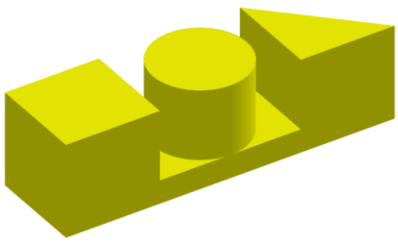
V každom z odovzdaných výstupov boli zisťované a analyzované viaceré atribúty, medzi nimi aj:

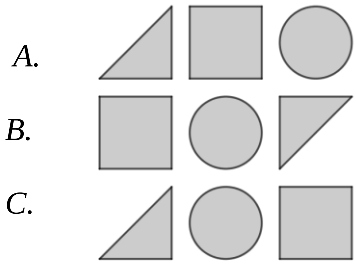
- dotknutá téma, resp. tematická oblasť z matematiky,
- jazykové, obrazové a obsahovo-vecné spracovanie slovnej úlohy,
- posúdenie autorského riešenia slovnej úlohy.

Ukážkou je nasledujúca analýza výstupu, ktorý spracovala študentka Cyntia.

Znenie slovnej úlohy:
„Vyber tú kľúčovú dierku, do ktorej zapadne tento kľúč.

Kľúč: *Kľúčové dierky:*



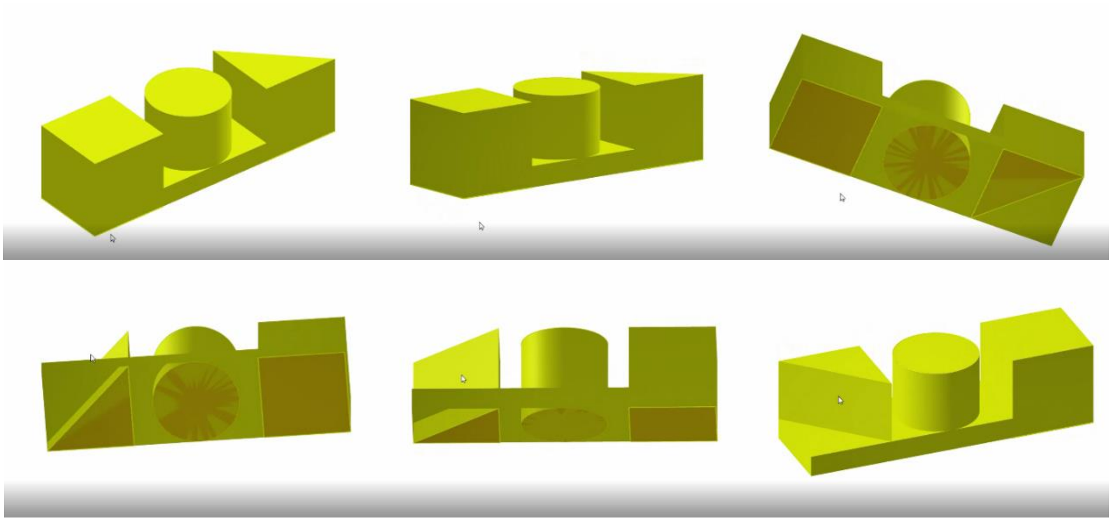


Riešenie:
Voľba A nie je správnym riešením, pretože výstupky kľúča nie sú v správnom poradí.
Voľba B je správnym riešením, stačí kľúč otočiť nadol po jeho dlhšej strane.
Voľba C je tiež správnym riešením, stačí kľúč otočiť nadol po jeho kratšej strane.“

V tomto výstupe bola spracovaná úloha určená pre žiakov 4. ročníka ZŠ (ISCED 1). V rámci zvoleného matematického obsahu možno úlohu priradiť k obsahovému štandardu ŠVP pre primárne vzdelávanie Matematika - tematická oblasť geometria a meranie – priestorové útvary a ich základné vlastnosti. Matematickým výkonom smeruje k požiadavke identifikovať tvar podstáv jednoduchých telies a vzťah medzi vzorom a obrazom v rámci propedeutiky zhodného zobrazenia v E_3, ktorým však autorka prekračuje požiadavky dané ŠVP na primárne vzdelávanie v matematike.

Úloha nesie charakteristiky testovej položky. Jej zaradenie do didaktického testu na primárnom stupni vzdelávania v printovej podobe však nemožno odporúčať. Z ponuky troch odpovedí, čo možno považovať za vhodne zvolený počet odpovedí vzhľadom na cieľovú skupinu žiakov, Cyntia (správne) označuje odpoveď *A* ako jediný distraktor úlohy. Jednoznačne ju týmto zaradzuje do skupiny položiek s výberom viacerých správnych odpovedí. Z pohľadu použitých gramatických kategórií je uvedený pokyn (v akuzatíve nominatívu miesto v akuzatíve plurálu pojmu kľúčová dierka) pre žiaka mätúci a neprispieva k jeho presnej a jednoznačnej voľbe očakávanej správnej odpovede. Terminologické výhrady je taktiež možno vzniesť k popisu hľadania správnej odpovede otočením kľúča „*po jeho dlhšej, resp. po kratšej strane*". Vhodnejším sa z tohto pohľadu javí popis „*okolo jeho dlhšej, resp. kratšej podstavnej hrany*".

Tieto obsahovo-vecné a formálne nedostatky sú v protipóle so spracovaním autorského riešenia úlohy s využitím digitálnych technológií. Študentka v ňom preukazuje schopnosť vizualizovať problém a jeho riešenie v 2D i 3D zobrazení. Vizualizácia je spracovaná v podobe videosekvencie spracovanej s využitím sw. GeoGebra Clasic 5 a znázorňujúcej manipuláciu s 3D modelom kľúča.



Obrázok 1. Vizualizácia študentského návrhu kľúča a manipulácia s nim v 3D zobrazení

Cyntia navyše ponúka žiakovi – účastníkovi elektronického testovania praktickú manipulačnú pomôcku priestorovej rotácie daného telesa okolo troch rotačných osí spracovanú do podoby appletu podporujúceho zobrazenie 3D modelu v AR. Žiak môže nepriamym haptickým ovládaním (tj. ovládaním pomocou dotykového displeja) na inteligentnom mobilnom zariadení (smartfón, tablet, notebook) kreovať polohu telesa v E_3 (Obrázok 1). Cyntiou spracovaná elektronická podpora degraduje pôvodne identifikovanú požiadavku mentálnej rotácie telesa v E_3 na požiadavku určenia zodpovedajúceho poradia rovinných útvarov prezentovaných podstavami jednoduchých telies tvoriacich kľúč. Propedeutikou tejto činnosti v bežnej praxi je vytváranie otlačku pečiatky na papieri. Preto možno predpokladať, že s takouto manipulatívnou činnosťou má žiak primárneho vzdelávania už konkrétnu osobnú skúsenosť. Navyše, elektronické spracovanie appletu dovoľuje žiakovi pred výberom správnej odpovede danú situáciu skúmať, formulovať jednoduché hypotézy a následne ich aj prakticky verifikovať. Tým, za predpokladu systematického prístupu, nepochybne dochádza k podpore rozvoja žiakových bádateľských zručností.

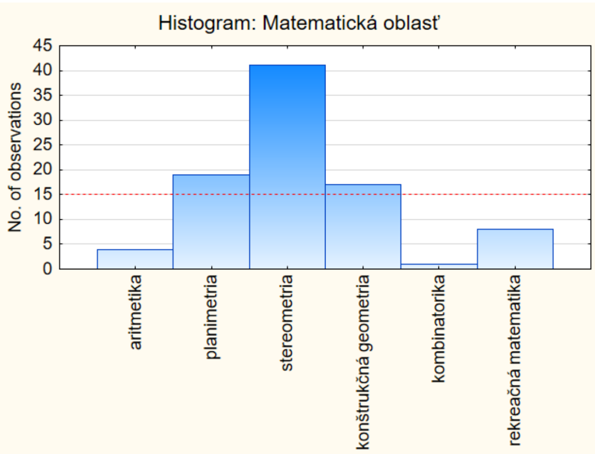
2023, Vol. 5, No. 1
ISSN 2694-8133

4. Výskumné zistenia

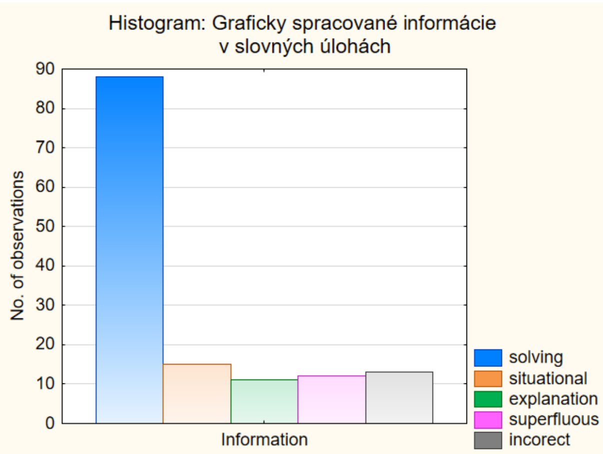
Postup realizácie výskumného šetrenia ako aj v ňom spracované výstupy študentov upozorňujú na niektoré dôležité aspekty súvisiace s tvorbou slovných úloh a ich možnou vizualizáciou v AR.

Podľa našich zistení, prípravná aktivita zásadne neovplyvnila študentov v oblasti výberu cieľovej skupiny, pre ktorú bola nimi slovná úloha vytváraná. Vychádzajúc zo zamerania študentov študujúcich v magisterskom stupni štúdia na fakulte pedagogického zamerania v študijnom programe učiteľstvo pre primárne vzdelávanie je logicky zdôvodniteľné, že ich preferencie sa ťažiskovo rozložili do dvoch úrovní ISCED 1 (79 študentov, tj. 87,78 % výstupov) a ISCED 5 (11 študentov, tj. 12,22 % výstupov).

Na druhej strane, zvolená tematická oblasť prípravnej aktivity mala vplyv na výber tematickej oblasti, do ktorej študenti po jej absolvovaní fokusovali svoj výstup. Testovanie preloženia údajov rovnomerným rozdelením bolo realizované za použitia matematicko-štatistického softvéru Statistica 12 neparametrickým χ^2 testom zhody na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$. Dosiahnuté hodnoty boli vyhodnocované na základe vypočítanej pravdepodobnosti p. Keďže táto je menšia ako sledovaná hladina významnosti (*K-S d* = 0,3436; *p(K-S)* = 0,0000 < 0,05; *Chí kv.* = 10,7341; *p(Chí kv.)* = 0,0135 < 0,05) možno považovať uvedený vplyv prípravnej aktivity na výber tematickej oblasti tvorby slovnej úlohy študentmi za štatisticky významný. Pri grafickom znázornení početnosti výberu jednotlivých tematických oblastí matematickej edukácie je badateľné (Obrázok 2), že temer polovica študentov (41 študentov, tj. 45,56 % výskumnej vzorky) si po absolvovaní prípravnej aktivity zvolila pre vlastnú tvorbu matematickej slovnej úlohy oblasť stereometrie. Naopak len jeden študent sa rozhodol pre výber tematickej oblasti kombinatorika a štyria študenti pre tematickú oblasť aritmetika, s ktorými táto prípravná aktivita obsahovo-vecne nekorešpondovala (Obrázok 2).



Obrázok 2. Preferencie tematických oblastí matematickej edukácie v študentmi vytváraných slovných úlohách



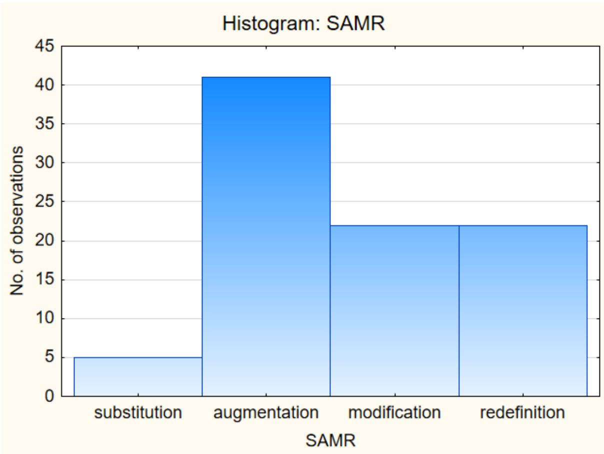
Obrázok 3. Preferencie digitálneho spracovania informácií v študentmi vytváraných slovných úlohách

Vychádzajúc zo študentmi preferovaných tematických oblastí matematickej edukácie (Obrázok 2) a cieľovej skupiny (ISCED 1), pre ktorú boli slovné úlohy určené, je snaha študentov prezentovať informácie obsiahnuté v slovných úlohách s využitím digitálnych technológií (v 139 prípadoch) pochopiteľná. Najvyššie zastúpenie (n = 88, tj. 63,31 % prípadov; 97,78 % výstupov) dosiahla kategória informácií nevyhnutne potrebných k riešeniu slovnej úlohy (*solving information*). V 13 prípadoch (9,35 % prípadov; 14,44 % výstupov) sa však v znení alebo autorskom riešení slovnej úlohy vyskytla nekorektná (tj. nedostatočne zadaná, chybne zadaná alebo chybne spracovaná) informácia (Obrázok 3).

ISSN 2694-8133

V tvorbe slovnej úlohy a spracovaní jej autorského riešenia bola taktiež deskriptívne sledovaná dosiahnutá úroveň inkorporácie digitálnych technológií s využitím štvorúrovňového modelu SAMR: substitúcia (*substitution*), augmentácia (*augmentation*), modifikácia (*modification*) a redefinícia (*redefinition*) (Obrázok 4). Všetci študenti výskumnej vzorky (n = 90) boli schopní inkorporovať digitálne technológie do spracovania svojich výstupov, pričom najnižšiu početnosť (5 študentov, 5,56 % výstupov) dosiahla najnižšia úroveň začlenenia digitálnych technológií do aktivity – substitúcia. Tá spočíva v nahradení doteraz vykonávanej činnosti činnosťou s využitím digitálnych technológií, aj keď bez pridanej funkčnej zmeny (Puentedura, 2020). V praxi to znamená, že študenti dosahujúci túto úroveň boli ochotní, resp. schopní napríklad spracovať návrh a autorské riešenie slovnej úlohy na papier, odfotiť ho a vo formáte obrazového materiálu odovzdať do vzdelávacieho systému.

Modusom dosiahnutým v študentskej tvorbe matematických slovných úloh je úroveň augmentácie ($n(\hat{x})$ = 41), čo v spojitosti s AR technológiou vypovedá o jej možnom využití v podobe nosiča funkčného vylepšenia existujúcich postupov, ktoré sa ale začlenením technológie do aktivity zásadným spôsobom nemenia (Puentedura, 2020). V praxi to znamená, že študenti dosahujúci úroveň augmentácie (celkovo 45,56 % výstupov výskumnej vzorky) sú schopní v rámci nimi prezentovaných digitálnych zručností vyhľadať na webových stránkach dostupné applety podporované AR technológiou a zapracovať ich do svojich aktivít. Napriek absolvovanej výučbe, však títo študenti nie sú ochotní alebo schopní takéto applety tvoriť či modifikovať. Vizuálna podpora ich autorského riešenia slovnej úlohy spočívala najčastejšie v statickom spracovaní obrazového materiálu v niektorom z grafických editorov do podoby očakávaného výsledku.

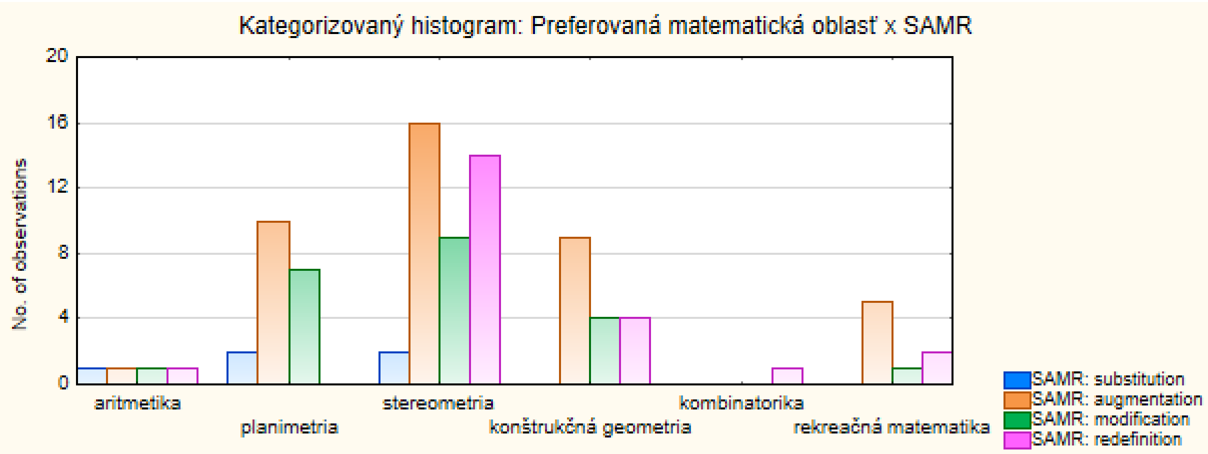


Obrázok 4. Úrovne modelu SAMR dosahované študentmi (n = 90)

V prípade dostupnej technickej podpory, výberu užívateľsky príjemného softvéru, záujmu a aktívneho prístupu k obsahu vzdelávania vo výberovom predmete zameranom na využitie digitálnych technológií vo výučbe matematiky, však dokážu aj budúci učitelia – elementaristi úspešne zvládnuť tvorbu jednoduchých dynamických appletov s podporou AR technológie. Tento fakt potvrdzuje 54,44 % výstupov študentov výskumnej vzorky, ktorí pri tvorbe slovných úloh a ich autorských riešení preukázali dosiahnutie transformačných úrovní modelu SAMR. Na úrovni modifikácie (22 študentov, 27,22 % výstupov) bola v ich výstupoch obsiahnutá vlastná tvorba multimediálnych podporných zdrojov, ku ktorým sú zaradzované napríklad výstupy využívajúce 3D zobrazenie daného problému alebo situácie. V prípade redefinície bol výstup študentov (22 študentov, 27,22 % výstupov) reálne spracovaný AR technológiou do podoby appletu, videotutoriálu, nelineárne štruktúrovanej multimediálnej prezentácie resp. interaktívneho elektronického zošita.

Kategorizované rozdelenie výstupov prezentuje možnosti porovnania početností v jednotlivých úrovniach vzhľadom na vybrané tematické oblasti (Obrázok 5).

Naznačuje možné dosahovanie najvyššieho stupňa implementácie (tj. redefinície) v geometrii, a teda preddikuje aj vhodnosť využívania AR technológie práve v tejto oblasti školskej matematiky. Overenie tvrdenia z matematicko-štatistického hľadiska však vyžaduje navýšiť počet výstupov tak, aby boli splnené podmienky použitia zodpovedajúcich kvantitatívnych metód spracovania údajov. Týmto je daný jeden zo smerov našej ďalšej výskumnej činnosti v tejto oblasti.



Obrázok 5. Študentmi preferované tematické oblastí tvorby slovných úloh kategorizované v úrovniach modelu SAMR

5. Záver

Inkorporácia technológií do matematickej edukácie má svoje výhody i úskalia. Tvorba slovných úloh z matematiky podporovaná AR technológiou bola študentmi prijatá pozitívne v zmysle ponúkaného komfortu, novosti a zábavy pri jej použití vo výučbe. Diskomfort nastupoval v situáciách, keď mala zábava ustúpiť samostatnej činnosti súvisiacej s tvorbou požadovaných výstupov, pri zlyhávajúcej funkčnosti technológie spôsobenej subjektívnymi alebo objektívnymi, technickými alebo softvérovými podmienkami.

Pri začleňovaní AR technológie do výučby je dôležitý výber a realizácia prípravných aktivít. Tie, podľa našich zistení, zanechávajú v študentoch stopu „vzoru“ a môžu na nich pri následne požadovanej tvorbe výstupov pozitívne (predpokladáme však, že aj negatívne) vplývať.

Dosiahnutú úroveň implementácie technológie do danej činnosti je možné kvantifikovať využitím teoretického rámca poskytovaného modelom SAMR (Hnatová, 2022; Lacruz, 2018). Pri našom pedagogickom ataku bola vo výstupoch študentov v najväčšej početnosti identifikovaná dosiahnutá úroveň augmentácie, tj. rozšírenia začlenenia AR technológie do tvorby slovných úloh v matematike. Štatisticky významnú početnosť pri výbere tematickej oblasti, v ktorej bola študentmi slovná úloha z matematiky vytváraná, dosiahla oblasť stereometrie. V nej bola zaznamenaná aj najvyššia početnosť študentov dosahujúcich najvyšší stupeň začlenenia technológie – úroveň redefinície. Tento fakt je povzbudivým príkladom možnej inkorporácie AR technológie do pregraduálnej výučby budúcich učiteľov – elementaristov (nielen) v matematickej edukácii.

Acknowledgements

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 036PU-4/2021 *Technológia rozšírenej reality v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov elementaristov* riešeného na PF PU v Prešove.

Literatúra

Aggarwal, R., & Singhal, A. (2019). Augmented Reality and its effect on our life. *2019 9th International Conference on Cloud Computing, Data Science & Engineering (Confluence)*, 510–515. https://doi.org/10.1109/CONFLUENCE.2019.8776989

Azuma, R., Baillot, Y., Behringer, R., Feiner, S., Julier, S., & MacIntyre, B. (2001). Recent advances in augmented reality. *IEEE Computer Graphics and Applications*, *21*(6), 34–47. https://doi.org/10.1109/38.963459

Cahyono, A. N., Sukestiyarno, Y. L., Asikin, M., Miftahudin, Ahsan, M. G. K., & Ludwig, M. (2020). Learning mathematical modelling with augmented reality mobile math trails program: How can it work? *Journal on Mathematics Education*, *11*(2), 181–192. Scopus. https://doi.org/10.22342/jme.11.2.10729.

