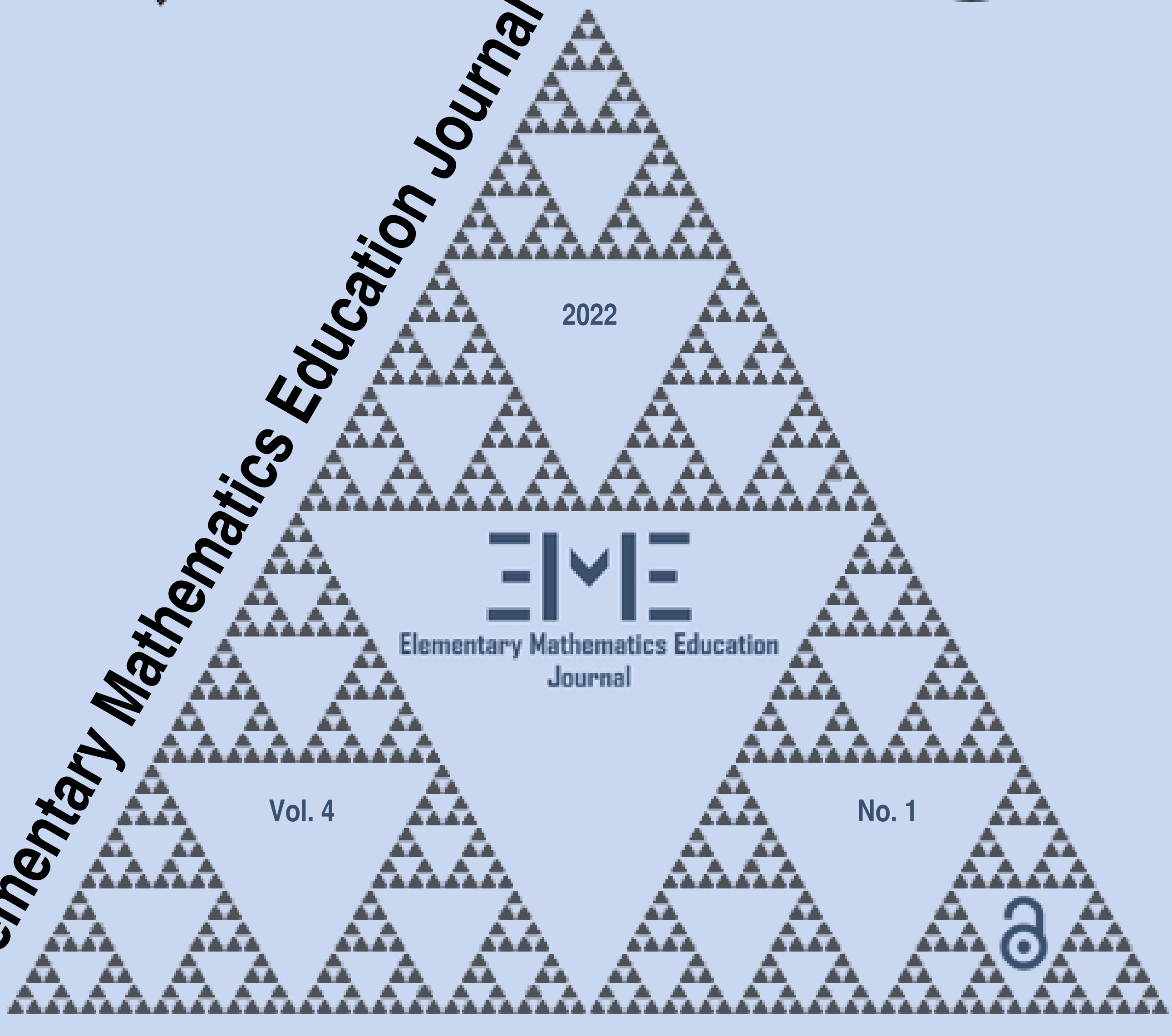
Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics

The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal



Olomouc 2022

ISSN 2694-8133

Univerzita Palackého v Olomouci
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

ve spolupráci s

Jednotou českých matematiků a fyziků
pobočný spolek Olomouc

Elementary Mathematics Education Journal

ročník 4, číslo 1

2022

Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

in cooperation with

The Union of Czech Mathematicians and Physicists
Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 4, No. 1

2022

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Vydavatel: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika

Adresa a kontakty:
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Informace pro autory:
Časopis uveřejňuje články k aktuálním problémům z teorie elementární matematiky, o inovacích, trendech a výzkumech v primárním a preprimárním matematickém vzdělávání. Jednotlivé články jsou anonymně posuzovány dvěma odborníky v recenzním řízením typu „double-blind peer review“. Další informace a podrobné pokyny pro autory jsou k dispozici na webu: http://emejournal.upol.cz.

Za kvalitu obrázků, jazykovou správnost, dodržení bibliografické normy a dodržování publikační etiky odpovídají autoři jednotlivých článků.

Časopis vychází dvakrát ročně.

Ročník 4, číslo 1

ISSN 2694-8133

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Publisher: Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Editor-in-chief: David Nocar (Palacký University Olomouc, Czech Republic)

Address and contacts:
Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic
emej@upol.cz

Information for authors:
The journal publishes articles on current issues in the theory of elementary mathematics, about innovation, trends and research in primary and pre-primary mathematics education. Each article is reviewed by two anonymous experts ("double-blind peer review"). More information and other instructions for authors are available at: http://emejournal.upol.cz.

The authors of the articles are responsible for the quality of the images, language accuracy, compliance with bibliographic standards and adherence to publication ethics.

The journal is published twice a year.

Vol. 4, No. 1

ISSN 2694-8133

Obsah

Content

INDUKTIVNÍ POSTUPY A EXPERIMENTOVÁNÍ V MATEMATICE

Jaroslav BERÁNEK
Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

Příspěvek je věnován využití induktivního postupu a experimentování při řešení matematických úloh. V textu je uvedena řada příkladů, při jejichž řešení jsou tyto metody využity ke stanovení hypotéz, včetně jejich důkazů matematickou indukcí. Uvedené příklady lze využít při přípravě budoucích učitelů matematiky na 1. stupni základní školy.

Klíčová slova: matematická úloha, neúplná indukce, matematická indukce, dělitelnost

INDUCTIVE PROCEDURES AND EXPERIMENTS IN MATHEMATICS

Abstract

The article is devoted to the use of the inductive procedure and experiments while solving mathematical problems. The author supplies the number of exercises where these methods are used for stating hypotheses, including their proofs with the use of mathematical induction. The given exercises can be used when teaching future elementary school teachers.