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D., & Nuerk, H.-C. (2015). Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology*, *6*. https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2015.00348

Dunleavy, M., Dede, C., & Mitchell, R. (2009). Affordances and Limitations of Immersive Participatory Augmented Reality Simulations for Teaching and Learning. *Journal of Science Education and Technology*, *18*(1), 7–22. https://doi.org/10.1007/s10956-008-9119-1

Garzón, J. (2021). An Overview of Twenty-Five Years of Augmented Reality in Education. *Multimodal Technologies and Interaction*, *5*(7), Article 7. https://doi.org/10.3390/mti5070037

Hegarty, M., Mayer, R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, *87*, 18–32. https://doi.org/10.1037/0022-0663.87.1.18

Hnatová, J. (2022). Technológia rozšírenej reality v matematickej edukácii - model SAMR. *Vzdelávanie a spoločnosť VII*, 68–79.

Hnatová, J. (2023). *Technológia rozšírenej reality v matematickej edukácii: SWOT analýza*. Prešovská univerzita v Prešove.

Hnatová, J., & Hnat, A. (2021). Matematický príbeh o mayskom kľúči s využitím AR. In M. Krátká, P. Eisenmann, & V. Chytrý (Ed.), *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let 2021 Sborník příspěvků*, (s. 147–156).

Hnatová, J., Hnat, A., & Bučková, A. (2021). Multimediálna podpora edukačnej aktivity v matematike technológiou rozšírenej reality. *South Bohemia Mathematical Letters*, *29*(1), 31–40.

Hnatová, J., & Mokriš, M. (2021). *Kalibrácia metakognitívneho monitorovania v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov: Presnosť a skreslenie hodnotenia*. Vydavateľstvo Prešovskej univerzity.

Kaiser, G. (2017). *The teaching and learning of mathematical modeling*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. https://acuresearchbank.acu.edu.au/item/8658w/the-teaching-and-learning-of-mathematical-modeling

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Research Council. https://nap.nationalacademies.org/catalog/9822/adding-it-up-helping-children-learn-mathematics

Lacruz, N. (2018). SAMR Model. V R. Power, *Technology and the curriculum* (s. 431). Pressbooks. https://techandcurriculum.pressbooks.com/chapter/samr/

Lipták, J. (2022). What is a geometric shape? Preschool and primary pre-service teacher's misconceptions. *Elementary Mathematics Education Journal*, *4*(1), 26–34.

Milgram, P., & Kishino, F. (1994). A Taxonomy of Mixed Reality Visual Displays. *IEICE Trans. Information Systems*, *E77-D, č. 12*, 1321–1329.

Nováková, E. (2022). Reflection of pupils' composition of word problems: A contribution to the development of didactic competences of prospective primary school teachers. V B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Ed.), *Critical thinking practices in mathematics education and beyond* (s. 71–79). Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Nunes, T., Dorneles, B. V., Lin, P.-J., & Rathgeb-Schnierer, E. (2016). Teaching and Learning About Whole Numbers in Primary School. V T. Nunes, B. V. Dorneles, P.-J. Lin, & E. Rathgeb-Schnierer (Ed.), *Teaching and Learning About Whole Numbers in Primary School* (s. 1–50). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45113-8_1

Prídavková, A. (2021). Riešiteľské stratégie vybraných matematických úloh v skupine študentov – budúcich učiteľov primárneho vzdelávania. *Zbirnyk_Osvita i suspilstvo VI,* 216–225. https://www.wszia.opole.pl/wp-content/uploads/2020/05/Zbirnyk_Osvita-i-suspilstvo-VI_new.pdf

Prídavková, A. (2022). Technológia rozšírenej reality a rozvoj matematických schopností. *Elementary Mathematics Education Journal*, *4*(1), 53–63.

Puentedura, R. R. (2014). *Building Transformation: An Introduction to the SAMR Model*. http://www.hippasus.com/rrpweblog/archives/2014/08/22/BuildingTransformation_AnIntroductionToSAMR.pdf

Puentedura, R. R. (2020). *SAMR – A Research Perspective*. http://hippasus.com/blog/archives/499

Salinas, P., & Pulido, R. (2017). Understanding the conics through augmented reality. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(2), 341–354. Scopus. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00620a

Schmalstieg, D., & Höllerer, T. (2016). *Augmented reality: Principles and practice*. Addison-Wesley.

Strohmaier, A., Lehner, M., Beitlich, J., & Reiss, K. (2019). Eye Movements During Mathematical Word Problem Solving—Global Measures and Individual Differences. *Journal für Mathematik-Didaktik*. https://doi.org/10.1007/s13138-019-00144-0

Thamrongrat, P., & Law, E. L.-C. (2019). Design and Evaluation of an Augmented Reality App for Learning Geometric Shapes in 3D. V D. Lamas, F. Loizides, L. Nacke, H. Petrie, M. Winckler, & P. Zaphiris (Ed.), *Human-Computer Interaction – INTERACT 2019* (s. 364–385). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29390-1_20

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM*, *52*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

Vondrová, N., Havlíčková, R., Hiršová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha: Mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Univerzita Karlova, Nakladatelství Karolinum.

Voyer, D. (2011). Performance in mathematical problem solving as a function of comprehension and arithmetic skills. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*(5), 1073–1092. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9239-y

Vužňáková, K. (2022). Čo (ne)vieme o multimodalite, digitalizácii a porozumení textu. *O dieťati, jazyku, literatúre*, 2, 162–166.

Wang, A. Y., Fuchs, L. S., & Fuchs, D. (2016). Cognitive and linguistic predictors of mathematical word problems with and without irrelevant information. *Learning and Individual Differences*, *52*, 79–87. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.10.015

ISSN 2694-8133

ZAMYŠLENÍ NAD PRAVIDLY SOUTĚŽE MATEMATICKÝ KLOKAN

Karel PASTOR[1]
[1] Palacký University, Faculty of Education (Czech Republic)
karel.pastor@upol.cz

Abstrakt

Článek se zamýšlí nad pravidly soutěže Matematický klokan, podle kterých soutěžící vstupuje do soutěže s 24 body (v kategoriích Klokánek, Benjamin, Kadet, Junior a Student), resp. s 18 body (v kategorii Cvrček), přičemž za každou nesprávnou odpověď se 1 bod odčítá. Podle těchto pravidel může soutěžící bez jakékoliv snahy úlohy řešit získat více bodů než žák, který se bude o správná řešení intenzivně pokoušet. Úkolem učitele je tedy pokusit se žáky motivovat k aktivnímu přístupu k soutěži a tím rozvinout jejich logické myšlení. Článek by mohl poskytnout pravděpodobnostní zázemí k tomuto úkolu. Ukážeme mimo jiné, s jakou pravděpodobností je možné při náhodném tipování výsledků získat například 12 bodů.

Klíčová slova: Matematický klokan, logické myšlení, pravděpodobnost.

THOUGHTS ON THE RULES OF THE MATHEMATICAL KANGAROO COMPETITION

Abstract

The paper is focused on the rules of the Mathematical Kangaroo competition. A contestant enters the competition with 24 points (in the Ecolier, Benjamin, Cadet, Junior, and Student categories) or 18 points (in the Pre-Ecolier category), with 1 point deducted for each incorrect answer. According to these rules, a contestant who does not show effort to solve the problems can get more points than a student who tries hard to find the correct solutions. The teacher's task is to motivate the students to actively approach the competition and thus develop their logical thinking. The paper could provide a probabilistic background to this task. Among other things, we will show with what probability it is possible to get, for example, 12 points when randomly guessing.

Keywords: Mathematical Kangaroo, logical thinking, probability.

1. Úvod

Nejstarší předmětovou soutěží v ČR je Matematická olympiáda, ve školním roce 2022/2023 se konal již její 72. ročník. Mezinárodní matematická olympiáda je pro nejlepší řešitele nejvyšší kategorie A (určená maturitním a předmaturitním ročníkům) pořádána od roku 1959 (Matematická olympiáda, 2023). Matematické olympiády se účastní zpravidla nejtalentovanější žáci, jedná se o poměrně náročnou soutěž, která od účastníků vyšších kategorií vyžaduje i pečlivou přípravu.

Za méně náročnou matematickou soutěží, do které se může zapojit větší počet matematicky zdatných žáků 2. stupně základních škol a příslušných ročníků víceletých gymnázií, můžeme považovat Pythagoriádu. Ve školním roce 2022/2023 proběhl její 45. ročník (Pythagoriáda, 2023).

Matematickou soutěží, která si klade za cíl zapojit pokud možno všechny žáky od 2. třídy základní školy až po maturitní ročníky středních škol, je Matematický klokan. Jedná se o mezinárodně koordinovanou soutěž pořádanou od roku 1991, která byla inspirována obdobnou australskou matematickou soutěží (Wikipedia, 2023), proto je v názvu soutěže klokan. Česká republika se do soutěže Matematický klokan zapojuje od roku 1995 (Matematický klokan ČR, 2023).

2. Zajímavá pravidla

Připomeňme si nejprve stručně pravidla soutěže Matematický klokan (Matematický klokan ČR, 2023). Soutěží se v 6 kategoriích:

- Cvrček: žáci 2. a 3. ročníku ZŠ,
- Klokánek: žáci 4. a 5. ročníku ZŠ,
- Benjamín: žáci 6. a 7. ročníku ZŠ,
- Kadet: žáci 8. a 9. ročníku ZŠ,
- Junior: studenti 1. a 2. ročníku střední školy,
- Student: studenti 3. a 4. ročníku střední školy.

Studenti víceletých gymnázií soutěží ve věkově adekvátních kategoriích (například student 2. ročníku šestiletého gymnázia soutěží v kategorii Kadet). Účastníci soutěže v kategorii Cvrček řeší 18 uzavřených úloh (6 úloh za 3 body, 6 úloh za 4 body a 6 úloh za 5 bodů). Účastníci ostatních kategorií řeší 24 úloh (8 úloh za 3 body, 8 úloh za 4 body a 8 úloh za 5 bodů).

U každé úlohy si soutěžící může vybrat z 5 nabízených odpovědí, přičemž právě jedna je správná. Za každou správně zvolenou odpověď získává soutěžící příslušný počet bodů (tedy 3, 4 nebo 5). Pokud zvolí nesprávnou odpověď, jeden bod se mu odečítá. Pokud soutěžící nezvolí žádnou odpověď, na jeho bodovém zisku se to neprojeví.

Při vstupu do soutěže získává každý účastník právě tolik bodů, kolik řeší úloh. To znamená, že účastníci kategorie Cvrček dostávají na začátku 18 bodů a účastníci ostatních kategorií bodů 24. Nejhorší možný dosažený výkon je tak ve všech kategoriích 0 bodů. Naopak nejlepším možným výsledkem v kategorii Cvrček je zisk 90 bodů, u starších kategorií je to pak 120 bodů.

Předchozí pravidla jsou zajímavá, unikátní a jsou samozřejmě pro všechny (v rámci jednotlivých kategorií) stejná. Nicméně podle těchto pravidel může dojít k relativně paradoxnímu jevu, kdy soutěžící bez jakékoliv snahy úlohy řešit získá více bodů než žák, který se bude o správná řešení intenzivně pokoušet. Nahlédněme nyní do statistik uvedených ve sbornících soutěže (Matematický klokan ČR, 2023). Tabulky 1 a 2 ukazují počty účastníků v jednotlivých kategorií a dále počet soutěžících, kteří získali stejně nebo méně než soutěžící, který se spokojí se vstupními body (tj. 18 v kategorii Cvrček a 24 v ostatních kategoriích) a o řešení příkladů se ani nepokusí.

Pokud si tuto situaci žák, který získal méně bodů, než se kterými do soutěže vstupoval, uvědomí, může příští rok na řešení úloh rezignovat, což samozřejmě neodpovídá cílům soutěže Matematický klokan.

Zajímá nás, zda k takovému rozhodnutí u žáků dochází. Na základě grafů znázorňujících bodové výsledky v jednotlivých kategoriích a ročnících uvedených ve sbornících soutěže Matematický klokan (Matematický klokan ČR, 2023) je možné se domnívat, že takových žáků příliš nebude, protože bodový výsledek 24 bodů (resp. 18 bodů) v příslušných grafech nevykazuje větších anomálií. To je velmi pozitivní zjištění. Existuje zřejmě více důvodů, proč ze strany žáků k takovému jednání nedochází, například:

Tabulka 1. Cvrček, 2013-2022

Celkový počet soutěžících	**Počet soutěžících s maximálně 18 body**	**Počet soutěžících s maximálně 18 body v %**
857 168	65 410	7,6

Tabulka 2. Klokánek – Student, 2013-2022

Kategorie	**Celkový počet soutěžících**	**Počet soutěžících s maximálně 24 body**	**Počet soutěžících s maximálně 24 body v %**
Klokánek	869 591	48 108	5,5
Benjamín	637 203	67 642	10,6
Kadet	546 244	56 994	10,4
Junior	136 564	12 108	8,9
Student	64 738	6 620	10,2

- Z tabulek 1 a 2 je patrné, že starších kategorií se účastní méně soutěžících než v kategoriích Cvrček a Klokánek, což koresponduje s tím, že na mnoha školách učitelé do soutěže Matematický klokan bohužel posílají jen matematicky nadanější žáky, od kterých lze očekávat výsledek překonávající hodnotu vstupních bodů.
- Pro žáky to může být výzva: „minulý rok jsem hodnotu vstupních bodů nepřekonal, letos se o to pokusím".
- Žáci si nedovolí o řešení se nepokusit a odevzdat nevyplněné zadání úloh.
- Učitelé odvádějí kvalitní práci a k aktivní účasti na soutěži Matematický klokan se jim daří žáky motivovat.

Domníváme se, že pro motivování žáků je dobré mít mimo jiné přehled o pravděpodobnostech při náhodných volbách odpovědí na úkoly, k čemuž slouží příklady z následující kapitoly.

3. Pravděpodobnosti

Podle strategie řešení můžeme hovořit o těchto typech soutěžících:

- *Pasivní soutěžící*: úlohy neřeší a ani nehádá jejich řešení, jeho výsledek odpovídá hodnotě vstupních bodů (tj. 18 v kategorii Cvrček a 24 v ostatních kategoriích).
- *Tipující soutěžící*: úlohy neřeší a řešení pouze hádá, může získat 0 - 90 bodů v kategorii Cvrček nebo 0 – 120 bodů ve vyšších kategoriích.
- *Aktivní soutěžící*: snaží se vyřešit všechny úlohy, může získat 0 - 90 bodů v kategorii Cvrček nebo 0 – 120 bodů ve vyšších kategoriích.

Strategie ostatních soutěžících je možné považovat za kombinaci předchozích základních kategorií.

Příklad 1. Jaká je pravděpodobnost, že tipující soutěžící v kategorii Cvrček získá plný počet bodů?

Řešení: $\boldsymbol{P} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\mathbf{18}} \cong \mathbf{2{,}6214 \cdot 10^{-13}}$.

Příklad 2. Jaká je pravděpodobnost, že tipující soutěžící v kategorii Klokánek získá plný počet bodů?

Řešení: $\boldsymbol{P} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\mathbf{24}} \cong \mathbf{1{,}6777 \cdot 10^{-17}}$.

Příklad 3. Jaká je pravděpodobnost, že tipující soutěžící v kategorii Klokánek získá 118 nebo více bodů?

Řešení: Ve skutečnosti soutěžící vzhledem k bodování příkladů nemůže získat ani 118, ani 119 bodů. Řešení Příkladu 3 je tak stejné jako řešení Příkladu 2, tj. hledaná pravděpodobnost je $\boldsymbol{P} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\mathbf{24}} \cong \mathbf{1{,}6777 \cdot 10^{-17}}$.

Příklad 4. Jaká je pravděpodobnost, že tipující soutěžící v kategorii Klokánek získá 116 bodů?

Řešení: Soutěžící musí uhádnout správně všechny úlohy s výjimkou jedné tříbodové. Jelikož tříbodových úloh je 8, hledaná pravděpodobnost je

$$\boldsymbol{P} = \mathbf{8} \cdot \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{23}} \cong \mathbf{5{,}36871 \cdot 10^{-16}}.$$

Příklad 5. Jaká je pravděpodobnost, že tipující soutěžící v kategorii Klokánek získá 0 bodů?

Řešení: $\boldsymbol{P} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\mathbf{24}} \cong \mathbf{0{,}00472.}$

Příklad 6. Jaká je pravděpodobnost, že tipující soutěžící v kategorii Klokánek získá 12 bodů?

Řešení: Soutěžící může 12 bodů získat dvěma způsoby:

- Uhodne řešení 3 úloh za 3 body a k tomu mu zůstanou 3 vstupní body. Odpovídající pravděpodobnost je $\boldsymbol{P_1} = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\mathbf{3}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\mathbf{21}} \cong \mathbf{0{,}004132.}$
- Uhodne řešení 2 úloh za 5 bodů a k tomu mu zůstanou 2 vstupní body. Odpovídající pravděpodobnost je $\boldsymbol{P_2} = \binom{8}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\mathbf{2}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\mathbf{22}} \cong \mathbf{0{,}008264.}$

Soutěžící tak může získat 12 bodů s pravděpodobností $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P_1} + \boldsymbol{P_2} \cong \mathbf{0{,}01240.}$

Příklad 7. Jaká je střední hodnota náhodné veličiny $\boldsymbol{X}$: „počet bodů získaný za tříbodové úlohy tipujícím soutěžícím v kategorii Klokánek“?

Řešení: Tipující soutěžící v průměru uhádne $8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$ odpovědí na tříbodové úlohy, za které získá $1{,}6 \cdot 3 = 4{,}8$ bodů a k tomu mu zůstane 1,6 vstupních bodů. Odtud

$$E(X) = 4{,}8 + 1{,}6 = 6{,}4.$$

ISSN 2694-8133

Příklad 8. Jaká je střední hodnota náhodné veličiny $\boldsymbol{X}$: „počet bodů získaný za čtyřbodové úlohy tipujícím soutěžícím v kategorii Klokánek“?

Řešení: Tipující soutěžící v průměru uhádne $8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$ odpovědí na čtyřbodové úlohy, za které získá $1{,}6 \cdot 4 = 6{,}4$ bodů a k tomu mu zůstane 1,6 vstupních bodů. Proto

$$E(X) = 6{,}4 + 1{,}6 = 8.$$

Příklad 9. Jaká je střední hodnota náhodné veličiny $\boldsymbol{X}$: „počet bodů získaný za pětibodové úlohy tipujícím soutěžícím v kategorii Klokánek“?

Řešení: Tipující soutěžící v průměru uhádne $8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$ odpovědí na pětibodové úlohy, za které získá $1{,}6 \cdot 5 = 8$ bodů a k tomu mu zůstane 1,6 vstupních bodů. Tudíž

$$E(X) = 8 + 1{,}6 = 9{,}6.$$

Příklad 10. Jaká je střední hodnota náhodné veličiny $\boldsymbol{X}$: „počet bodů získaný za všechny úlohy tipujícím soutěžícím v kategorii Klokánek“?

Řešení: Z řešení Příkladů 7-9 vyplývá, že příslušná střední hodnota je

$$E(X) = 6{,}4 + 8 + 9{,}6 = 24,$$

tedy je rovna hodnotě vstupních bodů.

4. Závěr

Podle předchozích příkladů je možné doporučit následující strategii pro úlohy, které soutěžící neumí vyřešit: tipovat řešení pětibodových úloh a u těch tříbodových se spokojit se vstupními body. Jedná se samozřejmě o „statistickou“ radu, někdy bude jistě lepší, když soutěžící dá na svou intuici.

Soutěž Matematický klokan obsahuje zajímavé a pěkné úlohy, které přispívají k rozvoji kombinatorických a logických schopností žáků (1. stupně). Je výborné, pokud má žák (i ten méně talentovaný na matematiku) radost z některé úspěšně vyřešené úlohy.

Literatura

Wikipedia (2023). *Mathematical Kangaroo*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_Kangaroo (accessed on 20 October 2023).

Matematická olympiáda (2023). Retrieved from https://www.matematickaolympiada.cz/ (accessed on 20 October 2023).

Matematický klokan ČR (2023). Retrieved from https://matematickyklokan.net/ (accessed on 20 October 2023).

Pythagoriáda (2023). Retrieved from https://www.pythagoriada.cz/ (accessed on 20 October 2023).

THE CONSTRUCTING CONCEPTS OF FRACTION: REPRESENTED BY CIRCLES, RECTANGLES, AND NUMBER LINES

Anton PRAYITNO[1]
[1] Wisnuwardhana University, Department of Mathematics education (Indonesia)
arsedi2003@gmail.com

Abstract

This study aims to gather information regarding the cognitive processes of 11th-grade students when constructing the concept of fractions using visual representations such as circles, rectangles, and number lines. A qualitative descriptive research approach was employed by the researcher. The data collection process began with a questionnaire consisting of 15 questions divided into five types, each type focusing on circles, rectangles, and number lines. Subsequently, students were interviewed to reinforce their answers. The collected data, comprising performance results and interviews, were analyzed to understand the students' thinking processes. The findings of this study revealed that the thinking process of 11th-grade students in understanding fractions through visual representations involved the assimilation and accommodation processes. It was observed that student S1 effectively employed assimilation in constructing the concept of fractions, while student S2 demonstrated a relatively good understanding using the accommodation process. However, student S3 struggled with the process of accommodation, resulting in a lesser degree of understanding.

Keywords: thinking process, constructing, concept of fractions, representation

1. Introduction

In learning mathematics, thinking is a very important cognitive activity. The success of learning mathematics is influenced by thinking ability. Thinking is the result of students' cognitive activities in solving problems and this can be seen through the behavior and results of student performance (Prayitno et al., 2018). There are several researchers who have examined the importance of thinking in mathematics. From the results of the studies, it was obtained the characteristics of thinking errors and the types of students' thinking processes in solving problems (Subanji & Nusantara, 2013; Subanji & Supratman, 2015). Thinking is a cognitive activity in which the activity occurs through a process. Supriadi et al (Supriadi et al., 2015) has studied the thinking process and reveals that in the thinking process there is the formation of understanding, the formation of opinions and the drawing of conclusions. The thinking process is a cognitive process that begins with receiving data, then encoding it and storing it in memory, then the data will be retrieved when the individual needs it in the next data processing (Siswono, 2007). Meanwhile, according to Prayitno & Suarniati (2017) the process of thinking is the mental activity carried out by students in solving problems and it can be seen from students' behavior which appears to be the result of completing tasks. In this study, the researcher defines the process of thinking as the course of a cognitive activity that can be observed through answers, student work, and the movements of a person in working on or solving a problem or question. In one's thinking process, there is a process between incoming new information and schemas, thus the incoming information will be adjusted to the assimilation and accommodation process (Simatwa, 2010; Subanji & Supratman, 2015).