Keywords: mathematical problem, inductive reasoning, mathematical induction, divisibility

1. Úvod

Obsah a výuka školské matematiky se neustále rozvíjí, a to na všech typech a stupních škol. Také na 1. stupni ZŠ se metodické postupy při výuce matematiky ve vzdělávací oblasti „Matematika a její aplikace“ neustále rozvíjejí. Tomu musí odpovídat i neustálá snaha o zkvalitňování přípravy budoucích učitelů 1. stupně ZŠ, a to nejen v matematice.

Tento příspěvek přináší jednu z možností, na kterou studenti nejsou většinou zvyklí a málo jí využívají; jde o experimentování a využití induktivního postupu při hledání řešení. Studenti (a často i žáci ve škole) bývají zvyklí na naučené algoritmy. Pokud zadaná úloha či problém přímo neodpovídá některému z algoritmů, bývají dost často bezradní. Přitom obvykle stačí pomocí experimentu či neúplné indukce vyřešit několik možných případů a v tomto postupu pokračovat tak dlouho, až objeví nějakou zákonitost. Pak lze vyslovit hypotézu a tu následně dokázat matematickou indukcí. Při výuce na 1. stupni ZŠ se pochopitelně důkaz provádět nemůže. Příklady uvedené v textu pocházejí z mnohaletých vlastních autorových příprav do výuky, kam byly převzaty z řady pramenů, různých učebnic, skript či ročenek starších ročníků matematické olympiády (např. [1], [2], [5], [8]). Další zajímavé problémy, resp. teoretické základy matematické indukce, lze nalézt v publikacích [3], [4], [6], [7].

2. Soubor úloh

1. Jako první uvedeme zajímavou úlohu, zadanou před lety v MO v kategorii pro 4. ročník.

„Je zadáno slovo RUKA. Z tohoto slova utvoříme další slovo tak, že poslední písmeno přemístíme na začátek a vyměníme souhlásky R a K. Vznikne tak slovo AKUR. Dále pokračujeme stejným způsobem ve tvoření dalších slov. Určete, které slovo je v této řadě slov na 25. místě.“

Řešení: Podle zadání budeme tvořit řadu slov: RUKA, AKUR, KARU, URAK, RUKA, … Je vidět, že první čtyři slova se již budou pravidelně opakovat. Vidíme, že slovo RUKA je na prvním místě, dále na pátém místě, devátém místě atd. Snadno určíme, že na 25. místě bude stát původní slovo RUKA.

2. *Běžně je známá pověst o kladení zrnek obilí na šachovnici (1, 2, 4, 8, …) jako odměna pro starověkého učence (pokud není, lze ji žákům jako motivaci vyprávět). Nás ale zajímá, jaká je poslední cifra tohoto čísla 2^{63} (začínáme od jednoho zrnka na prvním políčku, tj. čísla 2^0).*

Řešení: Mnoho žáků i studentů by v této chvíli řešení úlohy vzdalo nebo uzavřelo s tím, že to nelze zjistit. Přitom stačí psát postupně po sobě jdoucí mocniny čísla 2 (počínaje 2^1) a sledovat jejich poslední cifry tak dlouho, až objevíme zákonitost. Píšeme tedy

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, …

Je vidět, že se postupně opakují poslední cifry 2, 4, 8, 6. Můžeme vyslovit hypotézu, že čísla 2^1, 2^5, 2^9, … jsou zakončena číslicí 2, čísla 2^2, 2^6, 2^{10}, … jsou zakončena číslicí 4, čísla 2^3, 2^7, 2^{11}, … jsou zakončena číslicí 8 a čísla 2^4, 2^8, 2^{12}, … jsou zakončena číslicí 6. Dává-li tedy exponent při dělení čtyřmi zbytek 1, je poslední cifra 2. Dává-li zbytek 2, je poslední cifra 4, při zbytku 3 je poslední cifra 8 a je-li exponent dělitelný čtyřmi, je číslo zakončeno číslicí 6 (exponent musí být různý od nuly). Exponent čísla 2^{63} dává při dělení čtyřmi zbytek 3, hledaná poslední číslice tohoto čísla je tedy 8.

Poznámka: Výše uvedený verbální popis řešení lze užít i na 1. stupni ZŠ (bez použití mocnin a slova exponent). Při řešení se studenty VŠ je nutno řešení formálně popsat. Po induktivním postupu lze vyslovit čtyři hypotézy ($m \in \mathbf{N}_0$):

$$(i)\quad (\forall n \in \mathbf{N})\ 2^{4n-3} = 10\,m + 2,$$

$$(ii)\quad (\forall n \in \mathbf{N})\ 2^{4n-2} = 10\,m + 4,$$

$$(iii)\quad (\forall n \in \mathbf{N})\ 2^{4n-1} = 10\,m + 8,$$

$$(iv)\quad (\forall n \in \mathbf{N})\ 2^{4n} = 10\,m + 6.$$

Tyto hypotézy je nutno dokázat matematickou indukcí. Dokážeme první z nich, ostatní se dokáží analogicky. Dokazujeme tedy tvrzení $(\forall n \in \mathbf{N})\ 2^{4n-3} = 10\,m + 2$.

Pro $n = 1$ píšeme $2^1 = 2$ ($m = 0$), tedy tvrzení platí. Nyní předpokládáme platnost tvrzení pro $n = 2, 3, 4, \dots, k;$ dokážeme jeho platnost pro $k + 1$.

$$2^{4(k+1)-3} = 2^{4k+1} = 2^{4k-3} \cdot 2^4 = (10\,m + 2) \cdot 2^4 = (10\,m + 2) \cdot 16 = 160\,m + 32 = 10M + 2.$$

Poznamenejme, že analogická úloha lze formulovat pro mocniny čísla 3, lze tedy hledat poslední cifru např. čísla 3^{63}. Také při zkoumání mocnin čísla 3 dostáváme opakující se cyklus čtyř posledních číslic 3, 9, 7, 1. Uveďme několik mocnin čísla 3, počínaje 3^1:

3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, 177147, 531441….

Poslední číslice čísla 3^{63} je tedy 7. Dále poznamenejme, že studenti odborné matematiky by při řešení těchto úloh zřejmě využili teorie kongruencí, pomocí nichž lze řešit i podstatně složitější problémy teorie čísel. U studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ je však zavádění teorie kongruencí diskutabilní. U jednoduchých úloh, jak bylo ukázáno, se lze použití kongruencí vyhnout.

3. Na dalším příkladu ukážeme, že induktivní postup, tj. zkoušení různých možností a hledání zákonitostí, může vést k úspěchu i tehdy, zdá-li se úloha na první pohled neřešitelná.

„*Dokažte, že číslo* $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$ *je dělitelné třemi.*“

Řešení: Jedná se o součet sta čísel, není to tedy nekonečná řada. Je ale zřejmé, že jde o součet prvních sta členů geometrické posloupnosti s prvním členem 2, kvocientem 2 a posledním členem 2^{100}. Pro tento součet existuje obecný vztah $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$, po dosazení a úpravě máme $s_{100} = 2^{101} - 2$. Toto číslo však není možno užít k řešení úlohy, neboť není možno dokázat jeho dělitelnost třemi. Jak tedy nyní postupovat? Začneme postupně počítat částečné součty prvních několika členů a hledat zákonitost. Objevíme hypotézu, že součet dvou po sobě jdoucích mocnin čísla dvě je vždy dělitelný třemi. Dokážeme-li tuto hypotézu, je důkaz snadný. Číslo v zadání je součtem sta (tj. sudého počtu) po sobě jdoucích mocnin čísla dvě. Tento součet rozdělíme na součty dvojic po sobě jdoucích mocnin, $s^{100} = (2^1 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6) + \ldots + (2^{99} + 2^{100})$, číslo v každé závorce je dělitelné třemi, tedy i celkový součet je dělitelný třemi. Zbývá ale ještě důkaz vyslovené hypotézy $\forall n \in \boldsymbol{N}$: $3 \mid (2^n + 2^{n+1})$. Tento důkaz je jednoduchý a využívá běžně známý vztah pro počítání s mocninami:

$$2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^n$$

Číslo $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$ je tedy skutečně dělitelné třemi.

4. Dalším zajímavým problémem jsou pro budoucí studenty učitelství pro 1. stupeň ZŠ nekonečné řady a jejich součty. Opět nemáme na mysli seznámit tyto studenty s ucelenou teorií nekonečných řad včetně kritérií konvergence (pouze pojem částečné součty bychom neměli vynechat), avšak některé příklady řad by byla škoda opomenout. Velmi překvapivé je pro ně zjištění, že součet následující nekonečné řady $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ neexistuje.

Vhodným přerovnáním jejích členů lze totiž dostat různé hodnoty. Např. při uzávorkování $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$ dostaneme jako součet číslo 0, avšak při uzávorkování $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots$ bude součtem číslo 1. Existují ale i řady s formálně složitějším zadáním, které tito studenti mohou vyřešit. Vezměme např. řadu $S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-6}\right)$. Induktivním postupem mohou studenti psát postupně jednotlivé členy řady a doufat, že objeví nějakou zákonitost. V tomto případě snadno zjistí, že po jisté době se členy řady začnou postupně navzájem rušit. Platí totiž

$$S = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \ldots = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}.$$

Vezměme nyní jinou nekonečnou řadu $s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. V tomto případě podobný výpis členů řady nepomůže, je nutné počítat částečné součiny. Počítejme tedy: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$, $S_4 = \frac{4}{5}$. Nyní můžeme vyslovit hypotézu $\forall n \in \boldsymbol{N}$: $S_n = \frac{n}{n+1}$. Tuto hypotézu musíme ale dokázat matematickou indukcí. Pro $n = 1$ hypotéza platí, neboť $S_1 = \frac{1}{2}$. Nyní předpokládejme její platnost pro $n = 2, 3, \ldots, k$; dokážeme ji pro $n = k + 1$. Označení a_{k+1} znamená $(k+1)$-ní člen dané nekonečné řady.

$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$. Hypotéza tedy platí. Nyní je úkolem určit součet dané řady. Pro studenty obeznámené s pojmem limity není problém určit, že limita posloupnosti částečných součtů, a tedy i součet řady, je rovna číslu 1. Studenti, kteří se s pojmem limity nesetkali, musí postupovat úsudkem. Vztah $S_n = \frac{n}{n+1}$ mohou postupně upravit do tvaru $S_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, odkud je zřejmé, že vzrůstá-li hodnota n nad všechny meze, platí $S_n = 1$.

Připomeňme, že uvažujeme o studentech učitelství pro 1. stupeň ZŠ, u nichž nelze předpokládat větší znalosti matematické analýzy. Pro studenty odborné matematiky by podobné nekonečné řady byly naprosto triviální.

Při využití induktivního postupu a experimentování při řešení úloh může dojít k situacím, kdy induktivní postup k ničemu nevede, resp. je daná úloha řešitelná podstatně jednodušším způsobem. Uvedeme příklady na obě situace.

5. „*Určete vztah pro počet p_n úhlopříček pravidelného n-úhelníka*."

Řešení: Zkusíme využít induktivní postup, tj. provedeme náčrt daného n-úhelníka a spočítáme jeho úhlopříčky. Pro $n = 3$ (nejjednodušší možný n-úhelník) platí $p_3 = 0$, pro $n = 4$ platí $p_4 = 2$, dále platí $p_5 = 5$, $p_6 = 9$, $p_7 = 14$, … . Po chvíli úvah je možno objevit rekurentní vzorec $p_{n+1} = p_n + (n-1)$, který však nevede k určení přímého výpočtu hodnoty p_n. Studenti odborné matematiky by mohli aplikovat obecnou teorii řešení lineárních rekurentních posloupností, což je ale pro naše účely nevhodné. Proto musíme vzorec pro p_n odvodit přímo. Ukazuje se, že to není příliš obtížné. Z každého vrcholu pravidelného n-úhelníka vychází $n-3$ úhlopříček, každá z nich spojuje dva vrcholy; hledaný vztah je tedy $p_n = \frac{n(n-3)}{2}$. Tento vztah již bez problémů dokážeme matematickou indukcí. Důkaz začínáme pro $n = 3$, kdy vztah platí. Indukčním předpokladem pro $n = k$ je $p_k = \frac{k(k-3)}{2}$, dokážeme platnost vztahu pro $n = k+1$. Z pravidelného k-úhelníka vytvoříme pravidelný $(k+1)$-úhelník „přidáním" jednoho vrcholu. Z tohoto „přidaného" vrcholu vede $k-2$ úhlopříček, o které je nutno zvětšit hodnotu p_k. Musíme ale přičíst ještě jednu úhlopříčku, která přidáním vrcholu vznikla z jedné strany k-úhelníka. Platí tedy po dosazení $p_{k+1} = \frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 = \dots = \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$. Vzorec jsme tedy dokázali.

6. *„Zkoumejte hodnoty $f(n)$ polynomu $n^2 + 17n + 11$, vyslovte hypotézu a dokažte ji."*

Řešení: Induktivním postupem nalezneme hodnoty polynomu pro $n = 1, 2, 3, \dots$. Zjistíme, že jedinou možnou hypotézou je tvrzení, že $f(n)$ je liché číslo obecného tvaru $2p + 1$ ($p \in \mathbf{N}$). Formálně zapsáno $\forall n \in \mathbf{N}$: $n^2 + 17n + 11 = 2p + 1$.