The assimilation process is a cognitive process in which a person combines or integrates new perceptions, concepts or experiences into the schemes or pattern in his mind. While, the accommodation process refers to a process in which a person combines or unifies new stimuli through changing old existing schemes (internal structures of knowledge) to adapt to existing problems (Subanji & Supratman, 2015). According to Piaget, the assimilation and accommodation process the ways through which children integrate new experiences into already existing cognition structures (schema) and later will form a new scheme (Gembong, 2016). In this case, when someone is in the process of learning to gain an understanding of a knowledge, he will try to renew or alter his existing understanding or experience with the new one by assimilating into existing schemes or reconstructing these schemes to accommodate this knowledge (Hackenberg, 2010).

Mathematics learning is heavily influenced by the philosophy of constructivism which emphasizes that knowledge is formed (constructed) from oneself. Several researchers have examined topic related to the term 'construction' and on how individuals can construct the concept. From the results of this study, the researcher explained that information processing theory is used to construct a concept or knowledge (Subanji, 2017). Information processing theory explains the construction of knowledge, from entering information, filtering, processing, storing, to recalling or retrieving information in knowledge storage. A lot of information (in the form of external stimulus) show up every time and is selected through sensory memory. Unimportant information will be ignored (forgotten), while important information will be continued to the short-term memory and being processed by utilizing (calling up) information in the long-term memory. There are 4 (four) results of information processing, the continuation of short-term memory, namely: (1) the results of processing that are not important will be forgotten, (2) the results of processing that are very important and have not been completed in processing will be repeated, (3) the results of processing that are action is needed, a response will appear, and (4) the results of information processing that have been completed are coded and stored in long-term memory.

In the learning application, fractions require a deeper understanding. This understanding is obtained from learning whole numbers, because fractions are numbers that can be represented by a pair of whole numbers $\frac{a}{b}$, where b ≠ 0 (Musser et al., 2013; Siegler et al., 2013). Learning and understanding related to the concept of fractions has started since elementary school. However, students do not really understand the concept of fractions because they are still in the first stage of learning, namely memorization. This can be seen when students mentioned the concept of fractions symbolically, yet they were unable to express the meaning of the symbols (Permadi & Irawan, 2016). It can be said that learning fractions is difficult for children in general. In line with Tunç-Pekkan statement (2015) that fractions are perceived as one of the most difficult lessons in mathematics to learn in all countries. As can be seen, the results of the US National Assessment of Educational Progress (National Assessment of Educational Progress (NAEP), 2007) study reported that 60 % of 4thgradestudents could not determine whether $\frac{1}{4}$ was greater than $\frac{1}{5}$, and half of 8th-grade students did not choose the correct option when ordering three fractions from least to greatest. In addition, the TIMSS Numeracy 2015 results (which are only related to the concept of fractions) showed that Indonesian students' ability regarding the concept of fractions is relatively low because only 42.67 % of students answered correctly comparing to the international level, namely 47.33 %. The results of Indonesian students are lower than the percentage of students' correct answers in countries with a TIMSS score below Indonesia, namely Jordan (TIMSS score of 388) of 46.7 % and South Africa (TIMSS score of 376) of 48.72 %.

There are several factors that make fraction so difficult concepts to learn, namely the sub-constructs (Pantziara & Philippou, 2012). Sub-constructs refer to knowledge pieces to understand how a fraction problem can be solved (Tunç-Pekkan, 2015). To construct the concept of fractions, there are five interrelated sub-constructs, namely part-whole, ratio, measure, operator, and quotient (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). In this study, researchers focused on two subconstructs to find out students' thinking processes, namely the part-whole and measure subconstructs. The part-whole sub-construct can be used to identify units and common fractions while the measure sub-construct can be used to construct ordinary fractions, reconstruct units from their parts or mixed fractions, and create and identify the number of mixed fractions (Tunç-Pekkan, 2015).

In forming the fractional scheme and its operations, (Hackenberg, 2013; Izsak et al., 2008) summarized into 5 schemes, namely 1) Parts-within-wholes fraction scheme in which there is only partitioning operations observed and the result of the parts might not be equal. This scheme is used to identify fraction symbols for the already partitioned and shaded drawings of pie charts, without attending to the parts being equal. 2) part-whole fraction scheme, where this scheme is used to arrange fractions by dividing the whole into equal parts. Then taking a part out of a whole without mentally destroying the whole to make up the fraction. 3) Partitive unit fraction schemes, this scheme is used to determine the units of the unit fractions that have been given, by partitioning the shape into some equal parts, then takes one of the partitions, and iterates it to make the whole. 4) Partitive fractional scheme, this scheme is used to determine the genuine fraction of the whole that has not been divided. By dividing the genuine fraction to get the units fraction. It then repeats the unit fraction to create the genuine fraction and the whole. Repetition in this scheme is only limited to all parts. 5) iterative fractional scheme, this scheme is used to complete the formation of ordinary fractions and mixed fractions by dividing the same parts so as to produce unit fractions and then repeating them to determine the whole and units of the fraction.

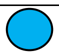
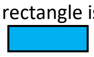
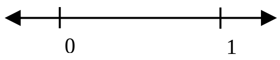
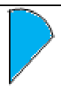
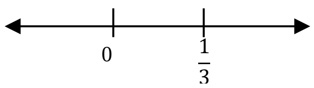
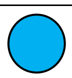
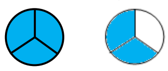
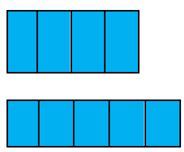
Several researchers have studied fractions, including Pekkan (2015b) who studied elementary school students' knowledge of fractions represented in circles, rectangles and number diagrams. Six-hundred and fifty-six 4th and 5th grade students took the test on Pekkan study (2015b) and were given six fractional Problem Types (a total of 18 questions). The findings of this study indicated that students showed similar performance in circle and rectangle items that required using part-whole fractional reasoning, but students' performance was significantly lower on the items with number line graphical representation across the Problem Types used. Pekkan's study (2015b) focused his research on students' knowledge of fractions. However, one limitation on research conducted by Pekkan (2015b) was that "... further research is needed for understanding children's construction of (especially) the number line representation in the fractional knowledge context". This means that it is still necessary for research related to constructing the concept of fractions represented via a number line. Pekkan's research (2015b) used quantitative research methods which only explained the percentage of students' knowledge related to fractions without explaining the causes of the problem. Therefore, qualitative research methods were used in this study.

Based on the description above, it can be seen that learning the concept of fractions is a difficult lesson and requires more understanding and further studies are still needed related to Pekkan's research (2015b). Therefore, describing the thinking processes of class XI students in constructing the concept of fractions represented by circles, rectangles and number lines becomes the aim of this study.

2. Research Method

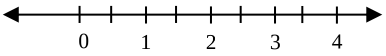
To be able to answer this research objective, this research uses a qualitative descriptive research approach. The subjects in this study were 3 students of class XI, in which the subject was taken based on the subject's willingness to join the research and had learned the concept of fractions. The instrument in this study was adopted from the Pekkan (2015b), namely An Analysis of Elementary School Children's Fractional Knowledge Depicted with Circle, Rectangle, and Number Line Representations. This research instrument only took four of the six types of questions including the arrangement of fractions, the reconstruction the unit from unit fractions items, the naming of mixed fractions, and the reconstruction of units from mixed fractions items. Each of these types of questions has 3 questions items which include representations of circles, rectangles and number lines. The questions given to students are as follows:

Table 1. Research Instruments

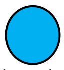
Questions	Answer	Explanation
If this  circle is the unit, Please draw a picture to show $\frac{3}{4}$ of this unit.		
If this rectangle is the unit,  Please draw a picture to show $\frac{5}{6}$ of this unit.		
Place $\frac{2}{3}$ on the number line. 		
 If this picture is $\frac{1}{4}$ of an amout, please draw the picture of that amount. (It does not have to be the full circle)		
If this picture is $\frac{1}{5}$ of an amount.  please draw the picture of that amount.		
Place "1" on the number line. 		
 If this circle is the unit, what would be the fraction shown by the shaded parts of the diagrams below? 		
If Rectangle A (upper rectangle) is the unit, what fraction does Rectangle B (bottom rectangle) show? A  B		

ISSN 2694-8133

Place $\frac{3}{2}$ on the number line



If this circle shows $\frac{5}{3}$.

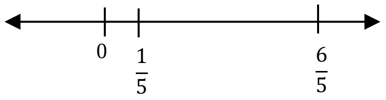


Place draw the unit.

If this rectangle shows $\frac{5}{4}$.

Please show the unit.

Place “1” on the number line



To collect the data, the researchers administered research instruments in the form of questions to 3 class XI students which are completed within 30 minutes. While writing answers, the three students were interviewed to strengthen or clarify their answers. Then the results of students work and interviews are used to describe and explain students' thought processes in constructing the concept of fractions which are represented by circles, rectangles, and number lines. The qualitative data that has been obtained will be analyzed using the stages of analysis developed by Creswell (2009).

3. Result And Discussion

Result

The data described is the result of student work. The following is the result of student work in solving the 12 questions given.

Composing Fractions

The thinking process of S1, S2, and S3 in composing fractional numbers which are represented by circles, rectangles, and number lines begins by reading the questions that have been given. After reading the questions, students understand the problem and retrieve the concept of composing fractions that has been studied before. The following is the result of S1's work.

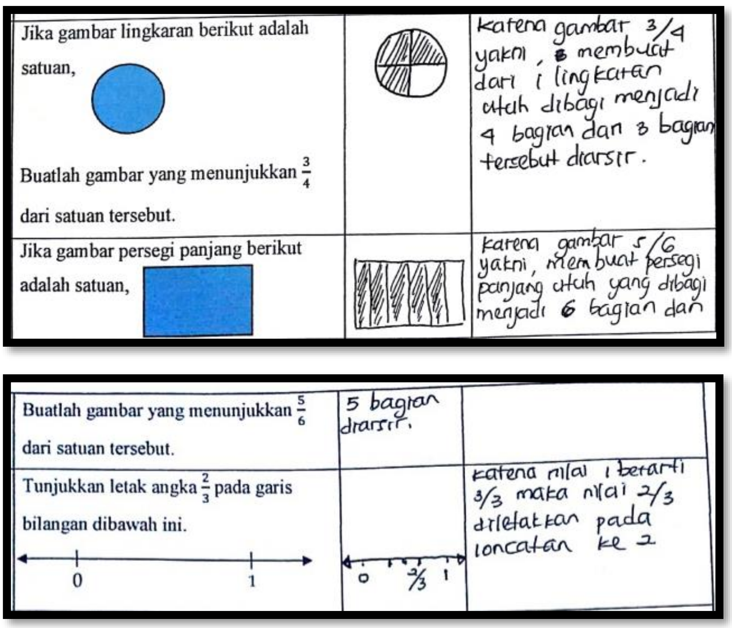


Figure 1. The results of S1's task

ISSN 2694-8133

Based on the results of S1's task, it can be seen that S1 correctly performed the unit problems by giving a fraction symbol for the shaded representation for circle and rectangle problems respectively. For questions that were represented by circles, S1 described a circle by dividing into 4 equal parts where 3 parts are shaded to shows the numerator and the sum of all the parts is the denominator. Not much different from the previous problem, for the rectangle item, he described a rectangle with the same 6 parts where 5 of the parts are shaded as the previous problem. Whereas for the number line item, a fraction symbol was asked for the indicated point on a number line. S1 was putting $\frac{2}{3}$ between $\frac{1}{3}$ and 1 where the 0–1 interval was partitioned equally with marks. Here are the results of S2 task as follows.

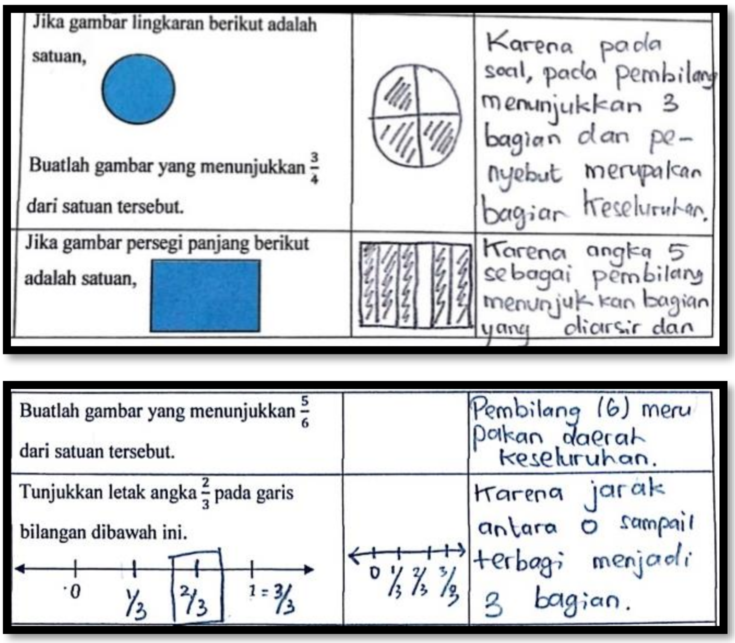
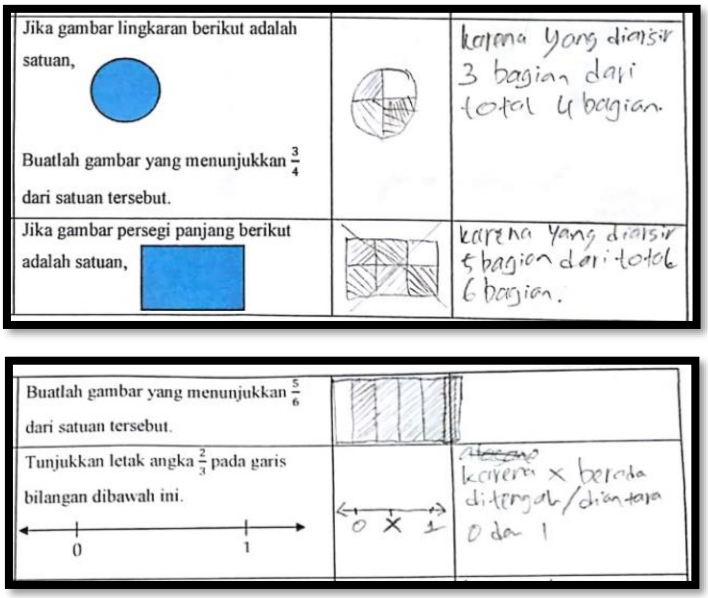


Figure 2. The results of S2's task

Based on the results of S2's task, it can be seen that S2 correctly performed the unit problems by giving a fraction symbol for the shaded representation for circle and rectangle problems respectively. For questions that were represented by circles, S2 described a circle by dividing into 4 equal parts where 3 parts are shaded to shows the numerator and the sum of all the parts is the denominator. Not much different from the previous problem, for the rectangle item, he described a rectangle with the same 6 parts where 5 of the parts are shaded as the previous problem. Whereas for the number line item, a fraction symbol was asked for the indicated point on a number line. S2 was putting $\frac{2}{3}$ between $\frac{1}{3}$ and 1 where the 0–1 interval was partitioned equally with marks, then sorting them up to $\frac{2}{3}$. Here are the results of S3 task as follows.



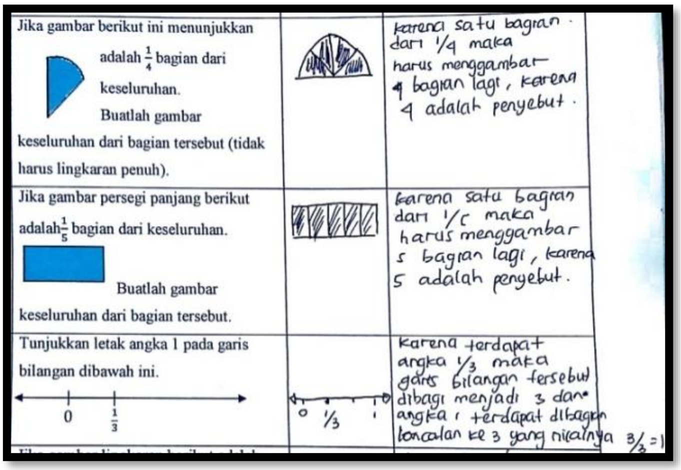
Jika gambar lingkaran berikut adalah satuan, Buatlah gambar yang menunjukkan $\frac{3}{4}$ dari satuan tersebut.		karena yang diarsir 3 bagian dari total 4 bagian.
Jika gambar persegi panjang berikut adalah satuan, Buatlah gambar yang menunjukkan $\frac{5}{6}$ dari satuan tersebut.		karena yang diarsir 5 bagian dari total 6 bagian.
Tunjukkan letak angka $\frac{2}{3}$ pada garis bilangan dibawah ini. 0 1	0 x 1	~~Kecono~~ karena x berada ditengah/diantara 0 da 1

Figure 3. Results of S3 Task

Based on the results of S3's task, it can be seen that S3 correctly performed the unit problems by giving a fraction symbol for the shaded representation for circle and rectangle problems respectively. For questions that were represented by circles, S3 described a circle by dividing into 4 equal parts where 3 parts are shaded to shows the numerator and the sum of all the parts is the denominator. Not much different from the previous problem, for the rectangle item, he described a rectangle with the same 6 parts where 5 of the parts are shaded as the previous problem. Whereas for the number line item, a fraction symbol was asked for the indicated point on a number line. S3 was putting $\frac{2}{3}$ between 0 and 1 where the 0–1 interval was partitioned equally with 2 equal marks.

Reconstruction the Unit from Unit Fractions Items

The thinking process of S1, S2, and S3 in reconstructing units from unit fractions represented by circles, rectangles, and number lines. First, the students were reading the questions. After reading the questions given, students understood the problem and retrieve the concept of compiling fractions that has been studied before. The following is the result of S1's task.



Jika gambar berikut ini menunjukkan adalah $\frac{1}{4}$ bagian dari keseluruhan. Buatlah gambar keseluruhan dari bagian tersebut (tidak harus lingkaran penuh).		karena satu bagian dari 1/4 maka harus menggambar 4 bagian lagi, karena 4 adalah penyebut.
Jika gambar persegi panjang berikut adalah $\frac{1}{5}$ bagian dari keseluruhan. Buatlah gambar keseluruhan dari bagian tersebut.		karena satu bagian dari 1/c maka harus menggambar 5 bagian lagi, karena 5 adalah penyebut.
Tunjukkan letak angka 1 pada garis bilangan dibawah ini. 0 $\frac{1}{3}$	0 1/3 1	karena terdapat angka 1/3 maka garis bilangan tersebut dibagi menjadi 3 dan angka 1 terdapat dibagian loncatan ke 3 yang nilainya 3/3 = 1

Figure 4. The results of S1's task

Based on the results of the student's task, it can be seen that for questions that are represented by circles. S1 described the problem by reversing their thinking such that a part is

ISSN 2694-8133

given and they are to draw a whole. S1 performed well on both circle and rectangle items by drawing half circle for the whole because by repeating $\frac{1}{4}$ of the existing parts, it became a half circle with 4 parts in total. For rectangle item, S1 did similar attempt. S1 described a rectangle with the same 5 parts where all the parts are shaded for the same reasons as before. Whereas for questions that are represented by a number line, S1 put 1 after $\frac{2}{3}$ where the 0–1 interval was partitioned equally with 3 equal marks. Meanwhile, the results of S2 work are as follows.

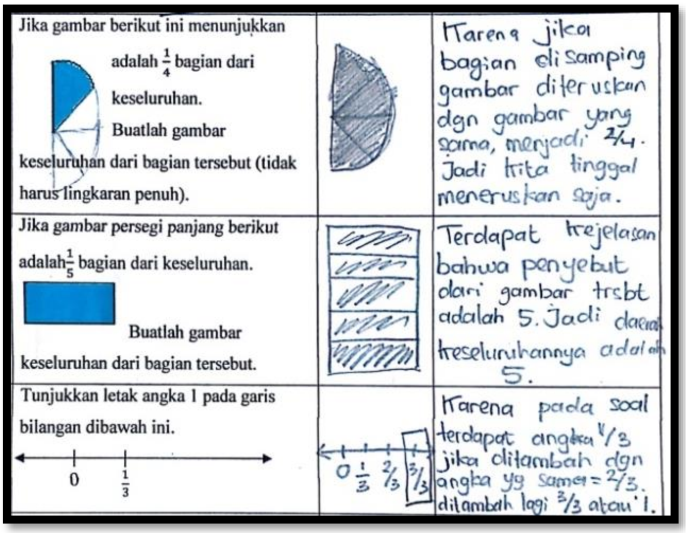


Figure 5. The results of S2's task

Based on the results of the student's task, it can be seen that for questions that are represented by circles. S2 described the problem by reversing their thinking such that a part is given and they are to draw a whole. S2 performed well on both circle and rectangle items by drawing half circle for the whole because by repeating $\frac{1}{4}$ of the existing parts, it became a half circle with 4 parts in total. For rectangle item, S1 did similar attempt. S2 described a rectangle with the same 5 parts where all the parts are shaded for the same reasons as before. Whereas for questions that are represented by a number line, S2 put 1 after $\frac{2}{3}$ by repeating the numbers $\frac{1}{3}$ to $\frac{3}{3} = 1$. Then, for the results of S3 work are as follows.