Tuto hypotézu opět lze dokázat matematickou indukcí. Pro $n = 1$ platí $f(1) = 29$, což je liché číslo. Z předpokladu platnosti hypotézy pro $n = 2, 3, \dots, k$ dokážeme platnost pro $n = k+1$. Platí: $f(k+1) = (k+1)^2 + 17(k+1) + 11 = \dots = (k^2 + 17k + 11) + 2k + 18 = (2p+1) + 2(k+9) =$ $= 2(p+k+9)+1 = 2q+1$.

Tvrzení tedy platí. Pozorný student by ale měl zjistit, že tento postup je zbytečný. Přímo ze zadání polynomu $n^2 + 17n + 11$ plyne, že $f(n)$ je vždy liché číslo. Lze psát $f(n) = n(n + 17) + 11$, přičemž v součinu $n(n + 17)$ je vždy jedno z čísel n, $n+17$ liché a druhé je sudé, tento součin je tedy vždy sudé číslo. Po přičtení čísla 11 je $f(n)$ vždy liché číslo. Lze se tedy obejít bez induktivního postupu, stačí využít základní znalosti z teorie dělitelnosti.

7. V tomto příkladu ukážeme, že každá hypotéza se nedá jednoduše dokázat matematickou indukcí.

„Zkoumejte součty prvních po sobě jdoucích lichých čísel, vyslovte hypotézu a dokažte ji".

Řešení: Induktivním postupem určíme $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, atd. Vyslovíme hypotézu $\forall n \in \mathbf{N}$: $1 + 3 + 5 + (2n-1) = u^2$, tedy že každý takový součet je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Důkaz matematickou indukcí by byl zřejmě teoreticky možný, ale velmi komplikovaný. Tento příklad je přitom ideální ukázkou na motivační využití prvků z historie matematiky. Studenty lze seznámit se čtvercovými čísly, užívanými ve starověku, dále s trojúhelníkovými čísly atd. Zakreslíme-li nyní postupně součty prvních po sobě jdoucích přirozených čísel do čtvercové sítě, uvidíme, že tento součet je vždy čtvercové číslo, tzn. druhá mocnina nějakého přirozeného čísla. Číslo 1 je jeden čtverec, číslo 3 zakreslíme tak, že „obalíme" první čtverec shora a zprava dalšími třemi čtverci, dostaneme tedy čtverec 2×2. Tento čtverec opět „obalíme" shora a zprava 5 čtverci, vznikne čtverec 3×3. Takto lze postupovat pořád. Tvrzení tedy platí, neboť každý další „obal" vyjadřuje číslo o 2 větší než poslední sčítané liché číslo, tedy další liché číslo v pořadí.

8. V tomto příkladu ukážeme tři různé typy důkazů obecné hypotézy.

„Určete největšího společného dělitele čísel $n^3 + 17n$ pro všechna přirozená čísla n."

Řešení: Induktivním postupem určíme hodnoty dvojčlenu pro několik prvních přirozených čísel n: Pro $n = 1$ vychází 18, pro $n = 2$ vychází 42, pro $n = 3$ potom číslo 78. Je zřejmé, že jediné „podezřelé číslo", které hledáme, je číslo 6 (je největším společným dělitelem 18, 42, 78). Podaří-li se nám dokázat hypotéza $\forall n \in \mathbf{N}$: $6 \mid (n^3 + 17\,n)$, bude číslo 6 největším společným dělitelem všech hodnot $n^3 + 17n$.

První možnost důkazu, která studenty napadne, je opět matematická indukce. Skutečně, pro $n = 1$ hypotéza platí (číslo 18 je dělitelné číslem 6), dále předpokládáme platnost hypotézy pro $n = k$ a dokážeme ji pro $n = k+1$. Platí: $(k+1)^3 + 17(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 17k + 17 =$ $= (k^3 + 17k) + 3k(k+1) + 18$.
První závorka je dělitelná šesti podle indukčního předpokladu, výraz $3k(k+1)$ obsahuje dvě čísla jdoucí po sobě (jedno z nich musí být sudé), je tedy rovněž dělitelný šesti, číslo 18 je také násobek šesti. Tvrzení tedy platí.

Druhá možnost důkazu využívá zbytkových tříd podle modulu 6. Každé přirozené číslo n musí mít při jeho dělení šesti jeden ze tvarů $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$. Dosadíme-li každé z těchto vyjádření čísla n do výrazu $n^3 + 17n$, dostaneme po úpravě číslo dělitelné šesti. Např. pro $n = 6k+5$ máme $(6k+5)^3 + 17(6k+5) = 216k^3 + 540k^2 + 450k + 125 + 102k + 85 =$ $= 216k^3 + 540k^2 + 552k + 210$. Všechny koeficienty jsou dělitelné šesti, tedy i číslo $(6k+5)^3 + 17(6k+5)$ je dělitelné šesti. Ostatní případy se dokáží analogicky rozepsáním.

Třetí důkaz hypotézy $\forall n \in \mathbf{N}$: $6 \mid (n^3 + 17n)$ je důkazem velmi elegantním, který však obsahuje umělý krok, na který studenti nemající potřebné zkušenosti s těmito důkazy, nemusí přijít. Uvedeme jej bez komentáře: $n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n+1)(n-1) + 18n = 6K$, protože součin $n(n+1)(n-1)$ je součinem tří po sobě jdoucích čísel, z nichž alespoň jedno je sudé a jedno je dělitelné třemi. Tento součin je proto dělitelný šesti.

9. Následuje poslední úloha, při jejímž řešení si studenti procvičí počítání s velkými čísly i jistou představivost při jejich zápisu.

„Je dáno číslo 16. „Doprostřed" tohoto čísla vložíme číslo 15, dostaneme číslo 1156. Doprostřed vzniklého čísla opět vložíme číslo 15 a obdržíme číslo 111556. Takto postupujeme

pořád dál a dál a dostáváme čísla 11115556, 1111155556 atd. Dokažte, že každé z těchto čísel je druhou mocninou některého přirozeného čísla.“

Řešení: Využijeme induktivní postup. Budeme postupně počítat druhé odmocniny vzniklých čísel (pomocí kalkulačky) a hledat zákonitost. Dostáváme:

$\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{1156} = 34$, $\sqrt{111556} = 334$, $\sqrt{11115556} = 3334$, $\sqrt{1111155556} = 33334$, ….