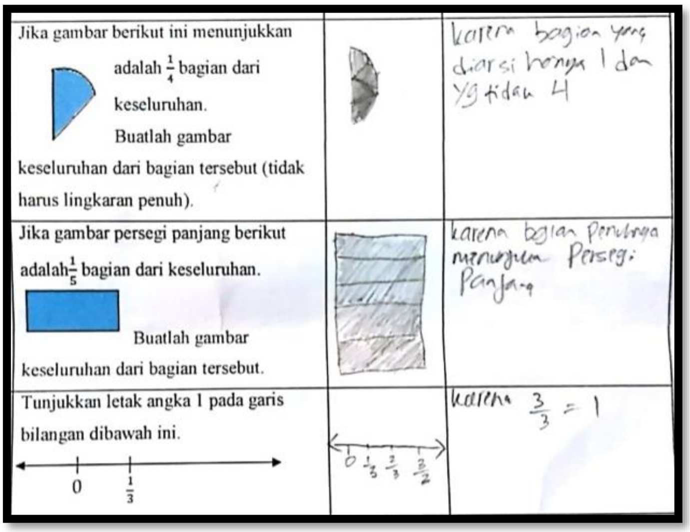


Figure 6. The results of S3's task

ISSN 2694-8133

Based on the results of the student's task, it can be seen that for questions that are represented by circles. S3 described the problem by reversing their thinking such that a part is given and they are to draw a whole. S3 performed well on both circle and rectangle items by drawing half circle for the whole because by repeating $\frac{1}{4}$ of the existing parts, it became a half circle with 4 parts in total. For rectangle item, S3 did similar attempt. S3 described a rectangle with the same 5 parts where all the parts are shaded for the same reasons as before. Whereas for questions that are represented by a number line, S1 put 1 after $\frac{2}{3}$ by repeating the numbers $\frac{1}{3}$ to $\frac{3}{3} = 1$.

Mixed Fraction Naming

The thinking process of S1, S2, and S3 in naming mixed fractions represented by circles, rectangles, and number lines. First, the students were reading the questions. After reading the questions given, students understood the problem and retrieve the concept of compiling fractions that has been studied before. The following is the result of S1's task.

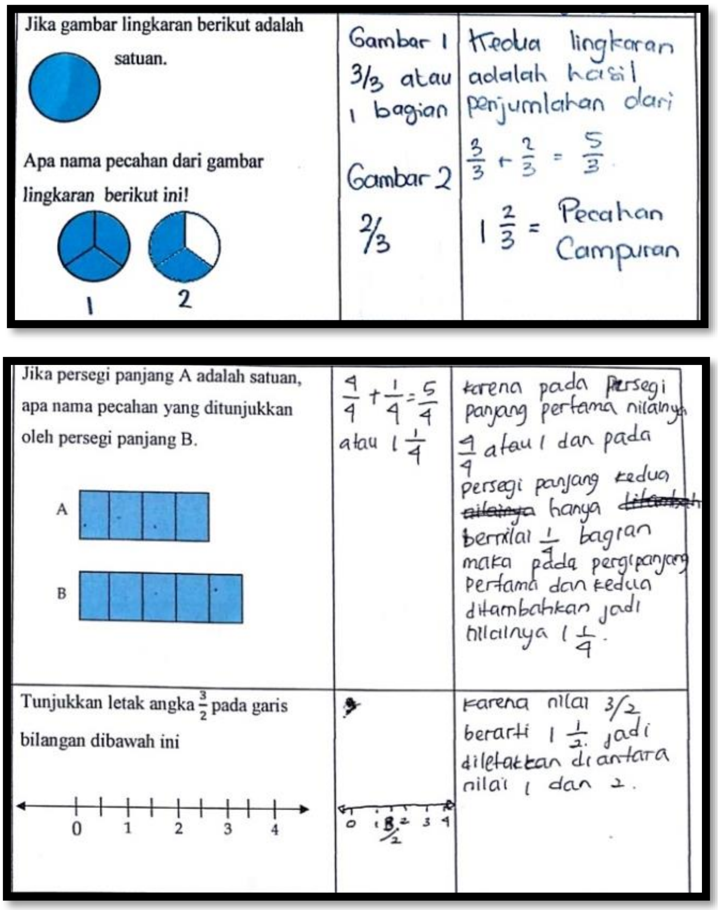


Figure 7. The results of S1's task

Based on the results of the student's task, it can be seen that for questions represented by the circle, S1 wrote $1\frac{2}{3}$ as the answer by adding up the two circle values. For questions that are represented by rectangles, S1 did it by using the same way, that is S1 wrote $1\frac{1}{4}$ for the same explanation as previous problem. As for the questions represented by the number line, S1 put $\frac{3}{2}$ between 1 and 2 by changing $\frac{3}{2}$ to $1\frac{1}{2}$. Meanwhile, the results of S2 task are shown as follows.

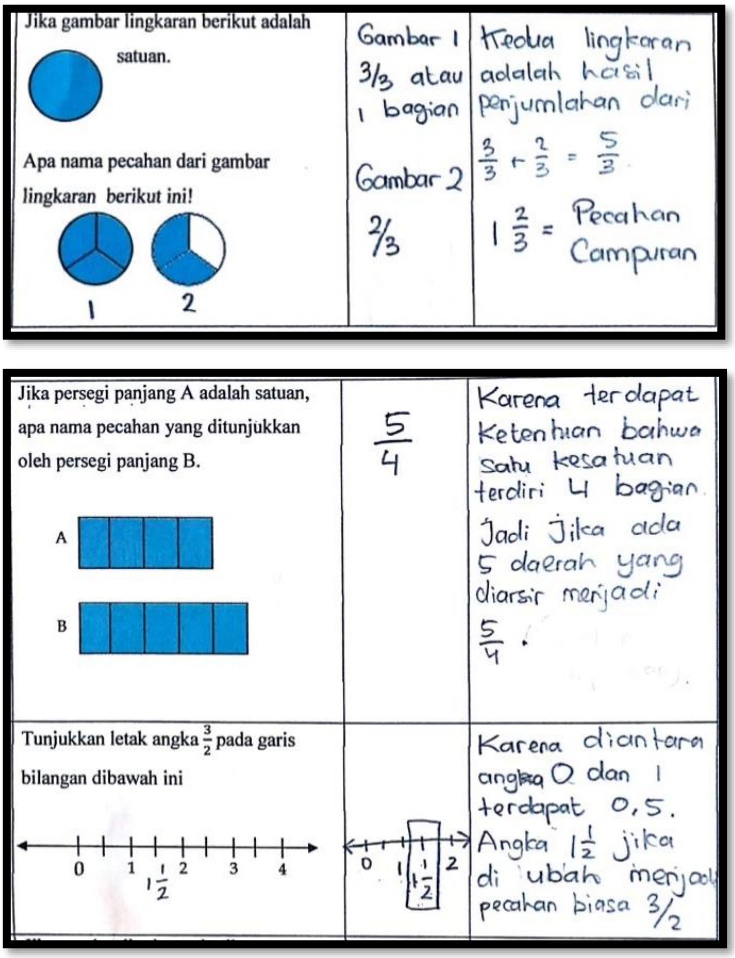


Figure 8. The results of S2's task

Based on the results of the student's task, it can be seen that for questions represented by the circle, S2 wrote $1\frac{2}{3}$ as the answer by adding up the two circle values. For questions that are represented by rectangles, S2 wrote $\frac{5}{4}$ and explained that there were four parts on the first rectangle and five shaded parts on the second rectangle. S2 put $\frac{3}{2}$ between 1 and 2 by changing $\frac{3}{2}$ to $1\frac{1}{2}$. And for the results of S3 task are presented as follows.

ISSN 2694-8133

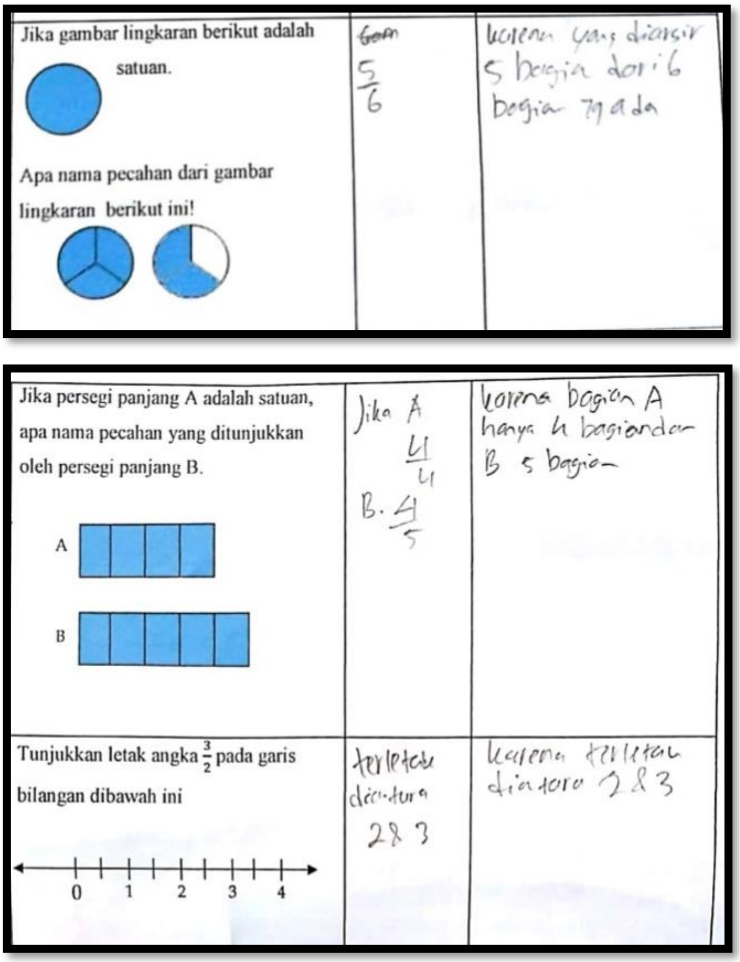


Figure 9. The results of S3's task

Based on the results of the student's task, it can be seen that for questions represented by the circle, S3 wrote $\frac{5}{6}$ as the answer because there are five parts that are shaded out of the six parts. For questions that are represented by rectangles, S3 did it by using the same way, that is S3 wrote $\frac{4}{5}$ because there are four parts in the first rectangle and five shaded parts in the second rectangle. As for the questions represented by the number line, S3 put $\frac{3}{2}$ between 2 and 3.

Reconstruction of units from mixed fractions

The thinking process of S1, S2, and S3 in reconstructing units from mixed fractions represented by circles, rectangles, and number lines. First, the students were reading the questions. After reading the questions given, students understood the problem and retrieve the concept of compiling fractions that has been studied before. The following is the result of S1's task.

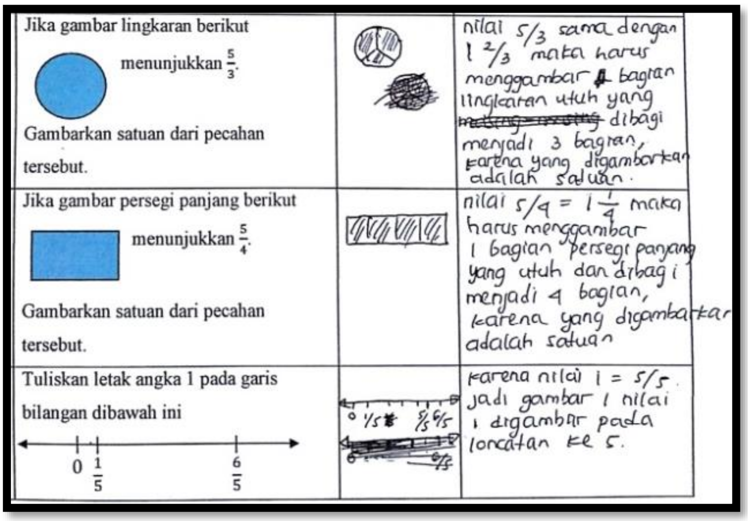


Figure 10. The results of S1's task

Based on the results of the student's task, it can be seen that for questions represented by the circle, S1described a circle with three equal parts and all the parts are shaded because when it is drawn, it shows the whole. There was no significant difference of the answer between circle and rectangle. For the problem that is represented by a rectangle, S1 described a rectangle with 4 equal and shaded parts for the same reason as circle question. As for the questions represented by the number line, S1 put 1 between $\frac{4}{5}$ and $\frac{6}{5}$ by sorting from $\frac{1}{5}$ to $\frac{5}{5} = 1$. While the results of the work of S2 are as follows.

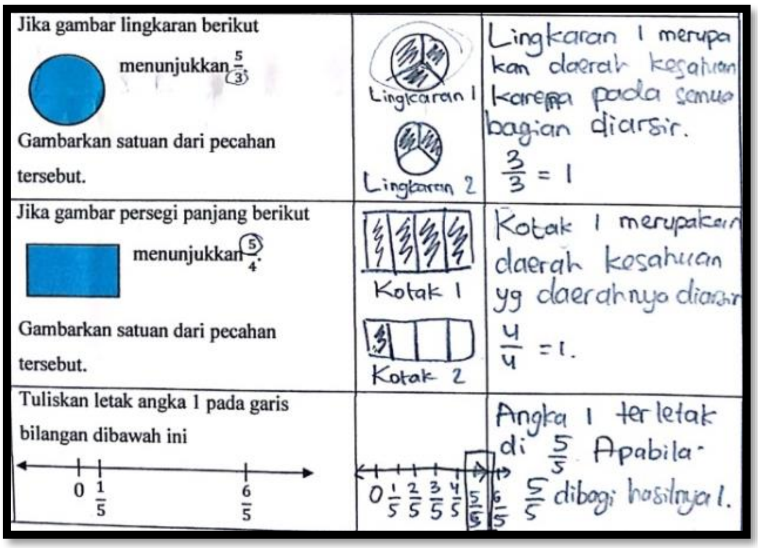


Figure 11. The results of S2's task

Based on the results of the student's task, it can be seen that for questions represented by the circle, S2 described a circle with three equal parts and all the parts are shaded because when it is drawn, it shows the whole. There was no significant difference of the answer between circle and rectangle. For the problem that is represented by a rectangle, S2 described a rectangle with 4 equal and shaded parts for the same reason as circle question. As for the questions represented by the number line, S2 put 1 between $\frac{4}{5}$ and $\frac{6}{5}$ by sorting from $\frac{1}{5}$ to $\frac{5}{5} = 1$. While the results of the work of S3 are as follows.

ISSN 2694-8133

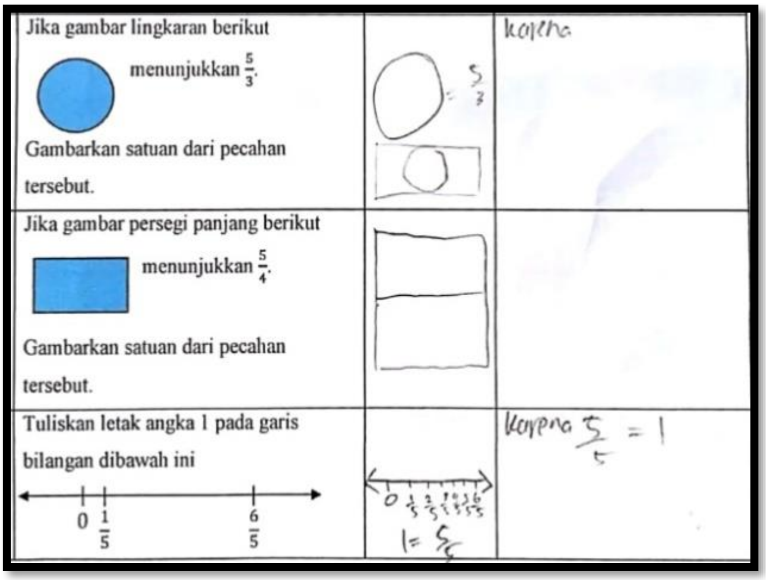


Figure 12. The results of S3's task

Based on the results of the student's task, it can be seen that for questions represented by the circle, S3 described a circle with three equal parts and all the parts are shaded because when it is drawn, it shows the whole. There was no significant difference of the answer between circle and rectangle. For the problem that is represented by a rectangle, S3 described a rectangle with 4 equal and shaded parts for the same reason as circle question. As for the questions represented by the number line, S3 put 1 between $\frac{4}{5}$ and $\frac{6}{5}$ by sorting from $\frac{1}{5}$ to $\frac{5}{5} = 1$.

Discussion

Formulation of Fractional Numbers

S1 Thinking Process in Composing Fractional Numbers Represented by Circles, Rectangle, and Number Lines

Based on the data exposure, the results are obtained. The results showed that S1 underwent an assimilation process in the formation of forming understanding on all types of questions, in which understanding the questions without a process, or being able to understand by reading the questions given directly (Kurniawan et al., 2017). The selected information is then delivered to the short-term memory and processed in the long-term memory to link or combine the newly entered information with the existing schema. In this case, S1 used a part-whole scheme, where this scheme is used to arrange fractions by dividing the whole into equal parts. Then, the whole part is taken without changing the whole to compose the fraction (Hackenberg, 2013; Tunç-Pekkan, 2015). In the process of forming this understanding, S1 undergoes an assimilation process, in which the assimilation process is associating or incorporating new information into the schema he already has (Subanji & Supratman, 2015).

In contrast to the circle and rectangular representations, in this number line representation S1 did not use a part-whole fraction scheme, but S1 used the scheme described by H. Wu (2011) that to draw fractions on the number line, namely (1) describes the fraction $\frac{1}{b}$ on the number line by plotting the interval from 0 to 1 as a unit and dividing it into b equal parts. Recognize that each part has a size of $\frac{1}{b}$ and the end point (defined point) of the part at 0 places the number $\frac{1}{b}$ on the number line; (2) describes the fraction $\frac{a}{b}$ on the number line by marking a length $\frac{1}{b}$ from 0. So that in the process of drawing this conclusion, S1 proceed an assimilation in which S1 immediately integrates the new information into the old scheme (Rizal, 2011).

ISSN 2694-8133

S2 Thinking Process in Composing Fractional Numbers Represented by Circles, Rectangle, and Number Lines

S2 attains well in his thinking process in composing fractions which are represented by circles, rectangles and number lines. It can be seen when S2 understands the problem well without repeating it, so that in forming this understanding S2 experiences an assimilation process (Kurniawan et al., 2017). In the process of forming ideas, S2 experiences a process of assimilation, in which S2 integrates new information with the schema she/he has (Subanji & Supratman, 2015). In compiling these fractions, S2 forms a part-whole fraction scheme. This is in line with the statements of Hackenberg and Pekkan (2013; 2015b) regarding the fractional scheme which explains that to arrange fractions by dividing the whole into equal parts. Then, taking a part out of a whole without mentally destroying the whole operation to compose the fraction. In drawing conclusions which are represented by circles, S2 sketches or tries to draw first on the problem. In this case, S2 does not directly do on the fraction problem or requires a process to arrange fractions. Thus, S2 experiences an accommodation process. Kurniawan (2017) reported that when students need a process or indirectly in solving mathematic problem, they experience an accommodation process. As for the rectangular and number line representations, S2 undergoes an assimilation process.

S3 Thinking Process in Composing Fractional Numbers Represented by Circles, Rectangle, and Number Lines

S3 attains well in his thinking process in composing fractions which are represented by circles, rectangles and number lines. It can be seen when S3 could understand the problem without repeating in reading of the given problem, so that in forming this understanding S3 goes through an assimilation process (Kurniawan et al., 2017). The information obtained is continued into the short-term memory and then processed in the long-term memory, so that the related information will be retrieved and matched again with the newly obtained information. In this case, S3 used a fractional scheme which is contrary to Hackenberg and Pekkan (2013; 2015b) so that in this case S3 experienced an accommodation process in which S3 combined or unified new stimuli through changing the old scheme to adapt to existing problems (Subanji & Supratman, 2015). S3 did not believe in the scheme she/he already had so that in forming opinions, S3experienced process of accommodation (Rizal, 2011). Further, in drawing conclusions, S3 underwent an assimilation process in the circle representation. Whereas for the rectangular representation S3 experienced an accommodation process seen when S3 replaced the previous answer (Kurniawan et al., 2017).

Meanwhile, S3 could not attain satisfactory result in the preparation of fractional numbers represented by the number line. It was seen when S3 was able to determine the information used to solve the problems given in the process of forming understanding. However, she/he was not able to determine the steps in solving it through the process of forming opinions, so that in this process S3 experienced an accommodation process (Kurniawan et al., 2017). Because she/he was unable to determine the steps at the previous stage resulting in errors in answering, imperfections occurred in the process of drawing conclusions by S3.

Unit Reconstruction from Unit Fractions

S1's thinking process in reconstructing units from unit fractions represented by circles, rectangles, and number lines (S1)

S1's thinking process in reconstructing units from unit fractions represented by circles, rectangles, and number lines is going well. It can be seen when S1 can understand and find the information needed to solve the problem directly without doing repetition when reading the problem. So that in the process of forming this understanding S1 underwent an assimilation process (Kurniawan et al., 2017; Rizal, 2011). The information obtained is the result of selection which is then entered into the short-term memory and will be processed in the long-term memory by retrieving the information held with the information obtained. From this process S1 stated that to determine the units of unit fractions using the division scheme of unit fractions, S1 repeated the unit fractions to produce the whole (Izsak et al., 2008). S1 experienced an assimilation process in forming this opinion, it was seen when S1 integrated the new information with the schema she/he had (Subanji & Supratman, 2015). As for drawing conclusions, S1 is able to use information, steps, and concepts that have been planned to solve the problem, so that in this case S1 experiences an assimilation process.

S2's thinking process in reconstructing units from unit fractions represented by circles, rectangles, and number lines (S2)

S2's thinking process in reconstructing units from unit fractions represented by circles, rectangles, and number lines goes well. It can be seen when S2 can understand and determine the information used without repeating when reading the questions, so that in the formation of this understanding S2 experiences a process of assimilation (Sahlberg, 2020a). S2 stated that to reconstruct units from unit fractions, S2 used a division scheme of unit fractions by repeating the unit fractions to produce the whole (Stevens et al., 2020). So that in this case S2 experiences an assimilation process. It can be verified when S2 integrated incoming information with the schema she/he had (Subanji & Supratman, 2015). As for the process of drawing conclusions S2 required a process to use the information and schemes that are already owned. S2 first sketched his/her answer on the picture shown in the question, so in this case S2 experienced an accommodation process. Unlike the circle representation, in the rectangle and number line S2 wrote the answer directly without sketching it first. So that in this case S2 experienced an assimilation process.

S3 thinking process in reconstructing units from unit fractions represented by circles, rectangles, and number lines (S3)

S3's thinking process in reconstructing units from unit fractions represented by circles, rectangles, and number lines is not going well. It can be seen when S3 did repetition in reading the questions to understand them and got information related to reconstructing units from unit fractions. S3 also experienced imperfections in formulating his/her understanding in which S3 lacked confidence that she/he had been obtained sufficient information to solve the problem, so it can be concluded that S3 experienced an accommodation process (Steffe, 2001). Then the information obtained is the result of the selection and will be entered in the short-term memory and processed in the long-term memory. The information in the long term memory is retrieved and matched with the new information.

In this case, S3 stated that to reconstruct units from unit fractions was used the division scheme of unit fractions, by repeating the unit fractions to produce the whole (Hackenberg & Tillema, 2009). So that in forming opinions S3 experienced an accommodation process, which is able to determine the relationship between the information obtained and the schema that is owned, but in this process S3 required a process to be able to retrieve the scheme from he/she long-term memory. In the process of drawing conclusions, S3 experienced an accommodation process, as seen when S3 was not perfect in using its scheme. It can be seen when S3 feels unsure that the scheme is a concept for solving existing problems.

Mixed Fraction Naming

S1's thinking process in naming mixed fractions represented by circles, rectangles and number lines (S1)

S1's thinking process in naming mixed fractions which are represented by circles, rectangles and number lines goes well. The process began with reading the questions, so from reading the questions S1 got information to solve the questions and what was asked of the questions. In the process of forming this understanding S1 underwent a process of assimilation

(Stevens et al., 2020). Based on the researcher's interview with S1 regarding the scheme used to solve the problem, S1 could explain the relationship between the information obtained and the scheme it had. In this case S1 modified the scheme he already had to solve the problem, so that in the process of forming this opinion S1 experienced a process of accommodation, which combined or unified new stimuli through changing the old scheme to adapt to existing problems (Subanji & Supratman, 2015). In solving these problems, S1 used the concepts that have been planned beforehand correctly and was able to check again and felt confident about the steps used to solve the problem. As the result, in the process of forming these conclusions S1 underwent a process of assimilation.

S2's thinking process in naming mixed fractions represented by circles, rectangles and number lines (S2)

S2's thinking process in naming mixed fractions represented by circles, rectangles, and number lines goes well. The process began with receiving information through reading the questions given. From this process S2 could find information that can be used to solve the problem, so that in the process of forming this understanding S2 experienced an assimilation process (Stevens et al., 2020). Based on the researcher's interview with S2 regarding the scheme used to solve the problem, S2 could explain the scheme he/she had by modifying it even though in fact, it was not correct. From this scheme S2 related it to the information that has been obtained to solve the problem. So that in forming these opinions S2 experienced a process of accommodation, which combines or unites new stimuli through changing old schemes to adapt to existing problems (Subanji & Supratman, 2015).

In solving these questions S2 used the concepts previously described and went well. However, in the process of solving the problem, which was represented by a circle and a number line, S2 sketched the answer first on the image shown in the question, so that in this case S2 experienced an accommodation process. Unlike the questions that were represented by rectangles, S2 immediately wrote down the answers without sketching them first. So that in this case S2 experienced an assimilation process.

S3 thinking process in naming mixed fractions represented by circles, rectangles and number lines (S3)

S3's thinking process in naming mixed fractions represented by circles, rectangles, and number lines is not going well. During the process of forming understanding, S3 experienced an accommodation process, where it was less able to understand the questions and it took time to get the information used to solve the questions (Subanji & Supratman, 2015). The information obtained is the result of the selection which is then entered in the short-term memory and processed in the long-term memory. In the formation process opinion, it was not perfect, it was seen when S3 was unable to connect the information obtained with the scheme he owned. So that in this case S3 experienced an accommodation process which combines or unites new stimuli through changing the old scheme to adapt to existing problems (Subanji & Supratman, 2015). In the process of drawing conclusions, S3 experienced an accommodation process seen when S3 was unable to carry out the problem-solving plan, due to the subject's error when determining alternative error steps in the previous stage.

Unit Reconstruction from Mixed Fractions

S1's thinking process in reconstructing units from mixed fractions represented by circles, rectangles, and number lines (S1)

S1's thinking process in reconstructing units from mixed fractions represented by circles, rectangles, and number lines is not going well. The process began with reading the questions given resulting in S1 receiving information. In identifying the questions that are represented by the S1 circle, S1 required a process of reading the questions repeatedly until he/she got the information he/she needed. This is in line with Yovan's statement (2008) which stated that repetition in reading questions can improve information recall due to strengthening the relationship between information held. So that in this process S1 experienced an accommodation process (El-Nakhel et al., 2019). Whereas for questions that are represented by rectangles and number lines, S1 could determine the information used in solving the problem and what was asked in the problem properly without repeating in reading the problem. So that in the process of forming this understanding S1 went through a process of assimilation.

The information obtained is then processed in long-term memory by retrieving information related to reconstructing units from mixed fractions. In solving these questions, S1 modified his scheme to suit the questions given, so that in the process of forming opinions, S1 experienced a process of accommodation (Subanji & Supratman, 2015). In solving these problems S1 used the concepts that have been explained before well. However, for questions that are represented by circles, S1 lacked confidence in the steps and answers, so S1 checked again and then confirmed the answers that have been written. So that in the process of drawing conclusions, S1 experienced a process of accommodation. Meanwhile, for questions that are represented by rectangles and number lines, S1 believed in the steps used to solve the problem. In this process S1 experienced a process of assimilation.

S2's thinking process in reconstructing units from mixed fractions represented by circles, rectangles, and number lines (S2)

S2's thinking process in reconstructing units from mixed fractions represented by circles, rectangles, and number lines goes well. The process began with reading the questions given resulting in S2 receiving information. S2 could determine the information used in solving the problem and what was asked in the problem properly without repeating in reading the problem. As a result, in the process of forming this understanding S2 went through a process of assimilation (Hackenberg & Tillema, 2009). The information obtained is then processed in long-term memory by retrieving information related to reconstructing units from mixed fractions. In solving these questions S2 modified his scheme to suit the questions given, so that in the process of forming opinions S2 experienced a process of accommodation (Subanji & Supratman, 2015). In solving these problems S2 used the concepts that have been explained previously well. S2 believed in the steps used to solve the problem. As a result, in the process of drawing conclusions, S2 underwent a process of assimilation (Subanji & Supratman, 2015).

S3 thinking process in reconstructing units from mixed fractions represented by circles, rectangles, and number lines (S3)

S3's thinking process in reconstructing units from mixed fractions represented by circles, rectangles, and number lines is not good. The process began with reading the questions given, resulting in S3 receiving information. In the process of forming understanding in the problem, reconstructing units represented by circles, rectangles, and number lines, S3 could not immediately identify the problem properly, which still required a process to be able to find information to solve the problem. In forming this understanding S3 was experiencing an accommodation process (Hackenberg & Tillema, 2009). From this process, S3 could not find any information related to reconstructing units from mixed fractions represented by circles and rectangles. However, it could determine the information on the problem that is represented by a number line.

Based on the researcher's interview with S3, it can be seen that S3 could not state what schemes could be used to solve problems that are represented by circles and rectangles. There are many factors that cause students to be unable to solve the problem properly, namely due to their limited experience or knowledge. In addition, the concepts or knowledge used to respond to stimuli are not stored properly (Hidayati, 2021). However, unlike the questions that are represented by a number line, S3 could explain a scheme used to solve problems even though she/he still requires processing. The process of forming opinions in S3 can be seen when S3 could determine the relationship between the information it has and the existing schemes in its long-term memory. In this case S3 modified the scheme that he already has by matching the new information with the scheme he/she had, so that in the process of forming the opinion S3 experiences a process of accommodation (Sahlberg, 2020b). When S3 could not determine information that can be used to solve questions that are represented by circles and rectangles in the process of forming opinions so that in the process of drawing conclusions S3 could not answer these questions correctly. This is because the information needed in short-term memory is not properly stored in long-term memory. As for the problems represented by the S3 number line, she/he solved it using a pre-planned scheme. In the process of drawing conclusions, S3 experienced an accommodation process, it is proven when S3 did not feel confident about the steps he/she was taking to solve the problem.

4. Conclusion

The thinking process of each student in constructing the concept of fractions which are represented by circles, rectangles and number lines varies according to the type of problem given, so that the following conclusions are obtained:

The thinking process of student 1 (S1) in constructing the concept of fractions which are represented by circles, rectangles, and number lines is going well. in the process of forming the understanding, S1 can immediately understand which questions without repeating a lot in reading the questions. For the process of forming opinions, in this case, S1 uses the scheme he/she has to solve the questions given. As for drawing conclusions, S1 uses the plan he has to solve questions confidently and correctly. So that in the process of constructing the concept S1 experienced an assimilation process.

The thinking process of student 2 (S2) in constructing the concept of fractions which are represented by circles, rectangles, and number lines is also going well. In the process of forming the understanding, S2 can immediately understand which questions without repeating a lot in reading the questions. For the process of forming opinions, in this case S2 uses the scheme he has to solve the questions given. As for drawing conclusions, S2 uses the plan he has to solve questions confidently and correctly. So that in the process of constructing the concept S2 underwent an assimilation process.

The thinking process of student 3 (S3) in constructing the concept of fractions which are represented by circles, rectangles, and number lines is not going well. In the process of forming the understanding, S3 cannot immediately understand the questions given. S3 needs to understand the questions repeatedly. Then in the process of forming opinions S3 modifies the scheme it has to solve the given problem. As for drawing conclusions S3 uses the plan that has been made, but S3 is unable to realize the plan. As the result, in the process of constructing the concept S3 goes through an accommodation process.

Acknowledgements

In this case the researchers would like to thank all parties who have participated in this research.

References

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), 293–316. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Creswell, J. W. (2009). *Research Design Qualitative, Quantitative, and Mixed Approaches* (3rd ed). SAGE.

El-Nakhel, Giordano, Pannico, Carillo, Fusco, Pascale, & Rouphael. (2019). Cultivar-Specific Performance and Qualitative Descriptors for Butterhead Salanova Lettuce Produced in Closed Soilless Cultivation as a Candidate Salad Crop for Human Life Support in Space. *Life*, *9*(3), 61. https://doi.org/10.3390/life9030061

Gembong, S. (2016). Profil Pembentukan Skema Siswa Sd Dalam Memecahkan Masalah Yang Terkait Dengan Operasi Penjumlahan Bilangan Pecahan Berdasarkan Kemampuan Matematika. *Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika*. http://jurnal.fkip.uns.ac.id/index.php/snmpm/article/view/10884

Hackenberg, A. J. (2010). Students' Reasoning With Reversible Multiplicative Relationships. *Cognition and Instruction*, *28*(4), 383–432.

Hackenberg, A. J. (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students with the first multiplicative concept. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 538–563.

Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 1–18.

Hidayati, N. A. (2021). Statistic literation profile viewed from thinking level Middle Order Thinking Skills (MOTS). *Journal of Physics: Conference Series*, *1918*(4). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1918/4/042119

Izsak, A., Tillema, E., & Tunc-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(1), 33–62. http://www.jstor.org/stable/30034887

Kurniawan, E., Mulyati, S., & Rahardjo, S. (2017). Proses Asimilasi Dan Akomodasi Dalam Memecahkan Masalah Matematika Berdasarkan Kecerdasan Emosional. *Jurnal Pendidikan*, *2*(5), 592–598. http://journal.um.ac.id/index.php/jptpp/

Musser, G. L., Peterson, B. E., & Burger, W. F. (2013). *Mathematics for elementary teachers: a contemporary approach*. Wiley.

National Assessment of Educational Progress (NAEP). (2007). *Nations Report Card*. National Center for Education Statistics.

Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 61–83. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9338-x

Permadi, W. E., & Irawan, E. B. (2016). Memahamkan Konsep Pecahan Pada Siswa Kelas IV SDN Sumberejo 03 Kabupaten Malang. *Jurnal Pendidikan*, *1*(9), 1735–1738. https://media.neliti.com/media/publications/212194-memahamkan-konsep-pecahan-pada-siswa-kel.pdf

Prayitno, A., Setyowati, V. L., Damayanti, N. W., Khasanah, F., Mayangsari, S. N., Mahardika, L. T., Yuniarto, E., Octavianti, C. T., Wulandari, Y. O., & Pertiwi, R. I. (2018). Performance of Understanding Students' Construction In The Naming Fraction of The Three Representation. *Journal of Physics: Conference Series*, *1114*(1), 012022. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1114/1/012022

Prayitno, A., & Suarniati, N. W. (2017). Construction Students ' Thinking in Solving Mathematics Problem Using Cognitive Map. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, *13*(6), 2735–2747.

Rizal, M. (2011). Proses Berpikir Siswa SD Berkemampuan Matematika Tinggi Dalam Melakukan Estimasi Masalah Berhitung. *Jurnal Pendidikan Matematika Dan Sains*, *16*(1), 1–8. https://doi.org/10.21831/jpms.v16i1.12202

Sahlberg, P. (2020a). Will the pandemic change schools? *Journal of Professional Capital and Community*, *5*(3–4), 359–365. https://doi.org/10.1108/JPCC-05-2020-0026/FULL/XML

Sahlberg, P. (2020b). Will the pandemic change schools? *Journal of Professional Capital and Community*, *5*(3–4), 359–365. https://doi.org/10.1108/JPCC-05-2020-0026

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, *17*(1), 13–19. https://doi.org/ 10.1016/J.TICS.2012.11.004

Simatwa, E. M. W. (2010). Piaget's Theory of Intellectual Development and Its Implication for Instructional Management at Pre-Secondary School Level. *Educational Research and Reviews*, *5*(7), 366–371. https://eric.ed.gov/?id=EJ898837

Siswono, T. Y. E. (2007). Konstruksi Teoritik Tentang Tingkat Berpikir Kreatif Siswa dalam Matematika. *Jurnal Pendidikan, Forum Pendidikan & Ilmu Pengetahuan*, *2*(4), 1–10. https://tatagyes.files.wordpress.com/2009/11/paper07_jurnal_univadibuana.pdf

Steffe, L. P. (2001). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*(3), 267–307.

Stevens, A. L., Wilkins, J. L. M., Lovin, L. A. H., Siegfried, J., Norton, A., & Busi, R. (2020). Promoting sophisticated fraction constructs through instructional changes in a mathematics course for PreK-8 prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*(2). https://doi.org/10.1007/s10857-018-9415-5

Subanji, R. & Nusantara, T. (2013). Karakterisasi Kesalahan Berpikir Siswa Dalam Mengonstruksi Konsep Matematika. *Jurnal Ilmu Pendidikan*, *19*(2), 208–217. http://dx.doi.org/10.17977/jip.v19i2.4215

Subanji, R., & Supratman, A. M. (2015). The Pseudo-Covariational Reasoning Thought Processes in Constructing Graph Function of Reversible Event Dynamics Based on Assimilation and Accommodation Frameworks. *Research in Mathematical Education*, *19*(1), 61–79. https://doi.org/10.7468/jksmed.2015.19.1.61

Subanji, S. (2017). Berpikir Matematis dalam Mengkonstruksi Konsep Matematika: Sebuah Analisis Secara Teoritis dan Praktis. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika 2017*. Program Studi Pendidikan Matematika Pascasarjana Universitas Negeri Malang.

Supriadi, D., Mardiyana, M., & Subanti, S. (2015). Analisis Proses Berpikir Siswa Dalam Memecahkan Masalah Matematika Berdasarkan Langkah Polya Ditinjau Dari Kecerdasan Emosional Siswa. *Jurnal Pembelajaran Matematika*, *3*(2). http://jurnal.fkip.uns.ac.id/index.php/s2math/article/view/5731/0

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 419–441. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9606-2

Wu, H.-H. (2011). *Teaching Fractions According to the Common Core Standards*. https://math.berkeley.edu/~wu/CCSS-Fractions_1.pdf

ISSN 2694-8133

COMPUTER-BASED ASSESSMENT AS A METHOD FOR ENFORCING PROFESSIONAL COMPETENCIES OF IN-SERVICE PRIMARY MATH TEACHERS

Elena RAILEAN[1,2,3]
[1] Institute for Advanced Research on Anthropological Challenges at the University of Political and Economic European Studies 'C. Stere' (Republic of Moldova)
[2] American University of Moldova (Republic of Moldova)
[3] Ion Creangă State Pedagogical University (Republic of Moldova)
elenarailean32@gmail.com

Abstract

Computer-based assessment (CBA) is a method of learning and for learning. Nowadays, CBA is used in primary math education to develop interactive tests with immediate feedback. Multiple choice questions, matching, and other 'objective' types of items and its intelligent analyzer are the base of CBA. The diversity of the items, the types of answers, the type of feedback, and delivery considerations must all be carefully taken into account when developing an effective pedagogical design in general and for primary students in particular. However, the problem is that pedagogical design may be approached from the perspective of linear, systemic, and metasystemic thinking. This article investigates the affordability of Metasystems Learning Design (MLD) theory for CBA in diverse learning environments. Our previous research has demonstrated that the MLD principles implementation in educational software for primary math education has increased students' motivation to learn for those who received low marks at paper-to-pencil evaluation and, therefore, they performed better. This outcome can be used as a premise for future investigations of MLD and its applications in pedagogical design. The conceptual response to this question depends on how adult learning is incorporated into the in-service teacher preparation methodology during the twin transition period to learning society.

Keywords: math education, teacher training, computer-based assessment, immediate feedback

1. Introduction

A systematic process of gathering information from tests, surveys, exams, and other sources is known as assessment. It is used in traditional classroom settings as well as online learning to find out more about how well students are doing and how well they are responding to their educational institutions' programs of study. Either paper and pencil or computers can be used for assessment. The method of using computers for assessment, measurement, testing, and evaluation for educational purposes is known as *computer-based assessment* (CBA). This method, which has been in use since the 1950s, has undergone numerous improvements. On one hand, there are multiple definitions. Thus, CBA is (a) a 'method for learning on students' learning outcomes' (Van der Kleij, et al., 2012), a 'versatile education tool' (Thelwall, 2000), a tool 'to provide timely information on their academic progress' (Helfaya, 2019), etc. and it is used as an integral part of Computer Aided Learning (CAL) environments in formal and non-formal education. On other hand, there are some issues related to the 'affective-motivational effects of performance feedback' (Kuklick & Lindner, 2023) and the advantages of the assessment tool for early literacy skills (Bastianello, Brondino, Persici, & Majorano, 2023).

The unique characteristic of CBA is the analysis of item tasks with immediate feedback. Research suggests that primary teacher and their students pay more attention to immediate feedback than to delayed feedback. As was observed by Miller (2009), immediate feedback on CBA is used to support learning rather than measure students' learning at the end of the module. The 'acceptance' of CBA by teachers of primary students is crucial for the development of a computer-based assessment (CBA). By acceptance, we mean the interest, curiosity, and motivation to use CBA in the teaching-learning process. The advantages of CBA versus paper-and-pencil tests are the affordability to generate items and tests (Nguyen et al., 2017) and the intelligent analysis of students' answers (Yildirim-Erbasli & Bulut, 2023). However, everyday teaching practice in elementary math has put the method of CBA under the lens, especially in the case of the twin transition to a global knowledge society (Foster, 2023) – an approach used to foster the importance of digitalization and the greenest of technologies.

The majority of CBAs used in primary education are computer-based tests (CBTs). A computer test, a procedure for determining students' performance by delivering scholarly tests through a computer network medium, is the fundamental idea behind CBTs. This type of assessment can be given in oral, written, or mixed form using any digital device, such as a computer, smartphone, etc. CBTs are used in primary education as a diagnostic, formative, and summative assessment. Diagnostic assessment, developed in form of short answers and multiple-choice items, has the power to motivate all students. However, many researchers contend that formative assessment is the most significant type of evaluation (Bennett, 2011; Black & Wiliam, 2009; Bulut, et al., 2023; Yan & Chiu, 2023). Summative evaluation, which traditionally "measures" learning outcomes, could, in our opinion, be used as a learning strategy as well as a means of evaluating students' performance following a didactic process.

The pedagogical scenario of CBA thus presented itself as a good observatory to focus on teachers' knowledge in instructional / learning design, their' professional competencies in designing inclusive learning environments; and to establish whether and to what extent the core competencies of students are affected in one or another way by computer-based learning environments. The main aim of this study is to determine if there are psychological and pedagogical aspects of CBA that can be improved to make it more effective and, ultimately, to widen its adoption in schools. With this purpose in mind, it was conducted a study in the Republic of Moldova within a teacher-training module related to CBA in school education.

2. Theoretical background

Assessment and appreciation are the two methods used in the formal education of primary students. Assessment is a measure of performance/competence following certain norms and standards; and appreciation – of the decision-making process related to performance, and quality of learning outcomes in form of knowledge, skills, and attitude. This distinction can be seen in primary math education when teachers "appreciate" some students more than others (Gadanidis & Cendros, 2023; DeLegge & Kaur, 2023; Engelbrecht, Borba & Kaiser, 2023). Moreover, appreciation is more about appreciative intelligence and less about texting.

Traditionally, in the pedagogical design of CBA and CBTs is used Bloom's taxonomy is (de Bruyn, E., Mostert E. & van Schoor, 2011). The affordability of the immediate feedback, however, limits this strategy to only evaluating the lower levels of action verbs in Bloom's taxonomy, such as remember, select, solve, and classify (Armstrong, 2010). According to Mayer (2002), the taxonomy for CBA of problem-solving should include four categories of knowledge (i.e., factual, conceptual, procedural, and metacognitive) based on the Anderson et al. 2001 revised taxonomy. In his opinion, problem-solving is a cognitive process. This approach contradicts with STEM*x* paradigm, according to which primary students need cognitive, metacognitive, affective, and social learning strategies.

For instance, Nimasari, Gestanti, and Nurfitri (2023) highlighted that critical thinking skills are demonstrated in tasks that require analyzing, evaluating, and producing new content.

Let's examine this issue more thoroughly. The basic concept both of CBA and CBTs is the *test item*, which refers to a specific question or problem test takers are asked students to perform. Both closed-ended and open-ended questions can be included in the test item, such as true/false, multiple choice, completion, matching, and rating scales. Open-ended questions, in contrast, can be answered in more or fewer details, are more general, and can therefore integrate cognitive and metacognitive tasks and use constructive or/and elective answers. Metacognitive tasks are incorporated in an all-inclusive or selective learning portfolio.