Před vyslovením hypotézy zavedeme vhodné označení. Výrazem $n\text{---}\boxed{p}\text{---}n$ budeme rozumět číslo zapsané p ciframi rovnými n, např. $4\text{---}\boxed{7}\text{---}4$ označuje číslo *4444444*. Hypotéza nyní zní takto:

$$\forall n \in \mathbf{N}\text{: } (3\text{---}\boxed{n}\text{---}34)^2 = 1\text{---}\boxed{n+1}\text{---}15\text{---}\boxed{n}\text{---}56.$$

Důkaz matematickou indukcí je v tomto případě pro studenty příliš formálně složitý. Provedeme tedy důkaz hypotézy přímo písemným násobením. I tento postup, jak uvidíme, vyžaduje značnou představivost při sledování řádů cifer při výpočtu. Poznamenejme, že tento způsob důkazu je zřejmě poněkud problematický, protože využívá názoru a není formálně popsán, pro studenty učitelství pro 1. stupeň ZŠ je však postačující. Nejprve je vhodné pro získání vhledu provést důkaz hypotézy pro několik malých čísel *n,* například 1, 2, 3, 4.

$$\begin{array}{r} 34 \\ 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 334 \\ 334 \\ \hline 1336 \\ 1002 \\ 1002 \\ \hline 111556 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3334 \\ 3334 \\ \hline 13336 \\ 10002 \\ 10002 \\ 10002 \\ \hline 11115556 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 33334 \\ 33334 \\ \hline 133336 \\ 100002 \\ 100002 \\ 100002 \\ 100002 \\ \hline 1111155556 \end{array}$$

Nyní již můžeme přikročit k obecnému důkazu:

$$\begin{array}{r} 3\text{---}\boxed{n}\text{---}34 \\ 3\text{---}\boxed{n}\text{---}34 \\ \hline 13\text{---}\boxed{n}\text{---}36 \\ 10\text{---}\boxed{n}\text{---}02 \\ 10\text{---}\boxed{n}\text{---}02 \\ \vdots \\ 10\text{---}\boxed{n}\text{---}02 \\ \hline 1\text{---}\boxed{n+1}\text{---}15\text{---}\boxed{n}\text{---}56 \end{array}$$

Studenti se v rámci experimentu mohou pokoušet provést důkaz pomocí teorie dělitelnosti. Čísla *1156, 111556* atd. mohou rozkládat na prvočinitele a doufat, že objeví nějakou zákonitost. Postupně s pomocí kalkulačky obdrží:

$1156 = 2^2 \cdot 17^2 = 34^2$, $111556 = 2^2 \cdot 167^2 = 334^2$, $11115556 = 2^2 \cdot 1667^2 = 3334^2$, atd.

Z těchto vztahů je možné odvodit hypotézu:

$$\forall n \in \mathbf{N}: 1\text{---}\boxed{n+1}\text{---}15\text{---}\boxed{n}\text{---}56 = 2^2 \cdot (16\text{---}\boxed{n-1}\text{---}67)^2.$$

Důkaz této hypotézy lze provést jako výše analogicky pomocí přímého vynásobení. Každé přirozené číslo tvaru $1\text{---}\boxed{n+1}\text{---}15\text{---}\boxed{n}\text{---}56$ je tedy skutečně druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Pokusy studentů provést rozklad na prvočinitele čísel $16\text{---}\boxed{n-1}\text{---}67$ již obecně nelze provést. Ze znalosti teorie prvočísel lehce ukážeme, že čísla *17, 167, 1667* jsou prvočísla. Hypotézu, že každé z čísel $16\text{---}\boxed{n-1}\text{---}67$ je prvočíslem, však není zřejmě možné obecně dokázat.

3. Závěr

V příspěvku jsme předložili devět úloh a problémů, při jejichž řešení lze využít induktivní postup a experimentování. Cílem je mj. upozornit studenty, budoucí učitele na 1. stupni základní školy, aby nepropadali malomyslnosti, když ze zadání úlohy nevidí ihned postup řešení; že i zkoušení různých možností teprve může vést k objevení nějaké zákonitosti, která pak povede k řešení úlohy. Problémem může pak být důkaz objevených hypotéz, který již často vyžaduje hlubší matematické znalosti. V příspěvku jsme rovněž ukázali několik možných využití důkazu matematickou indukcí i případ, kdy důkaz indukcí není příliš vhodný (poslední příklad 9). Některé z uvedených úloh lze užít přímo ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ. Tam samozřejmě důkazy neprovádíme. Tím studentům ukazujeme, že matematika není „suchá“ věda, kde na vše existuje algoritmus, ale že může obsahovat i „hravé“ prvky.

Literatura

[1] *Archiv ročníků Matematické olympiády pro základní školu.* http://www.matematickaolympiada.cz /cs/olympiada-pro-zakladni-skoly.

[2] Beránek, J., & Hájek, J. (1991). *Úvod do studia matematických disciplín.* Brno: Masarykova univerzita v Brně.

[3] Beránek, J. (2019). Vybrané problémy rekreační matematiky. *Učitel matematiky (UM),* 27 (4), 237-243.

[4] Larson, L. C. (1990). *Metódy riešenia matematických problémov*. Bratislava: Alfa.

[5] Odvárko, O., & Šedivý, J., & Calda, E (1990). *Metody řešení matematických úloh.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

[6] Vrba, A. (1977). *Princip matematické indukce*. Praha: Mladá fronta.

[7] Výborný, R. (1963). *Matematická indukce*. Praha: Mladá fronta.

[8] Kolektiv autorů (1982). *Vybrané úlohy z matematické olympiády: kategorie Z: sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

ISSN 2694-8133

VZÁJOMNÉ PRIENIKY TECHNOLOGICKÝCH, MATEMATICKÝCH A PEDAGOGICKÝCH ZNALOSTÍ PRI IMPLEMENTÁCII TECHNOLÓGIE ROZŠÍRENEJ REALITY DO VÝUČBY ŠTUDENTOV UČITEĽSTVA PRE PRIMÁRNE VZDELÁVANIE

Jana HNATOVÁ,
Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)
jana.hnatova@unipo.sk

Abstrakt

V príspevku je uvedená ukážka matematickej edukačnej aktivity spracovanej s využitím technológie rozšírenej reality, ktorá bola odskúšaná na seminároch predmetu Digitálne technológie v matematickom vzdelávaní v rámci pregraduálnej prípravy študentov v študijnom programe Učiteľstvo pre primárne vzdelávanie. Predkladaná aktivita vychádza z problémovej úlohy zameranej na rozvoj priestorovej predstavivosti a pri jej spracovaní bol využitý model TPAC umožňujúci konkretizovať zaradenie digitálnych technológií do edukačného procesu s prepojením na obsahové poznatky predmetu a pedagogické poznatky o výučbe. Výstupom je analýza riešení študentov, identifikácia a kategorizácia miskonceptov, ktorých sa študenti dopúšťali pred a po implementácii technológie rozšírenej reality do edukácie.