In our opinion, three different paradigms of thought are used in the pedagogical design of cognitive and metacognitive tasks. This concept was initially investigated in an analysis of usage and development trends for digital textbooks (Railean, 2014). Therefore, in the case of CBA and CBTs the linear paradigm uses a *step-by-step* model of thinking. For instance, the instructional design of CBTs is related to 'linear testing' (Yildirim-Erbasli & Bulut, 2023), and, therefore, students are unable to move backward in changing their prior answers. Nevertheless, this approach offers several advantages over paper-and-pencil testing (PPT), such as flexibility of design, easy administration, and objective scoring (Brüggemann et al., 2023).

System thinking emphasizes considering the whole rather than individual parts. The main examples are intelligent tutoring and computer-based adaptive testing (CAT), in which the process of generation of the test items is intelligent and "adapts" to the knowledge level of those being tested. Thus, each test-taker receives a ‚unique test' presented at the most appropriate level of difficulty. Moreover, each educational system is like a tutor which operates in discrete steps. This means that each ‚new problem' is broken down into manageable steps, and is presented in form of a cycle, and each student must complete one step before moving on to the next. As an illustration, if a student completes step I, the current value of his or her input for the following step will be Xi, and the student's internal cognitive state will be Si. These values could be transformed into the output value $Xi+1$ with state $Si+1$, and so on, following the corresponding procedure.

The problem is that in real life, tasks are ideally adapted to each solver. Metasystems learning design theory is concerned to answer by following questions: (a) Who is the actual learner?; (b) What are his/her ability and level of motivation?; (c) What environments does he or she live and learn in?; (d) What are the specific features of educational system/learning environments in times of openness?; (e) How do digital screens impact learning? The metasystems approach pieces of evidence the impact of a student's (meta)cognitive drive to learn in a diversity of learning environments, both physical and virtual; the role of digital screens on learning capacity; and the importance of ecosystems of learning and communication in an affordable pedagogical design. The learning environment in which CBA and CBTs are used should be more "inclusive" and should not rely only on the teachers' ability to gauge student progress. According to Klir (1990, p. 325), meta*X* is used as the name of things or systems, which are more than *X* in the sense that it is more organized, has a higher logical type of organization, and is analyzed in a more general case. Therefore, the metasystems approach requires more intelligent analysis of students' answers. This viewpoint examines both the direct and indirect effects of learning on changes in thought and behavior. The direct effect refers to using CBTs both in formative and summative assessment and indirect – development of the all-inclusive digital portfolio.

In an attempt to understand what the current knowledge, skills, and attitudes of schoolteachers are concerning the pedagogical design and application of CBA and CBTs it was conducted an online survey targeted schoolteachers in science.

Particularly, it analyzed the data of students who participated in the pedagogical experiment in which CBA for studying math was used. Our research questions are, as follows:

- What approaches do teachers in science, math, and technology use to evaluate CBA, in general, and CBTs, in particular?
- What is the importance of CBA and CBTs in the development of core competencies from the perspective of students?

These research questions were formulated starting from the CBA and CBTs specific features that, according to research literature, should characterize the affordability of pedagogical design and focus on core competence development of students interested in science, math, and technology. In our understanding, building on a solid numeracy foundation, the focus of mathematical, science, and technology competence is not only on knowledge but also on processes and activity, which could be applied in solving real problems. Therefore, by examining these research questions, we think to understand whether and to what extent the state-of-the-art in CBA and CBTs could be recommended for courses on teacher preparation. The final aim of this article is to highlight the psychological and pedagogical aspects of CBA and CBTs that could be improved from the perspective of teachers' and students' experiences to make this approach more effective and ultimately to widen the adoption of metasystems learning design in every practice.

3. Methods

3.1. Data collection, research context, and participants

In the endeavor to find answers to the above-mentioned research questions, it was adopted a mixed qualitative-quantitative approach of design a pedagogical experiment. First, data were collected through an online survey tool consisting of questions purposedly build to investigate the primary research question. The questionary for the survey was developed by the author. Online surveys aimed to elicit from respondents their habits in the didactical design of learning environment and teaching behavior. The survey was implemented using Google Forms and comprised a total of 14 questions. It was structured in two sections, as follows:

- General information about the respondents
- The evidence offered by teachers regarding their habits and teaching behavior

The second amount of data was collected from students, who took the CBTs after classes. Both procedures were presented before the module "*Computer-based assessment*" of the course in pedagogy for the training of teachers in science, math, and technology. Formal approval by the ethics committee was not required due to the type of data collected.

Overall, 64 teachers and 24 primary students participated in the pedagogical experiment. The most of teachers (78.1%) were between 21-30 ages. This unbalanced age ratio is a reflection of the current interest of in-service teachers in science, math, and technology for creative learning strategies that may enhance teaching competencies and, as a result, the cost-effective pedagogical approach of learning design. In terms of teaching experience, they work in a town/city (95.3 %) and most of them have a diploma in higher education (48.4%).

3.2. Data analysis

Two ways for data analyses were used in our pedagogical experiment. First, data from the survey was analyzed using the graphical representations provided by Google Forms. Second, data from students' answers in various CBTs were compared with data obtained on paper-and-pencil tests.

4. Results

4.1. The pieces of evidence offered by teachers in science, math, and technology

To understand the current state-of-art in teachers' knowledge regarding CBA and CBTs was developed a questionary delivered through an online survey. The results were obtained from 64 teachers. These results allow us to conclude that teachers use audio-visual aids to convey the teacher's message to students, as follows (a) video/audio files (35.9%); (b) simulations with educational software (31.3%); (c) personal photos/videos – 15.6% and (d) images from the Internet – 12.5%. However, to evaluate the student's learning outcomes the majority of teachers use oral communication (43.8%); 31.3% of them use tests on paper photographed and transmitted and only 20.3% apply computer interactive tests.

But, for those questions related to theoretical knowledge related to CBA and CBTs teachers answered in another way. Comparing responses related to CBTs and tests administered using paper and pencil we can conclude that CBA and CBTs are more (a) correct (46.9%); (b) accurate (28.1%) and (c) valid (25%). These results are based on the following arguments:

- digital assessment is sensible to the psychopedagogical characteristics of students
- in digital assessment the measure errors are minimal
- digital assessment allows us to obtain and provide the same results for all students.

The validity of these questions could be provided from the following data. Digital assessment in form of assessment, measurement, and testing tools are balanced if (a) state and schoolwork together for the most successful learning strategies (42.2% of responses); (b) CBTs are developed according to the principle of coherence, comprehensiveness, and continuity (40.2%), and (c) include diagnostic, formative and summative tasks (17.2%).

4.2. CBA elementary mathematics program

Early math instruction is focused on arithmetic, number relations, and conceptual understanding of numbers (collectively referred to as ‚math numeracy' here). According to Foster (2023) counting, number knowledge, quantity comparison, solving problems, and making connections between numbers and words are crucial to children's development in math achievement throughout elementary school. Starting from this position was developed a computer-based program that aims to enforce the competencies of students, who study *calculus* (i.e., addition, subtraction, multiplication, and division of real numbers) and *mathematical operations with fractions* (i.e., addition, subtraction, multiplication, and division of fractions).

The computer program was divided into three modules, as follows: „*Natural numbers*", „*Ordinary fractions*" and „*Decimal fractions*". Each module is defined into two three chapters and themes, each of them consisting of a theoretical and a practical part. The theoretical section includes core concepts of the chapter with interactive comprehensive explanations. Practical parts include CBTs. In the pedagogical design of CBTs were applied the following norms:

- Metasystems learning design principles (i.e., self-regulation, personalization, clarity, immediate feedback, dynamicity and flexibility, and cognitive ergonomics)
- Psychopedagogical norms:
- no more than 20 minutes for one CBT
- 30 -100 test operations for one computerized test
- Test items should be written using the rational mode of mind
- The students' answer is evaluated as correct, partially correct, or incorrect.

ISSN 2694-8133

From this perspective, one test operation is equal to one task performed by the mind to solve a complex issue and the test item will have the form *745+123 =* instead of *What is the sum of the following mathematical operation 745+123 =*. Number 1/25 shows that this CBTs includes 25 tasks in form of exercises or problems, which is equivalent (in this situation!) to 60 operations of the test. A copy of the digital screen is presented in Figure 1.

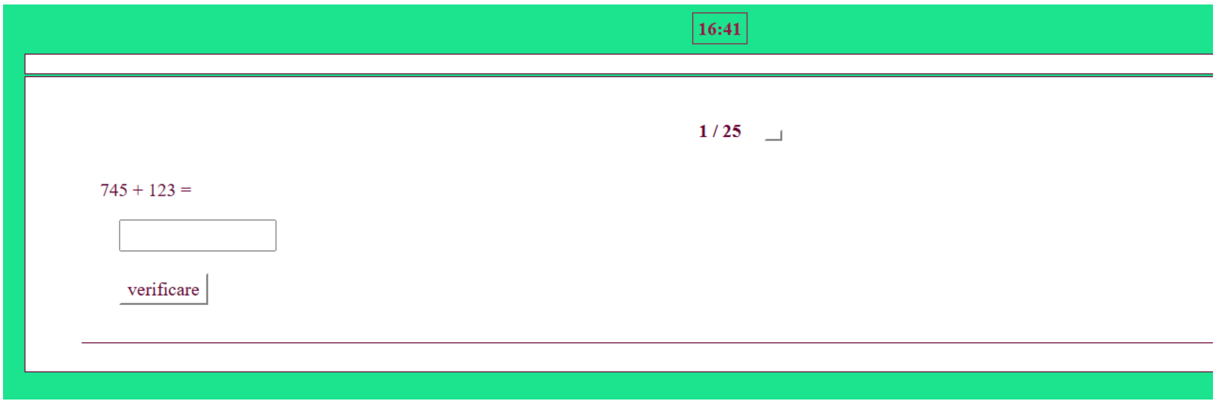


Figure 1. CBT on digital screen

4.3. Observation of changes in students‘ motivation to learn

Researchers look into test-taking behavior using data from interactive assessments, such as how long students spend on each item, how often they change their answers, and how they move around the items (Yildirim-Erbasli & Bulut, 2023).

Case study. After piloting the computer program, it was observed that students who performed better at paper-and-pencil examinations received lower results compared with students who received lower marks within paper-and-pencil examinations. This case requires future examination taking into account the diversity of learning environments and the intrinsic motivation of students to learn mathematics.

5. Conclusions

This study aims to investigate the method of CBA and CBTs, their specific feature in form of immediate feedback, and practical application in the math education of primary students. Our assumption, based on Miller’s research, is that CBA with immediate feedback needs to be used to support the learning process/progress and not to measure learning outcomes.

Traditionally, there are two forms of evaluation of students’ progress, known as assessment and appreciation. Assessment, either in form of paper-and-pencil or computerized assessment, is used to measure knowledge, skills, and attitude in form of data. Appreciation is the result of appreciative intelligence. This form of intelligence is common in humans ‘minds because of subjective perception of values and attitudes toward something or/and someone.

There are three main models of human thought: linear, system, and metasystems. Linear models use a step-by-step approach and system thinking follows the system paradigm, according to which the whole is composed of individual parts and, therefore, each student should complete one step before will move to the next. The learner's abilities and motivation to learn are at the center of the learning process according to the metasystems learning design theory. This theory also examines the influence of a student's (meta)cognitive drive to learn in a variety of physical and virtual learning environments, the impact of screens on learning, and the significance of learning and communication ecosystems in pedagogical design.

Starting with two research questions it was developed an online survey and a computer program for the math education of elementary students. Data shows that (a)teachers are interested in CBA and CBTs even though they use paper-and-pencil tests distributed within a digital environment; (b) students with lower marks who used computerized test perform improve their results and perform better than their colleagues with better results at traditional tests. This idea needs to be future investigated to understand if this is an effect or only a particular observation.

Acknowledgments

Thanks to the CEEPUS project at the Palacký University Olomouc, Faculty of Education, which supported teaching, research, and participation at the International Conference '*Challenges of primary mathematics education as a part of teaching for the 21st century*' (EME2023 Conference).

References

Armstrong, P. (2010). *Bloom's Taxonomy*. Vanderbilt University Center for Teaching. Retrieved from https://cft.vanderbilt.edu/guides-sub-pages/blooms-taxonomy/.

Bastianello, T., Brondino, M., Persici, V., & Majorano, M. (2023). A Novel Computer-Based Assessment Tool for Evaluating Early Literacy Skills in Italian Preschoolers. *Journal of Research in Childhood Education*, *37*(2), 177–196.

Bennett, R. E. (2011). Formative assessment: A critical review. *Assessment in education: principles, policy & practice*, *18*(1), 5–25.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, *21*, 5–31.

Brüggemann, T., Ludewig, U., Lorenz, R., & McElvany, N. (2023). Effects of mode and medium in reading comprehension tests on cognitive load. *Computers & Education*, *192*, 104649. Retrieved from https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360131522002202.

Bulut, O., Gorgun, G., Yildirim-Erbasli, S. N., Wongvorachan, T., Daniels, L. M., Gao, Y., ... & Shin, J. (2023). Standing on the shoulders of giants: Online formative assessments as the foundation for predictive learning analytics models. *British Journal of Educational Technology*, *54*(1), 19–39.

de Bruyn, E., Mostert E. & van Schoor, A. (2011). Computer-based testing - the ideal tool to assess on the different levels of Bloom's taxonomy. *14th International Conference on Interactive Collaborative Learning*, Piešťany, Slovakia, 444–449, doi:10.1109/ICL.2011.6059623.

DeLegge, A., & Kaur, M. (2023). Mathematics in the Humanities: A Survey of Two Courses to Address Math Appreciation in Students. *PRIMUS*, *33*(1), 30–41.

Engelbrecht, J., Borba, M. C., & Kaiser, G. (2023). Will we ever teach mathematics again in the way we used to before the pandemic? *ZDM–Mathematics Education*, 1–16.

Foster, M. E. (2023). Evaluating the Impact of Supplemental Computer-Assisted Math Instruction in Elementary School: A Conceptual Replication. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, 1–25.

Gadanidis, G., & Cendros, R. (2023). Surprise and Story in Thinking and Learning and Their Absence from Mathematics Education. *Integrated Education and Learning*. Springer International Publishing: Cham. 221–236.

Helfaya, A. (2019). Assessing the use of computer-based assessment-feedback in teaching digital accountants. *Accounting Education*, *28*(1), 69–99.

Klir, G. (1990). *Architecture of Systems Problem Solving*. Plenum Press: New York and London.

Kuklick, L., & Lindner, M. A. (2023). Affective-motivational effects of performance feedback in computer-based assessment: Does error message complexity matter? *Contemporary Educational Psychology*, *73*, 102146.

Mayer, R. E. (2002). A taxonomy for computer-based assessment of problem solving. *Computers in Human Behavior*, *18*(6), 623–632.

Miller, T. (2009). Formative computer-based assessment in higher education: The effectiveness of feedback in supporting student learning. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *34*(2), 181–192.

Nguyen, Q., Rienties, B., Toetenel, L., Ferguson, R., & Whitelock, D. (2017). Examining the designs of computer-based assessment and its impact on student engagement, satisfaction, and pass rates. *Computers in Human Behavior, 76*, 703–714.

Nimasari, E. P., Gestanti, R. A., & Nurfitri, K. (2023). “I can’t search on Google for answers”: validity evidence of a developed computer-based assessment application. *Journal on English as a Foreign Language*, *13*(1), 25–55.

Railean, E. (2014). Toward User Interfaces and Data Visualization Criteria for Learning Design of Digital Textbooks. *Informatics in Education*, *13*(2), 255–264.

Thelwall, M. (2000). Computer-based assessment: a versatile educational tool. *Computers & Education*, *34*(1), 37–49.

Van der Kleij, F. M., Eggen, T. J., Timmers, C. F., & Veldkamp, B. P. (2012). Effects of feedback in a computer-based assessment for learning. *Computers & Education*, *58*(1), 263–272.

Whitaker, B., Thatchenkery, T., & Godwin, L. N. (2020). The development and validation of the Appreciative Intelligence® Scale. *Human Performance*, *33*(2-3), 191–213.

Yan, Z., & Chiu, M. M. (2023). The relationship between formative assessment and reading achievement: A multilevel analysis of students in 19 countries/regions. *BritishEducational Research Journal*, *49*(1), 186–208.

Yildirim-Erbasli, S. N., & Bulut, O. (2023). Conversation-based assessment: A novel approach to boosting test-taking effort in digital formative assessment. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 100135. Retrieved from https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2666920X23000140.

ISSN 2694-8133

INVESTIGATION OF THE EFFECTS OF CREATIVE GAMES AND ACTIVITIES ON MATHEMATICS ATTITUDES AND ACHIEVEMENTS IN PRIMARY SCHOOL

Büşra USLUOĞLU[1], Veli TOPTAŞ[2]
[1]Kırıkkale University, Social Sciences Institute (Turkey)
[2]Kırıkkale University, Faculty of Education (Turkey)
busrausluoglu38@hotmail.com, vtoptas@gmail.com

Abstract

In this study, the effects of primary school students' creative mathematics activities on their attitudes and achievements towards mathematics were examined. In the research, a quasi-experimental design with pretest-posttest control group was used. The aim of the study, which is carried out with primary school 3rd grade students, is to develop children's reasoning skills and to develop their love for mathematics through fun activities, games and activities. In the study, the significance of the difference was revealed by measuring the mathematical attitudes and academic achievements of the students before and after the application. In the study, the 'Attitude Scale Towards Mathematics Lesson' scale and the mathematics academic achievement test for the 3rd graders developed by the researchers to scale the academic achievement in mathematics were applied as a pre-test and post-test. Considering the findings of the research, it is seen that the program is effective on the mathematics attitude and mathematics academic achievement of the students in the experimental group who participated in the study of improving mathematics attitude and mathematics academic success through creative mathematics activities. Before the experimental application, the attitudes of the students in both the experimental and control groups towards the mathematics lesson were quite high.

Keywords: primary school, math lesson, creative games, creative math activities

1. Introduction

Mathematics is generally perceived as a difficult and feared course. The most important reason for the formation of this perception is the thought that mathematics consists of only rules and procedures that are disconnected from daily life, therefore, one must have a very strong memory and memorization ability in order to learn. According to Toptas et al. (2020), in order to break this perception, the mathematics learning-teaching process should be made meaningful, fun and discoverable. Even the fact that it is suitable for the process is an important step in itself for this purpose. Mathematics is a naturally entertaining and creative science that helps to understand life.

Especially the primary school period, when the love or anxiety of mathematics is formed, is one of the periods when educators should take more responsibility. In Piaget's words, primary school children are in the concrete operational stage and are open to perceiving everything around them concretely. In addition, during this period, children take great pleasure in playing and learning through games. Chandel et al. (2015) concluded in their study that children find teaching with games more enjoyable. However, Kavasoğlu (2010) mentioned that the fear of mathematics can turn into love in the mathematics lessons taught with games. Therefore, it is very important to reduce a lesson that includes numbers, operations, shapes and symbols, which are abstract such as mathematics, to a concrete basis for primary school children.

The studies conducted in recent years (Usluoğlu and Toptaş, 2020; Bozkurt and Ateş, 2021; Şengül and Kıral, 2023; Tıraş, 2023) have revealed that the activities in mathematics textbooks are generally operational and conceptual. This means that children are successful by memorizing operations and concepts related to mathematics, but they are insufficient in having metacognitive skills in transferring mathematics to daily life. In order to eliminate this inadequacy in a healthy way, the mathematics course should be designed and taught according to the development levels and readiness levels of the children. Children love to play games. Therefore, it is useful for them to play with mathematics.

Creativity is the process that is unique to individuals and that emerges as a result of the interaction and restructuring of the individual's own thoughts and the environment (Chae, Sea, & Lee, 2015). Although creativity often reminds innovations discovered in laboratory environments, it actually covers emotional states of creativity and activities beyond this (Silvia & Kaufman, 2010). Conner et al. (2018) concluded in their study that creativity activities not only have new information discovered, but also have positive psychological benefits. They also emphasized that daily creative activities are a way to improve positive psychological functioning. Therefore, it can be interpreted that creative activities are very effective tools in completing this process and achieving a result. The concept of creativity, which focuses on making the process productive rather than its results, actually expresses the attitude and success of the time spent to the work done.

In this study, it is aimed to teach mathematics achievements with games and creative activities in order to prevent mathematics fear and anxiety in primary school students and to improve their love for mathematics. The aim of the study, which is carried out with primary school 3rd grade students, is to develop children's reasoning and reasoning skills and to develop their love for mathematics with fun activities, games and activities. In this study, the significance of the difference was revealed by measuring the mathematical attitudes and academic achievements of the students before and after the application.

1.1. The Problem of Research

Does a teaching practice blended with creative games and activities in primary school 3rd grade mathematics lesson have an effect on students' attitudes towards mathematics lesson and academic achievement?

2. Method

2.1. Research Pattern

In the research, a quasi-experimental design with pretest-posttest control group was used. This model is based on the principle that an experiment and a control group are formed by pairing one or more groups, impartially (Büyüköztürk, 2002: 206). Within the scope of the study, two groups were determined and after the pre-test application was made, a mathematics teaching application blended with creative games and activity contents was applied in the experimental group for 11 weeks, and traditional teaching was applied in the control group. At the end of 11 weeks, the results of both groups were compared by applying the post-test.

2.2. Working Group

In the study, convenient sampling method was preferred. In this method, the researcher chooses a situation that is close and easy to access and is often used when the researcher does not have the opportunity to use the other sampling method (Kılıç, 2013). In this study, 42 3rd grade students studying at a public school in Kırıkkale formed the study group. Random control and experimental groups were determined without making any selection between 3/A and 3/B

ISSN 2694-8133

branches. 23 students in the 3/A branch were determined as the experimental group, and 19 students in the 3/B branch were determined as the experimental group. The classroom teachers of both groups are experienced teachers with almost the same seniority years.

2.3. Data Collection Tools

In the study, the 'Attitude Scale Towards Mathematics Lesson' scale developed by Aşkar (1986) to measure students' mathematics attitudes, and the mathematics academic achievement test, pre-test and post-test for 3rd graders developed by the researchers to scale their mathematics academic achievement were applied. Information on the scales is as follows:

Attitude Scale Towards Mathematics Lesson: There are 20 items in the scale. There are 10 negative and 10 positive items in the scale, in which a 5-point rating system is used. The reliability coefficient of the scale is 0.96 (Cronbach Alpha). This result shows that the scale is reliable.

Academic Achievement Test: In the test developed by the researchers, there are 20 items for the subjects, units and experimental work to be done on the basis of the 3rd grade mathematics course work. In the test, there are 3rd grade subjects that the students have not yet received their education in the light of the academic calendar carefully calculated before the study. These subjects are, in order, multiplication with natural numbers, division with natural numbers, fractions, money and time measurement. The distribution of the 20-item questions applied as a pre-test and post-test is as follows: 6 questions on multiplication and division with natural numbers, 5 questions on fractions, 5 questions on money and 4 questions on measuring time.

2.4. Application Process

In order to determine the study groups before the application, it was aimed to measure the attitudes of the classes towards mathematics and their academic achievements. For this reason, before the application, the researchers observed the mathematics lessons in the classrooms, asked mathematics questions to the students and determined the experimental-control groups. The academic calendar, activities and games determined before the study were shared with the teacher of the class, which was the experimental group, and long speeches were made on the subjects. Based on the predetermined topics for the study, activities and games were arranged in a way that children could understand more easily. Thus, the 11-week implementation process was started. The researchers shared the necessary materials and activities with the classroom teacher the day before the application every week and personally participated in the application the next day. During the application, the researchers accompanied and observed the classroom teacher and students in a way that would not disrupt the teaching and learning flow in the classroom. During and after the activity, feedback questions were asked to the students about whether the outcome was given or not, and all the activities were recorded in the observation report. Each activity or game lasted 1 lesson hour. Below are examples of creative activities applied to the experimental group:

1. Mathematical Achievement: Doing quick multiplication by 10 and 100.

Game/Activity Suggestion

Required Materials: Colored paper/cardboard, scissors, glue, colored beads, rope (for bracelet making)

Before the activity starts, children's bracelets, some with a single bead and some with two beads, are made with colorful beads and thread. Each student is randomly given a wristband. Students wear the bracelets given to them on their arms (Figure 1). Single-beaded bracelets

ISSN 2694-8133

represent multiplication by 10. On the other hand, bracelets with two beads represent shortcut multiplication by 100. The teacher randomly selects two students.

Students take turns saying one, two or three digit numbers to each other. The other student multiplies the number by 10 if his bracelet has a single bead, and multiplies it by 100 if it has double beads. Then the turn passes to the other student and he/she says a number. For example, let's say that one of the two students coming to the blackboard has a bracelet with a single bead (student with code name A) and the bracelet of the other with two beads (student with code name B). A tells B the number 5. Since B's bracelet has double beads, she multiplies 5 by 100 and gives the answer 500. Since the answer is correct, it is B's turn to say the number. Then, let B tell A the number 36. Since A's bracelet has a single bead, she multiplies the number 36 by 10 and gives the answer 360. Thus, since both students gave the correct answer, they sit in their seats and the teacher chooses other students.

Figure 1. Bracelets prepared for students

2. Mathematical Achievement: Solve problems that require two operations, one of which is division. Studies aimed at posing problems are also included.

Game/Activity Suggestion

Required Materials: Egg carton, pasta

The class is divided into four or six groups. Each group is given egg cartons with different containers and mixed numbers of pasta. Each group puts equal amounts of pasta into their egg containers. If there is any remaining pasta, they place it in a bowl (Figure 2). Afterwards, the groups change places. Each group (station) creates a problem sentence about the egg case and pasta in front of them and leaves the paper on that table. Afterwards, the groups return to their first table and read and solve the problem sentence created. At the end of the game, each group reads the problem sentences out loud and solves them.

ISSN 2694-8133

Figure 2. Pasta divided equally into egg cartons

2.5. Analysis of Data

After measuring the subjects included in the study, the results obtained from the inventory were scored by the researchers. The raw scores of the students participating in the experimental and control groups from the pre-test and post-test applications were tabulated and the arithmetic mean, minimum-maximum values and standard deviation scores of the groups were calculated. The difference between the pretest and posttest mean scores of the experimental and control groups was tested in the comments on whether the creative activity and game work applied in the mathematics lesson were effective, and the t value was calculated, and it was investigated whether it was significant at the .05 level. The pre-test and post-test mean scores of the experimental group and the control group were compared with the dependent t-test and it was examined whether it was significant at the .05 level.

3. Results

3.1. The Results of the Application on Students' Attitudes to Mathematics

Table 1. Findings Regarding the Pre-Test and Post-Test Scores in the Experimental Group

Statistical Value	**N**	x	**Min.**	**Max.**	**sd.**	**t value**
Pre Test	23	60,26	50,00	81,00	7,34	1,29
Post Test	23	68,26	57,00	80,00	5,95	

$p < .05$

As can be seen in Table 1, there is a significant difference between the pretest mean score (60.26) and posttest mean score (68.26) of the experimental group in favor of the posttest results. In order to determine whether the difference between the mathematics attitudes of the students before the experiment and their mathematics attitudes after the experiment was significant, the mean scores of the pre-test and post-test were compared with the dependent t-test. The calculated t value is significant at the .05 level. Accordingly, the difference between the pretest and posttest mean scores of the experimental group is significant.

This result shows that there is a significant difference between the pre-test and post-test results of the experimental group students participating in the creative mathematics activities in terms of the level of mathematics attitudes.

Table 2. Findings Regarding the Control Group Pre-Test and Post-Test Scores

Statistical Value	**N**	x	**Min.**	**Max.**	**sd**	**t value**
Pre Test	19	55,59	39,00	65,00	6,84	−1,48
Post Test	19	57,63	47,00	65,00	5,57	

p < .05

In Table 2, it is seen that there is a very low difference in the mathematics attitude levels of the control group students compared to the pre-test and post-test mean scores. In order to test the significance of this difference, it was seen that the t value was not significant at the .05 level when the pretest and posttest mean scores were tested with the dependent t test. This result shows that there is no significant difference between the pre-test and post-test mathematics attitudes scores of the control group.

Table 3. Findings Related to the Differences in the Pretest and Posttest Mean Scores of the Experimental and Control Groups

Statistical Value	**n**	**pretest** x **- sd**	**posttest** x **- sd**	**pre-post test** x **diff.**	**t value**
Experimental group	23	60,26 - 7,34	68,26 - 5,95	−8,00	−2,95
Control group	19	55,59 - 6,84	57,63 - 5,57	2,04	

p < .05

As shown in Table 3, the t-value was calculated by testing the difference between the pre-test and post-test mean scores of the experimental and control groups in order to determine the effect of creative mathematics activities and the study of improving mathematics attitude and mathematics academic achievement on the mathematics attitude levels of primary school third grade students. The calculated t value (−2.95) is significant at the .05 level. The gain of the experimental group from the program is significantly higher than the control group. This result shows that creative mathematics activities and the study of improving mathematics attitude and mathematics academic achievement are effective on the mathematics attitude levels of primary school third grade students.

3.2. The Results of the Application on the Mathematics Academic Achievement of Students

Table 4. Findings Regarding the Pre-Test and Post-Test Scores in the Experimental Group

Statistical Value	**N**	x	**Min.**	**Max.**	**sd**	**t value**
Pre Test	23	58,95	34,00	90,00	16,29	−7,02
Post Test	23	75,82	36,00	98,00	16,66	

p < .05

In Table 4, there is a significant difference between the pretest mean score (58.95) and the posttest mean score (75.82) of the experimental group, in favor of the posttest results. Pre-test and post-test mean scores were compared with the dependent t-test in order to determine whether the difference between the students' mathematics academic achievement before the experiment and their mathematics academic achievement after the experiment was significant.

The calculated t value (−7.02) is significant at the .05 level. Accordingly, the difference between the pretest and posttest mean scores of the experimental group is significant. This result shows that there is a significant difference between the pre-test and post-test results of the experimental group students participating in the creative mathematics activities in terms of the level of academic achievement in mathematics.

Table 5. Findings Regarding the Control Group Pre-Test and Post-Test Scores

Statistical Value	**N**	x	**Min.**	**Max.**	**sd**	**t value**
Pre Test	19	58,78	31,00	87,00	15,02	−5,68
Post Test	19	59,15	39,00	95,00	16,52	

p < .05

In Table 5, it is seen that there is a very low difference in the mathematics academic achievement levels of the control group students compared to the pre-test and post-test mean scores. In order to test the significance of this difference, it was seen that the t value was not significant at the .05 level when the pretest and posttest mean scores were tested with the dependent t test. This result shows that there is no significant difference between the pre-test and post-test mathematics academic achievement scores of the control group.

Table 6. Findings Regarding the Differences in the Pre-Test and Post-Test Mean Scores of the Experimental and Control Groups

Statistical Value	**n**	**pretest** x **- sd**	**posttest** x **- sd**	**pre-post test** x **diff.**	**t value**
Experimental group	23	58,95 - 16,29	75,82 - 16,66	16,86	3,01
Control group	19	58,78 - 15,02	67,15 - 15,52	8,36	

p < .05

As shown in Table 6, the t-value was calculated by testing the difference between the pre-test and post-test mean scores of the experimental and control groups in order to determine the effect of creative mathematics activities, mathematics attitude and mathematics academic achievement work on the mathematics academic achievement levels of primary school third grade students. The calculated t value (3.01) is significant at the .05 level. The gain of the experimental group from the program is significantly higher than the control group. This result shows that creative mathematics activities and the study of improving mathematics attitude and mathematics academic achievement are highly effective on the mathematics academic achievement levels of primary school third grade students.

4. Conclusion

When the findings of the study are examined, it is seen that the program has an effect on the mathematics attitude and mathematics academic achievement of the students in the experimental group who participated in the development of mathematics attitude and mathematics academic achievement through creative mathematics activities. Before the experimental application, the attitudes of the students in both the experimental and control groups towards the mathematics lesson were quite high. The fact that the mathematics lesson attracted the attention of students because it includes the solution of many problems they encounter in daily life may have caused this situation. Since they find a piece of the lesson in every moment of their life, it is expected that they have a positive attitude towards the lesson. Attitude pretest results also confirm this. When the literature is examined, the studies (Tural, 2005; Duran, Sidekli and Yorulmaz, 2018; Galiç, 2020; Ceylan and Karahan, 2021) show consistency with the findings obtained from this research.

Mathematics lessons with creative mathematics games and activities contribute significantly more to students' academic success than the traditional method. Another result of this study is that significant academic success was achieved in mathematics lessons taught with creative activities. It is directly proportional to the findings obtained as a result of the study conducted by Erdoğan (2018).

As a result, it can be said that if the learning environment blended with creative activities is used in the mathematics lesson, it can contribute positively to the academic achievement and attitudes of the students. Since mathematics is based on abstract operations, formulas and figures, it may be difficult for students to understand and make sense of it. For this reason, it is very important that the mathematics lessons associated with real life, especially in the concrete operational period, are made by touching, feeling and doing it personally, both in the mathematics lessons in the classroom and in the mathematics practice applications at home. Concrete practices are increasing in the classroom, and since the opportunity to do different activities arises, it becomes easier for students to gain achievements. For this reason, the attitude towards the course may increase as it contributes to the academic success in the course and makes the course fun. In this context, it can be suggested that teachers use the blended learning approach in mathematics lessons.

References

Aşkar, P. (1986). Matematik dersine yönelik tutumu ölçen likert tipi bir ölçeğin geliştirilmesi. *Eğitim ve Bilim*, *11*(62), 31-36.

Bozkurt, E. & Ateş, B. K. (2021). İlkokul Matematik Dersinde Kullanılan Yardımcı Kaynak Kitaplara İlişkin Sınıf Öğretmenlerinin Görüşleri . *Turkish Journal of Educational Studies, 8*(2) , 109-128. https://doi.org/10.33907/turkjes.792377

Büyüköztürk, Ş. (2002). *Sosyal bilimler için veri analizi el kitabı*. Ankara: Pegema Yayıncılık.

Ceylan, Ö., & Karahan, E. (2021). STEM Odaklı Matematik Uygulamalarının 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Tutum ve Bilgileri Üzerine Etkisi. *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, *11*(2), 660-683.

Chae, S., Seo, Y. ,Lee, K. C. (2015). Effects of task complexity on individual creativity through knowledge interaction: A comparison of temporary and permanent teams. *Computers in Human Behavior, 42,* 138-148.

Chandel, P., Dutta, D., Tekta, P., Dutta, K., & Gupta, V. (2015). Digital game based learning in computer science education. *CPUH-Research Journal*, *1*(2), 33-37.

Conner, T. S., DeYoung, C. G., & Silvia, P. J. (2018). Everyday creative activity as a path to flourishing. *Journal of Positive Psychology, 13*(2), 181-189. https://doi.org/10.1080/17439760.2016.1257049

Duran, C., Sidekli, S., & Yorulmaz, A. (2018). İlkokul dördüncü sınıf öğrencilerinin matematik etkinliklerine yönelik tutumlarının incelenmesi. *International Primary Education Research Journal, 2*(1), 17-26.

Erdoğan, H. (2018). *Gerçekçi matematik eğitimine dayalı matematik öğretiminin akademik başarı, kalıcılık ve yansıtıcı düşünme becerisine etkisi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Galiç, S. (2020). *Oyun Ögeleri İle Zenginleştirilmiş Matematik Etkinliklerinin, Öğrencilerin Başarı, Tutum ve Motivasyonları Üzerine Etkisinin İncelenmesi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Kavasoğlu, B. E. (2010). *İlköğretim 6, 7 ve 8. sınıf matematik dersinde olasılık konusunun oyuna dayalı öğretiminin öğrenci başarısına etkisi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Kılıç, S. (2013). Örnekleme yöntemleri. *Journal of Mood Disorders, 3*(1), 44-66.

Toptaş, V., Olkun, S., Çekirdekçi, S. ve Sarı, M. H., (2020). *İlkokulda Matematik Öğretimi*. Vizetek Yayıncılık.

Şengül, S., & Kıral, B. (2023). Matematik Ders Kitaplarında Matematiksel Akıl Yürütme ve İspat. *Yaşadıkça Eğitim*, *37*(2), 508-530. https://doi.org/10.33308/26674874.2023372589

Tıraş, S. (2023). *Proje 2061 kitap değerlendirme ölçütleri açısından ilkokul 4. Sınıf matematik ders ve çalışma kitaplarının değerlendirilmesi*. Doktora Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Tural, H. (2005). *İlköğretim matematik öğretiminde oyun ve etkinliklerle öğretimin erişi ve tutuma etkisi.* Doctoral dissertation, DEÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Usluoğlu, B., & Toptaş, V. (2020). İlkokul 1 ve 2. sınıf matematik ders kitaplarındaki ünite değerlendirme sorularının Yenilenmiş Bloom Taksonomisine göre incelenmesi. *Eğitim Kuram ve Uygulama Araştırmaları Dergisi, 6*(2), 136-148.

ISSN 2694-8133

ROVNICE V KONSTRUKTIVISTICKÉ VÝUCE 1. STUPNĚ ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Renáta ZEMANOVÁ[1]
[1]Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
renata.zemanova@osu.cz

Abstrakt

Téma rovnic a jejich soustav je v České republice povinným výstupem 2. stupně základní školy. Následně prolíná výukou matematiky a řady dalších předmětů všech stupňů a typů škol. Žáci a studenti se úlohy většinou naučí správně řešit. Nedokážou však podle reálné situace rovnice sestavit. V hlubším zkoumání příčin obtíží žáků a studentů vidíme, že rovnice řeší bez porozumění formálními algoritmy typu „převedeme na druhou stranu a změníme znaménko“. V genetické výuce matematiky, respektující konstruktivistický přístup, je systematické budování rovnosti zahájeno už v mateřské škole, graduje na 1. stupni základní školy v několika didaktických prostředích neboli sémantických i strukturálních kontextech a vrcholí v 5. ročníku řešením lineárních rovnic a jejich soustav. Popíšeme typové úlohy napříč těmito prostředími, ukážeme jejich potenciál pro porozumění rovnicím a způsobu jejich řešení od mateřské školy po 5. ročník základní školy. Představíme šetření v 5. ročníku základní školy: v několika vyučovacích hodinách jsme žákům zadali úlohu o myšleném čísle s výzvou, aby ji převedli do co nejvíce různých prostředí. Žáci našli osm prostředí, v nichž úlohu řešili a řešení komentovali. Průběh jejich řešení jsme evidovali videozáznamem. Představíme žákovská řešení, komentáře a jejich analýzu. Ukážeme kritická místa, slepé cesty i vysoký potenciál tohoto zadání pro sestavování rovnic a reedukaci formalismu v jejich řešení.

Klíčová slova: rovnost, rovnice, didaktické prostředí, genetická metoda výuky matematiky, izomorfismus úloh

THE EQUATION IN CONSTRUCTIVISTIC LEARNING AT PRIMARY SCHOOL

Abstract

The topic of equations and their systems is an obligatory outcome of the secondary school in the Czech Republic. Subsequently, it blends the teaching of mathematics and a number of other subjects of all grades and types of schools. Pupils and students mostly learn to solve problems correctly. However, they cannot create equations related to the real situation. In a deeper investigation of the causes of pupils´ and students´ difficulties, we see that they solve equations without understanding by formal algorithms such as "transfer to the other side and change the sign." In genetic mathematics teaching, respecting the constructivist approach, systematic building of equality starts already in pre-school education, graduates to the primary school in several substantial learning environments, semantic and structural contexts, and culminates in the 5th grade by solving linear equations and their systems. We will describe the type problems across these environments, show their potential for understanding equations and how to solve them from pre-school to the 5th grade of primary school. We will present the survey in 5th grade of primary school: in several classes, we gave pupils task about hidden number with a challenge to transcribe it into as many different environments as possible. The pupils found eight environments in which they solved the problem and commented on the solution. We recorded the course of their solution with a video recording. We will present pupils' solutions, comments and their analysis. We will show critical points, dead ends as well as the high potential of this task for compiling equations and reeducating formalism in their solution.

Keywords: equality, equations, learning environment, genetic method of teaching mathematics, isomorphism of tasks

ISSN 2694-8133

1. Úvod

S mnoha situacemi budujícími představy o rovnosti se dítě setkává od narození. Zjišťuje, zda jsou objekty (předměty, jevy nebo procesy) stejné nebo se liší, rozdíly pojmenovává. Po přirozeném porovnávání (je – není stejný) nastupuje porovnávání základní (větší – menší – stejný, rychlejší – pomalejší – stejný…), porovnávání rozdílem (o kolik?) a podílem (kolikrát?). Samostatnou kapitolou v porovnávání je pak porovnávání množství a počtu. V každém z těchto typů porovnávání nacházíme možnost „je stejný, stejně“, tedy rovnost. V případě rovnosti pak mohou děti objekty přiřazovat (dávají k sobě ty, které jsou stejné, je jich stejně) a třídit (vytvářejí skupiny stejných objektů, rovnajícího se množství a počtu). Odtud směřují k porozumění čísla jako názvu třídy.

V šetření využíváme matematických didaktických prostředích tak, jak je vymezuje německý badatel E. Wittmann (2001) v pojmu podnětné výukové prostředí (substantial learning environment. Navazuje na myšlenky o procesu učení Deweye (1938), Piageta (2010) a Freudenthala (1991). Wittmann zejména požadoval, aby žáci měli možnost řešením úloh v daném prostředí odhalovat zákonitosti a klíčové matematické pojmy. M. Hejný pojem didaktické matematické prostředí precizoval (Hejný, 2014).

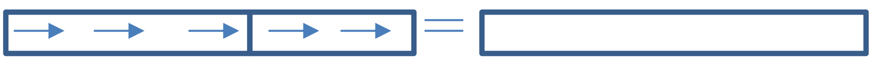
V předškolním vzdělávání je téma rovnosti ještě více zpracováno, a to prakticky ve všech didaktických prostředích rozvíjejících číselné představy: Krokování, Schody, Vláčky, Autobus… i představy prostorové: Stavitelé, Podlaháři, Dřívka, Papírnictví… (Slezáková a kol., 2020).

Na 1. stupni ZŠ se schéma rovnosti v těchto didaktických prostředích rozšiřuje a přibývají prostředí nová, cílená na budování schématu rovnic, nerovnic a jejich soustav: Myslím si číslo, Děda Lesoň, Součtové trojúhelníky, Hadi, Pavučiny, Váhy… V těchto didaktických prostředích se žáci učí dobře rovnicím, nerovnicím a jejich soustavám porozumět, k reálné situaci rovnici, nerovnici nebo soustavu sestavit, převádět zadání úloh mezi prostředími a identifikovat v jednotlivých prostředích navzájem izomorfní úlohy (Hejný a kol., 2018–2022).

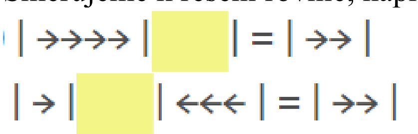
2. Didaktická prostředí pro budování schématu rovnic

Ze všech didaktických prostředí vybíráme jen ta, která žáci využili pro řešení rovnice v našem šetření, a to Součtové trojúhelníky, Hadi, Pavučiny, Krokování, Schody, Autobus, Vláčky (žáci nevyužili, uvádíme pro srovnání s Dědou Lesoněm), Děda Lesoň. Ukázky úloh čerpáme z blogu společnosti H-mat, o.p.s. (2018).

Krokování je sémantickým didaktickým prostředím, které využívá zkušeností dětí z chůze. Čísla v zadávaných pokynech jsou ve významu operátoru změny – Udělej tři kroky dopředu. Rovnice můžeme ilustrovat jednoduchými činnostmi, kdy děti A a B stojí na stejném poli krokovacího pásu, dítě A dostane pokyn: Udělej tři kroky dopředu, potom dva kroky dopředu, začni teď. Kolik roků musí udělat dítě B, aby stálo vedle dítěte A? Zapisujeme:



Směřujeme k řešení rovnic, např.:

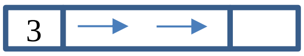


Tedy $4 + x = 2$

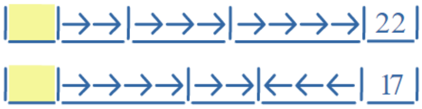
$1 + x - 3 = 2$

Schody navazují na prostředí Krokování. Na krokovací pás doplníme čísla ve významu lineární adresy. Rovnice můžeme ilustrovat jednoduchými činnostmi, kdy dítě stojí na čísle 3 krokovacího pásu, dostane pokyn: Udělej dva kroky dopředu, začni teď. Na kterém čísle krokovacího pásu bude po provedení pokynu stát?