Kľúčové slová: model TPACK, AR technológia, geometria

THE INTERSECTIONS OF TECHNOLOGICAL, MATHEMATICAL AND PEDAGOGICAL KNOWLEDGE IN THE IMPLEMENTATION OF AUGMENTED REALITY TECHNOLOGY IN TEACHING OF PRIMARY EDUCATION TEACHING STUDENTS

Abstract

The paper presents a sample of mathematical educational activity processed using augmented reality technology. It was tested in seminars on the subject of Digital Technologies in Mathematical Education as part of the undergraduate preparation of students in the study program Teacher Training for Primary Education. The presented activity is based on a problem task focused on the development of spatial imagination and its processing was used the TPAC model to concretize the inclusion of digital technologies in the educational process with a link to the content knowledge of the subject and pedagogical knowledge about teaching. The output is an analysis of students' solutions, identification and categorization of misconceptions that students committed before and after the implementation of augmented reality technology into education.

Keywords: model TPACK, AR technology, geometry

1. Úvod

Ak sa na vzdelávanie s efektívnym využitím digitálnych technológií pozrieme z pohľadu pregraduálnej prípravy učiteľa na primárnom stupni vzdelávania zisťujeme, že je potrebné v jeho príprave prepájať viaceré navzájom sa ovplyvňujúce oblasti poznania.

Prvá oblasť je tvorená edukačným obsahom, ktorý má študent učiteľstva ako budúci učiteľ na vyučovacích hodinách matematiky svojim žiakom sprístupniť. Východiská sú v rámci formálneho vzdelávania prebiehajúceho na primárnom stupni základných škôl dané záväznými kurikulárnymi dokumentami v podobe štátneho a školského vzdelávacieho programu. Tie majú vo vzdelávacom štandarde definovať všeobecnú úroveň tohto vzdelávania tak, aby boli dostatočne náročné, no zvládnuteľné naprieč všetkými vzdelávacími oblasťami. Je potrebné si uvedomiť, že podľa ŠPÚ (2019) má odborná matematická pripravenosť učiteľa priamy dopad na jeho dôveryhodnosť, schopnosť motivovať žiakov, ako aj postarať sa o matematické talenty (ŠPÚ, 2019).

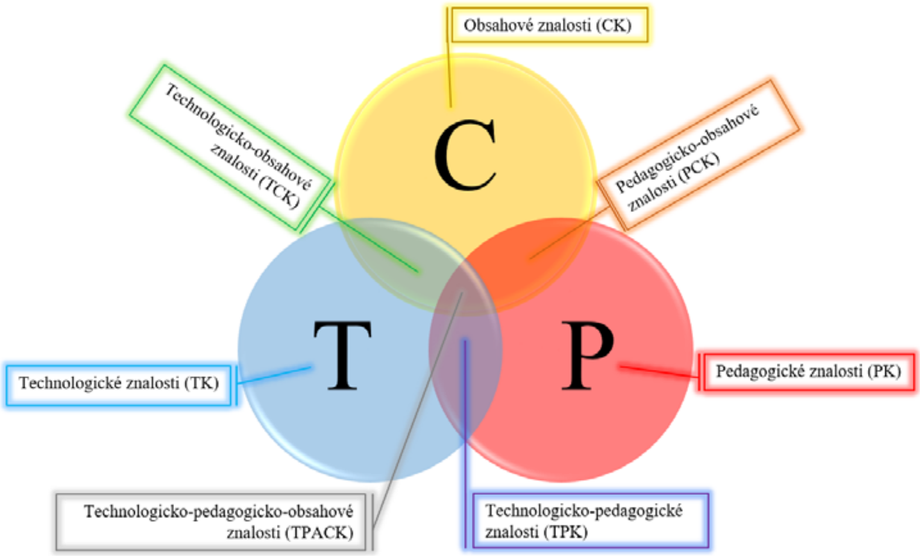
Samotný priebeh - realizácia vzdelávania vychádza z existujúceho portfólia všeobecných a špecifických pedagogických postupov, ktoré si budúci učiteľ v rámci pregraduálneho vzdelávania osvojuje na úrovni ich teoretického zvládnutia a možného aplikačného použitia v edukačnej praxi. Tým je vytváraná jeho druhá, laickou i odbornou verejnosťou očakávaná, pedagogická oblasť poznania.

Výber metód z portfólia učiteľa však súvisí nielen s predmetným vzdelávacím obsahom, ale taktiež aj s učiteľovi dostupnými digitálnymi technológiami, ktoré nielenže sám ovláda ale dokáže ich aj do výučby začleniť. Tie možno, pri takomto spôsobe vzdelávania, považovať za tretiu oblasť vplyvu. Konkrétna vzdelávacia aktivita, realizovaná učiteľom na hodine matematiky, je z tohto pohľadu kreovaná ako prienik znalostí učiteľa naprieč uvedenými oblasťami.

Z existujúcich rámcov konkretizujúcich prístupy začlenenia vybranej technológie do vzdelávania (Kaiser & Stender, 2013), sa v tomto príspevku zameriame na model TPACK, z ktorého budeme vychádzať aj pri popise nami spracovanej edukačnej aktivity.

2. Model TPACK

Model TPACK je založený na snahe efektívne integrovať technológie do vyučovacieho procesu zdôraznením prepojenia medzi sprístupňovaným obsahom, pedagogickým pôsobením a použitými technológiami (Harris, Mishra & Koehler, 2009). V tomto modeli (obr. 1) je možné Vénovym diagramom znázorniť nielen tri vzájomne sa ovplyvňujúce oblasti poznania učiteľa – znalosti obsahu (CK z ang. *content knowledge*), pedagogické znalosti (PK z ang. *pedagogical knowledge*) a technologické znalosti (TK z ang. *technological knowledge*) ale aj ich spoločné interakcie v podobe existujúcich prienikov.



Obrázok 1. Model TPACK a jeho znalostné komponenty
(zdroj: spracované podľa Harris, Mishra & Koehler, 2009)

Obsahové znalosti sú v tomto kontexte chápané ako systém poznatkov týkajúcich sa predmetu výučby, ktoré musí učiteľ obsiahnuť.

Pedagogické znalosti učiteľa sú tvorené znalosťami o stratégiách, technikách a metódach vyučovania, učenia sa a hodnotenia. Na ich základe dokáže učiteľ naplánovať, manažovať a vyhodnotiť priebeh edukačného procesu. Prienik týchto dvoch oblastí tvoria vedomosti o tom, ako efektívne zapojiť žiakov do získavania poznatkov v danej téme. Dovoľujú učiteľovi vo vzťahu ku žiakom diferencovať sprístupňovanie nových poznatkov a ich prepájanie s doterajšími poznatkami na jednotlivých úrovniach s ohľadom na individuálne potreby žiakov.

Technologické znalosti predstavujú znalosti učiteľa o tom, ako integrovať dostupné technológie do vzdelávania. Podľa už zmieňovaných autorov (Kaiser & Stender, 2013, Harris, Mishra & Koehler, 2009) je vhodné technologické znalosti chápať v procesuálnej podobe, teda ako požiadavku na porozumenie informáciám v dostatočnom rozsahu na to, aby ich učiteľ dokázal produktívne aplikovať vo svojej pedagogickej praxi s cieľom aktivizovať učenie študentov. Ich prienik s pedagogickými znalosťami dovoľuje učiteľovi identifikovať zmeny v učebných postupoch pri zaradení konkrétnych technológií do výučby a následne vyhodnotiť vzdelávacie kontexty, v ktorých žiaci dosahujú najlepšie výsledky. Prienik so znalosťami obsahu zahŕňa pochopenie spôsobu, akým je možné konkrétne technológie pri sprístupňovaní obsahu vzdelávania použiť a ako je obsah vzdelávania použitými technológiami spätne modifikovaný.

Výsledný prienik všetkých troch znalostných oblastí je podľa autorov (Harris, Mishra & Koehler, 2009) súhrnom odborných znalostí, ktoré technologicky a pedagogicky zdatní učitelia orientovaní na učebné osnovy používajú pri vyučovaní s cieľom ponúknuť žiakovi úspešné, diferencované a kontextovo citlivé učenie.

Model TPAC v sebe kumuluje poznatky, ako možno pomocou technológií zlepšiť výučbu s cieľom zvládnuť stanovený obsah vzdelávania. V nasledujúcich častiach budeme konkretizovať predovšetkým jednotlivé prieniky oblastí nami navrhnutej aktivity, ktorá bola otestovaná vo výučbe predmetu Digitálne technológie v matematickej edukácii patriaceho ho skupiny povinne voliteľných predmetov študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie v študijných programoch magisterského stupňa štúdia na Pedagogickej fakulte Prešovskej univerzity v Prešove.

2.1. Pedagogicko – obsahová oblasť poznania

Impulzom pre našu edukačnú aktivitu bola úloha nasledujúceho znenia (Novomeský, Križalkovič & Lečko, 1967, s. 115):

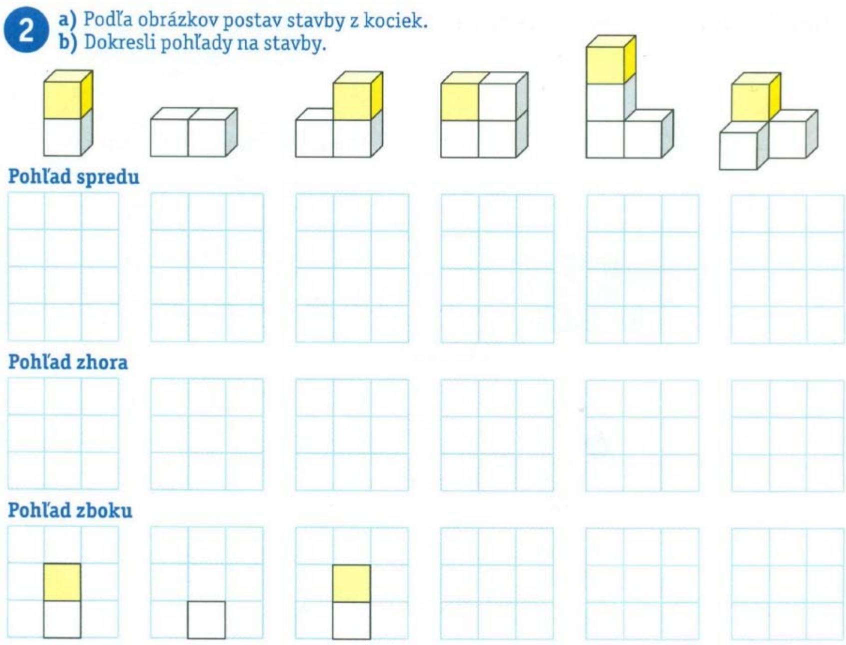
„Každý predmet sa dá nakresliť do troch priemetní: nárysne, pôdorysne a bokorysne. Je to veľmi dôležité najmä pri zostrojovaní rôznych súčiastok. Ako asi vyzerá teleso, ktorého obrys je v pôdoryse kruh, v bokoryse trojuholník a v náryse štvorec?“

Modifikáciou požiadavky identifikovať priemety telesa v úlohe môže byť napríklad aktualizácia činností, v ktorých je takáto potreba nevyhnutnosťou (projektovanie a dizajn, počítačové modelovanie s možnosťou 3D tlače a pod.). Budúci učiteľ na primárnom stupni vzdelávania sa s takouto potrebou stretáva priamo v praxi pri výučbe tém v tematickom okruhu Geometria a meranie s možným presahom do tematického okruhu Riešenie aplikačných úloh a úloh rozvíjajúcich špecifické matematické myslenie. Tu je pri zdôvodnení potreby vhodné vychádzať zo štátneho vzdelávacieho programu (ďalej len ŠVP). Podľa uvedeného obsahového štandardu pracuje už žiak na prvom stupni napríklad s pojmom plán stavby, ktorý je zavedený ako pôdorys stavby s vyznačeným počtom na sebe stojacich kociek (ŠPÚ, 2014).

Na podklade výkonového štandardu ŠVP sú do učebníc matematiky na primárnom stupni vzdelávania zaradzované úlohy typu:

- postav jednoduchú stavbu z kociek podľa vzoru (t. j. reálnej stavby z kociek) a podľa obrázka – 2. ročník ZŠ,
- postav stavbu z kociek na základe plánu a vytvor plán stavby z kociek podľa vzoru a podľa obrázka – 3. ročník ZŠ,
- vytvor a slovne opíš vlastnú stavbu z kociek, vytvor z kociek rôzne stavby podľa plánu, nakresli plán stavby z kociek – 4. ročník ZŠ.

Obrázok stavby pritom štandardne zobrazuje stavbu z kociek vo voľnom rovnobežnom premietaní alebo v pravouhlom premietaní do troch pohľadov (obr. 2).