ISSN 2694-8133



Směřujeme k řešení rovnic, např.:



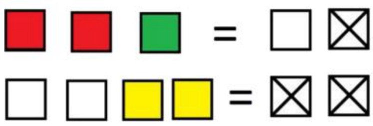
Tedy $x + 2 + 3 + 4 = 22$
$x + 4 + 2 - 3 = 17$

Autobus je sémantickým didaktickým prostředím, které využívá zkušenosti dítěte z cestování hromadnou dopravou. Čísla jsou zde zastoupena jako operátory změny (přistoupili dva cestující) nebo stavy jako počet (v autobuse jeli tři cestující). Jednoduché zadání představuje úloha: Na zastávku přijeli tři cestující, nikdo nevystoupil, dva cestující nastoupili. Kolik cestujících odjelo ze zastávky? Směřujeme k řešení rovnic (V – vystoupili, N – nastoupili, J – jeli), např.:

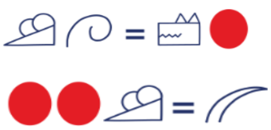
	A	B	C	D	E
V			5		13
N		3		2	0
J	11	10	14		

Situace na zastávce B: $11 - x + 3 = 10$
Situace na zastávce C: $10 - 5 + x = 14$
Situace na zastávce D: $14 - x + 2 = 13$

Vláčky a Děda Lesoň jsou sémantickými didaktickými prostředími, která pracují se stavy jako veličinou (délka vagónku, síla zvířátka). V případě Vláčků je síla vyjádřena délkou vagónku, přičemž délka bezprostředně následujícího v barevném pořadí je stejná jako délka bezprostředně předcházejícího a bílého (červený je stejně dlouhý jako dva bílé, zelený je stejně dlouhý jako červený a bílý, fialový je stejně dlouhý jako zelený a bílý, žlutý je stejně dlouhý jako fialový a bílý…). V případě Dědy Lesoně je síla zvířátek dána dohodou, opět se přidává k síle bezprostředně předchozího zvířátka síla myši (kočka má stejnou sílu jako dvě myši, husa má sílu jako kočka a myš, pes má sílu jako husa a myš…). Jednoduché zadání představuje úloha: Z nabídky vagónků postav stejně dlouhé vláčky jako fialový vagónek (4 bílé). Z nabídky zvířátek sestav družstvo, které bude mít stejnou sílu jako pes (4 myši). Směřujeme k řešení rovnic, např. zjisti, který vagónek se ukrývá pod plachtou (čtverec s křížkem), resp. které zvířátko se ukrývá pod maskou (barevný kruh), např.:

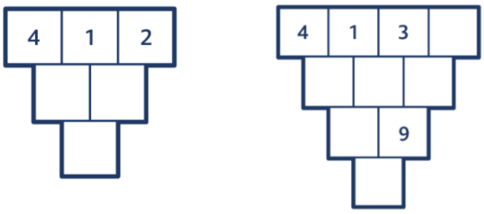


Tedy $2 + 2 + 3 = 1 + x$
$1 + 1 + 5 + 5 = 2x$

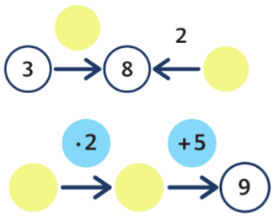


Tedy $1 + 6 = 4 + x$
$2x + 1 = 5$

Součtové trojúhelníky jsou strukturálním prostředím, kde platí, že součet sousedních dvou čísel v jednom řádku je roven číslu mezi nimi o řádek níže. Úlohy vyzývají k doplnění všech čísel součtového trojúhelníka, směřujeme k řešení rovnic, resp. jejich soustav, např.:

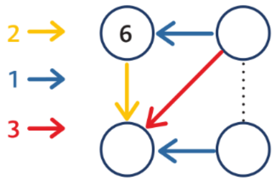


Hadi jsou strukturálním prostředím, kde platí, že čísla v těle hada jsou stavy ve významu počtu a čísla nad tělem hada jsou operátory nebo skaláry změny. Úlohy vyzývají k doplnění všech čísel hada tak, aby dala správný výsledek početní operace, přičemž operace se provádí ve směru šipky. Směřujeme k řešení rovnic, resp. soustav rovnic, např.:



Tedy $3 + x = 8$, $y + 2 = 8$
$2x + 5 = 9$

Pavučiny jsou strukturálním prostředím, kde platí, že čísla ve vrcholech pavučiny jsou stavy ve významu počtu a čísla nad šipkami (nebo šipky stejné barvy) jsou operátory nebo skaláry změny. Úlohy vyzývají k doplnění všech čísel (nebo barevných šipek) do pavučiny tak, aby dala správný výsledek početní operace, přičemž operace se provádí ve směru šipky. Směřujeme k řešení rovnic, resp. soustav rovnic, např.:



Tedy $x + 1 = 6$
$6 + 2 = y$
$x + 3 = y$
$x + z + 1 = y$

Převádění zadání rovnice v jednom prostředí do prostředí jiných, tedy hledání izomorfních úloh, buduje u žáků dobré porozumění a dává jim možnost řešení v tom prostředí, které je pro ně nejpřívětivější.

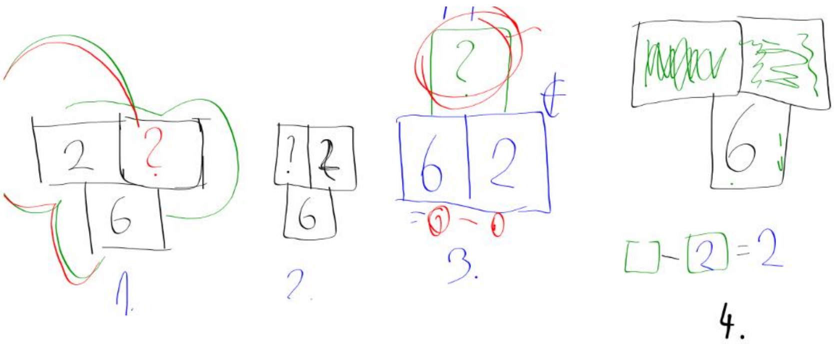
3. Řešení úloh v 5. ročníku ZŠ

V prosinci 2021 a lednu 2022 byla v 5. ročníku ZŠ Provaznická v Ostravě žákům zadána úloha o myšleném čísle s výzvou, aby úlohu převedli do co nejvíce didaktických prostředí, která znají a společně řešení diskutovali. Šetření se zúčastnilo sedmnáct žáků třídy 5.B a jejich třídní učitel v roli experimentátora. Ten zadal úlohu a výzvu, řešení žáků a jejich diskuzi zaznamenával na video. Z žákovských prací a videozáznamů jsme zpracovali analýzu.

Zadanou úlohou o myšleném čísle bylo: *„Myslím si číslo, když k němu přičtu 2, dostanu 6. Které číslo si myslím.“* Tedy rovnice $x + 2 = 6$. Úloha není náročná na výpočet, na ten necílí. Cílem aktivity bylo zvědomění izomorfismu napříč didaktickými prostředími. Učitel se snažil povzbudit žáky, aby se pokusili tento izomorfismus odhalit v co nejvíce prostředích, jakkoli je to v některých jednodušší, v jiných obtížnější. Zajímalo nás, kolik a která prostředí žáci využijí, zda a kde budou v přepisu do prostředí chybovat. Výsledky analýzy jsou využitelné (1) pro učitele, protože mu dávají zpětnou vazbu týkající se porozumění jeho žáků rovnicím, (2) pro studenty, připravující se na povolání učitele, protože mohou porovnat vlastní poznatky s poznatky žáků a upravit tak svá očekávání, (3) pro učitelé těchto studentů, protože podobné výzvy a jejich analýzy mohou cíleně zařazovat do jejich přípravy a (4) pro autory učebnic, protože mohou svá zadání korigovat.

3.1. Převod úlohy do prostředí Součtových trojúhelníků

Identifikovali jsme tři různé způsoby záznamu u devíti žáků, obrázek 1. V diskuzi žáků k řešení 1 zazněl argument, že čísla v trojúhelníku neodpovídají zadání úlohy. Myšlené číslo by mělo být vlevo (jako tomu je v řešení 2). Trojúhelník 1 odpovídá jinému zadání: „K číslu 2 přičtu myšlené číslo a vyjde číslo 6. Které číslo jsem přičetl?“ Vzhledem ke komutativnosti operace sčítání lze přemýšlet, zda zadání „když myšlené číslo přičtu k číslu 2“ zapsat x + 2 nebo 2 + x. Diskuze ve třídě ukázala, že žáci preferují zápis x + 2, pravděpodobně i proto, že „myslím si číslo“ zaznělo na počátku úlohy. V řešení 3 žák používá nestandardní trojúhelník. Spolužáci namítají, že nevědí, jaká pravidla v něm platí. Autor ukazuje, že 6 – 2 = ? a vysvětluje, že úlohu o myšleném čísle řeší „odzadu“ inverzní operací a neumí to do sčítacího trojúhelníku zapsat. V řešení 4 žák doplnil podmínku x – 2 = 2 a v trojúhelníku považuje za neznámá obě čísla na prvním řádku. Ukazuje, že myšlené číslo musí být 4, aby podmínka platila. Číslo určil zpaměti a chtěl „nějak“ doplnit do trojúhelníku. Jeho řešení žáci zcela nepřijali, vadí, že se v trojúhelníku neobjeví zadané „když k němu přičtu 2“. Podmínku považují za zbytečnou, za údaj navíc. Trojúhelníků s podmínkou se ve třídě objevilo několik různých, na správnosti žádného se žáci neshodli, opakovali stejné argumenty jako ve 4. řešení, obrázek 1.



Obrázek 1. Součtové trojúhelníky

3.2. Převod úlohy do prostředí Hadů

Do tohoto prostředí přepsalo úlohu pět žáků, všichni použili podobný záznam, lišil se pouze tvar šipky, obrázek 2. V diskuzi se žáci shodli, že na tvaru šipky nezáleží.

Obrázek 2. Hadi

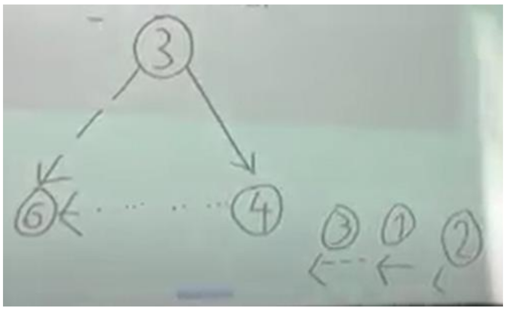
3.3. Převod úlohy do prostředí Pavučin

Do tohoto prostředí přepsali úlohu čtyři žáci, diskutovaný záznam uvádíme na obrázku 3. První záznam komentoval autor takto: *„Když tady máme nápovědu, že tečkovaná čára jsou 2, takže od 6 se odečítají 2, takže tady máme 4, a plná čára se rovná 1, takže zase 4 – 1 = 3 a díky tomu zjistíme, že čárkovaná čára se rovná 3. A to myslím si číslo je to dole.“*

Žáci považují číslo 3 v pavučině za zbytečné, protože se v zadání neobjevuje. Autor argumentuje, že do pavučiny nějaké číslo dát musí (jinak by vyšel had). Učitel se žáků ptá, zda

ISSN 2694-8133

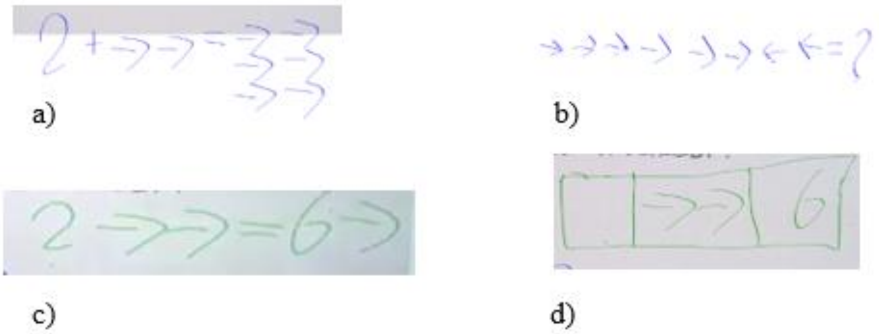
opravdu tuto pavučinu převedou do myšleného čísla tak, jak je myšlené číslo zadáno. Třída se shodla, pavučina je vyřešena správně, ale úloze o myšleném čísle neodpovídá. Je v ní více úloh o myšleném čísle, např. *„Myslím si číslo, když k němu přičtu 1 dostanu 4"*, že v pavučině je několik hadů.



Obrázek 3. Pavučiny

3.4. Převod úlohy do prostředí Krokování a Schody

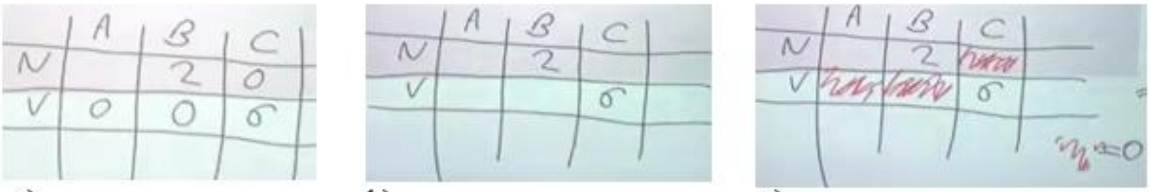
Do prostředí Krokování přepsali úlohu dva žáci, jejich záznamy uvádíme na obrázku 4a, b. V diskuzi se žáci shodli, že záznam a) je až na grafiku v pořádku: *„Kolik kroků a kterým směrem musím udělat, abych po dalších dvou krocích vpřed udělal celkem 6 kroků vpřed?"* V záznamu b) autor zná strategii řešení úloh o myšleném čísle (odzadu), do záznamu ji zapracuje, tedy od výsledku 6 odečítá operátor 2 a za neznámou považuje pravou stranu krokovací rovnice. Spolužáci namítají, že záznam neodpovídá zadání, přestože vyjde správný výsledek. Aby odpovídal, musel by to být záznam na obrázku 4c. Do diskuze vstoupil učitel s připsáním rámečků, obrázek 4d. Tím se z prostředí Krokování dostal do prostředí Schodů: *„Na jakém schodu stojím, když po dvou krocích vzhůru budu na schodu 6?"*, resp. *„Na jakém podlaží bydlím, když po přestěhování o 2 podlaží budu bydlet na podlaží 6?"* Třída souhlasí.



Obrázek 4. Krokování a Schody

3.5. Převod úlohy do prostředí Autobus

Do prostředí Autobus přepsal úlohu jeden žák, jeho záznam uvádíme na obrázku 5a: „Kolik cestujících nastoupilo na první zastávce A do autobusu, když na zastávce B nikdo nevystoupil, 2 cestující nastoupili a na konečnou přijelo 6 cestujících?" Diskutuje se uvedení nul v tabulce, nápad, aby se namísto nich uvedl nějaký nenulový počet nastoupivších a stejný počet vystoupivších. Autor vysvětloval, že chce použít pouze čísla ze zadání a nuly mu připadají vhodnější než např. + 4, - 4. Spolužák navrhuje nepsat do polí s nulami nic, obrázek 5b. Třída se shoduje, že by pak úloha měla mnoho řešení, což zadaná úloha nemá (musí vyjít 4). Objevil se nápad přidat k tabulce podmínku, obrázek 5c, následně se třída shoduje, že je tabulka 5c shodná s 5a (5a je jednodušší).



a) b) c)

Obrázek 5. Autobus

3.6. Převod úlohy do prostředí Zvířátka dědy Lesoně

Do tohoto prostředí přepsalo úlohu třináct žáků, jejich záznamy uvádíme na obrázku 6. Nejdříve se na tabuli zapsal záznam 6a. Zde žáci namítali, že by pes (zakroužkovaný symbol) neměl být v záznamu uveden, je to neznámé zvířátko: *„Jaké zvířátko musí přijít kočce na pomoc, aby byli stejně silní jako beran?“*, obrázek 6b. Následovala diskuze ohledně pořadí zvířátek na levé straně rovnice, obdobná jako diskuze v 3.1., žáci navrhovali záměnu, obr. 6c.

a) b) c)

Obrázek 6: Zvířátka dědy Lesoně

3.7. Převod úlohy do prostředí slovních úloh

Slovní úlohy nejsou specifickým didaktickým prostředím, přesto jeden žák úlohu o myšleném čísle do zadání slovní úlohy převedl, a to takto: *„Na táboře je blablabla dětí. Každé má dostat 1 koláč, ale ještě musíme dát dvoum vedoucím. Kolik je na táboře dětí?“* Jako první v diskuzi zaznělo, že „to nedává smysl“ a následně, že „vypadlo to číslo 6“. Autor zadání upravil: „*Na táboře je 6 koláčů a má se to rozdělit mezi několik dětí, a ještě mají dostat 2 vedoucí. Kolik je na táboře dětí?*“ S tímto přepisem se třída i učitel spokojili. Předpokládáme, že nebrali v úvahu možnost dělení koláčů a měli na mysli spravedlivé dělení. Úloha by tedy mohla znít: „Mezi děti tábora a 2 vedoucí bylo spravedlivě rozděleno 6 koláčů, koláče se nedělily. Kolik dětí bylo na táboře?“ Jistě bychom mohli zpochybnit reálnost situace, kdy je na táboře tak malý počet dětí, avšak žáci by jistě našli „vysvětlení“.

4. Shrnutí, závěr

Z celkového počtu sedmnácti žáků převedlo úlohu o myšleném čísle třináct žáků do prostředí Zvířátek dědy Lesoně, 9 žáků do prostředí Součtových trojúhelníků, 5 žáků do prostředí Hadů, 4 žáci do prostředí Pavučin, 2 žáci do prostředí Krokování a po jednom žákovi do prostředí Autobusu a na slovní úlohu, tabulka 1. Nemáme evidenci u jednotlivých žáků, tedy nevíme, do kolika a kterých prostředí převáděli. Protože však celkový součet prostředí (pravý sloupec tabulky 1) je 35, průměrný počet prostředí na jednoho žáka je dvě.

Nejčastěji využívaným prostředím jsou Zvířátka dědy Lesoně, následují Součtové trojúhelníky, Hadi a Pavučiny. Tento výsledek zdůvodňujeme vysokým motivačním potenciálem Lesoně spolu se snadným převodem, kdy stačilo do úlohy za myšlené číslo dosadit masku a za ostatní čísla sílu zvířátek. Snadný převod nabízela i prostředí Součtových trojúhelníků a Hadů, jedná se však o strukturální prostředí, která pro žáky nemusí být tak snadno uchopitelná a zapamatovatelná. Prvkem, který rozhodoval o využití prostředí byla i zkušenost žáka s prací v daném v prostředí. Zajímavým výsledkem jsou čtyři převody do Pavučin, kde se převod ukázal jako velmi diskutabilní, a nakonec nebyl uskutečněn (Pavučiny se redukovaly na

Hady). Naopak snazší a fungující převod do Schodů nikdo nepoužil, dva žáci se do tohoto prostředí dostali až skrze Krokování. Tento výsledek můžeme vysvětlit dlouhou prodlevou od poslední práce v prostředí Krokování/Schody. Ukázkou žákovy snahy o nalezení co největšího počtu prostředí je i pokus o převod do Autobusu, který standardním prostředím pro řešení rovnic v žákově pojetí není. Žák by mohl řešit situaci na jedné zastávce, což neučinil. Dobrým pokusem s odhlédnutím od výsledku je pokus o formulaci slovní úlohy řešené úlohou o myšleném čísle, tento by mohl sloužit jako nová výzva v další aktivitě s rovnicemi související.

Tabulka 1. Použitá prostředí

prostředí	počet žáků
Děda Lesoň	13
Trojúhelníky	9
Had	5
Pavučina	4
Krokování	2
Autobus	1
Slovní úloha	1

Nejkontroverznějším a opakujícím se obsahem diskuze se ukázala být pozice neznámého čísla v Lesoňovi a Součtovém trojúhelníku, dále pak konvence zápisů ve všech prostředích včetně označení neznámého čísla.

Přepisy rovnice do různých sémantických nebo strukturálních situaci mohou dobře diagnostikovat úroveň žákova porozumění, schopnost přepsat rovnici do prostředí, ve kterém se žák nejlépe orientuje, mu pak může usnadnit řešení.

Výsledky šetření zamýšlíme využít pro přípravu budoucích učitelů, další vzdělávání učitelů a autory učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ.

Acknowledgements

Článek využívá materiálů projektu Inovace ŠVP ve školních družinách a diferenciace výuky matematiky na 1. stupni ZŠ, 2020–2022, řešeném v H-mat, o.p.s. v rámci OP Výzkum, vývoj a vzdělávání.

Literatura

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. Holt: New York, USA.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Kluwer Academic Publishers.

Hejný, M. (2018–2022). Matematika pro 1.–5. ročník ZŠ, učebnice, pracovní sešity a příručky učitele. H-mat, o.p.s.: Praha.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. PedF UK: Praha.

Kolektiv autorů. *Didaktická prostředí*. Dostupné z http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi (dostupné 22. 2. 2023).

Piaget, J., & Inhelder, B. (2010). *Psychologie dítěte*. Portál: Praha.

Slezáková, J. a kol. (2020). *Předmatematika I. Metodika pro učitele mateřských škol*. H-mat, o.p.s.: Praha.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational studies in Mathematics Education*, *48*(1), 1-20. http://www.jstor.org/stable/3483113.

ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL

Editorial Office: Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

Address: Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Phone: +420 58 563 5709

E-mail: emej@upol.cz

Electronic edition: http://emejournal.upol.cz/issues

2023

Vol. 5, No. 1

ISSN 2694-8133