Obrázok 2. Ukážka úlohy k stavbám z kociek v 2. ročníku ZŠ
(zdroj: Repáš & Janičiarová, 2018, s. 24)

Z pohľadu výberu vyučovacích metód by malo byť podľa kurikulárnych dokumentov učenie matematiky: „ ...pre žiakov zaujímavé, aby sa u nich formoval pozitívny vzťah k matematike a aby ju vnímali ako nástroj na riešenie problémových úloh každodenného života." (ŠPÚ, 2014, s. 3).

Impulznú úlohu je možné začleniť k úlohám vychádzajúcim z kontextu reálnej situácie so zakomponovanými matematickými konceptami. Podľa Kovalčíkovej a Prídavkovej (2021) je takúto úlohu možné považovať za štandardný stimulant dosahovania kognitívnych cieľov vo výučbe matematiky. Ak je zvolená úloha zároveň nositeľom vysokej variability vznikajúcich matematických situácií, dovoľuje učiteľovi vygenerovať celú skupinu úloh tzv. strapec úloh, ktorého charakteristickou črtou je prenositeľnosť stratégie riešenia z východzej matematickej situácie na obmenené úlohy v danom strapci (Kopka, 2010). V našom prípade je variabilita dosahovaná možnými modifikáciami tvarov obrysov jednotlivých priemetov telesa. Tie umožňujú variovať náročnosť úloh v jednom strapci v súlade s požiadavkami kladenými na žiakov v danej úrovni i naprieč viacerými úrovňami matematickej edukácie, a to od primárneho až po prvý stupeň vysokoškolského vzdelávania (Hnatová & Hnat, 2021).

Didaktická príprava zaradenia strapca modifikovaných úloh gradovanej náročnosti do výučby je pre učiteľa výzvou. Vychádzať môže z existujúceho portfólia vyučovacích metód, organizačných foriem, učebných pomôcok a dostupnej didaktickej techniky, ktoré selektuje na základe obsahového kontextu vzdelávania, špecifík cieľovej skupiny ako aj na základe svojej osobnej skúsenosti s ich aplikáciou do výučby matematiky.

Vychádzajúc z obsahového kontextu nami zvolenej matematickej úlohy je výstup zameraný na rozvoj priestorovej predstavivosti študentov s využitím individuálnych a skupinových činností spojených s výrobou a manipuláciou s modelom, ktorý môže, vďaka súčasnému stavu rozvoja digitálnych technológií, existovať ako v skutočnom, tak aj vo virtuálnom prostredí. Úloha bola najprv študentmi riešená bez využitia technológie rozšírenej reality (ang. *augmented reality*, skr. AR), tak následne aj s možným využitím digitálnych technológií (ďalej DT) dovoľujúcich zostrojiť trojrozmerný model telesa a zobraziť ho, v prípade potreby, s využitím technológie AR.

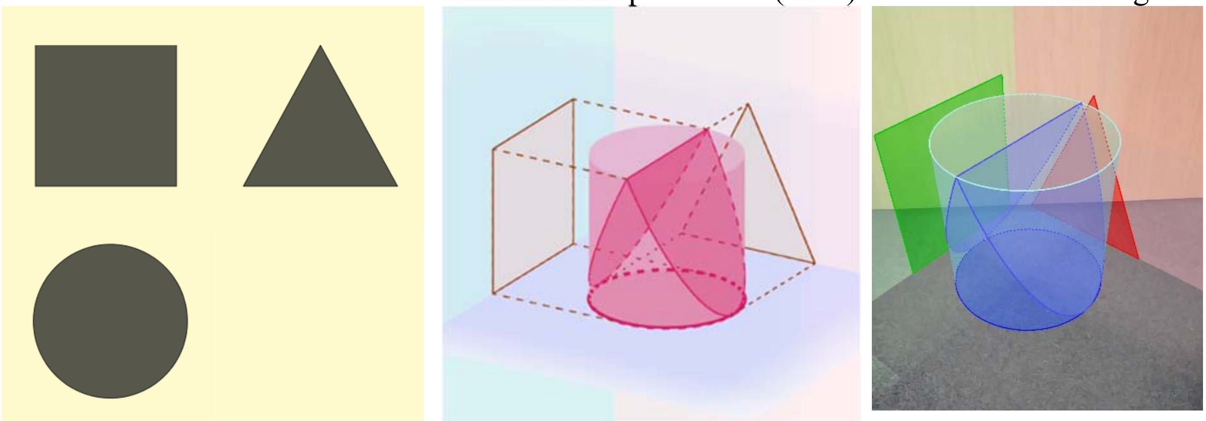
2.2. Technologicko-obsahová oblasť poznania

Začlenenie vybranej technológie do výučby na hodine matematiky môže, podľa našej skúsenosti, rozhodným spôsobom podporiť aktívne zapojenie žiakov do hľadania stratégie riešenia zvoleného matematického problému. Nakoľko zvolená úloha spadá do oblasti stereometrie a umožňuje použiť vizualizáciu telesa v podobe 3D modelu, výber vhodnej technológie je ovplyvnený požiadavkami zameranými na konštrukciu trojrozmerného modelu telesa pomocou špecializovaného softvéru. Ten by mal:

- byť bezproblémový z pohľadu inštalácie, vhodnej jazykovej mutácie, finančnej dostupnosti, podpory v podobe dostupnosti výučbových materiálov,
- disponovať priateľským užívateľským rozhraním s ponukou nástrojov umožňujúcich vytvárať trojrozmerné prezentácie tvarov a povrchov 3D modelov aspoň elementárnych telies (tzv. primitív).

Uvedené požiadavky na dostačujúcej úrovni spĺňa voľne dostupný softvér GeoGebra Classic 5, resp. 6 ako aj jedna z jeho online dostupných mobilných aplikácií - GeoGebra 3D (dostupná na https://www.geogebra.org/download). Ich pridanou hodnotou je dynamické prepojenie 3D konštrukcií s technológiou AR (obr. 3). Pri konštrukcii zadania v 2D zobrazení bol použitý spôsob zakresľovania pôdorysu, nárysu a bokorysu využívaný v technickom kreslení.

Zadanie (2D) | Konštrukcia telesa vo voľnom rovnobežnom premietaní (VRP) | Zobrazenie modelu telesa AR technológiou



Obrázok 3. Zadanie úlohy, vizualizácia jej riešenia vo VRP a v AR v programe GeoGebra

2.3. Technologicko – pedagogická oblasť poznania

Pedagogická činnosť učiteľa, zameraná na dosiahnutie stanovených edukačných cieľov v rámci zvolených aktivít, má priamy dopad na spôsob použitia vybraných digitálnych technológií. Núti učiteľa zamyslieť sa nad tým, ako sú ním samým v konkrétnej vzdelávacej aktivite technológie využívané, ale taktiež, ako budú v aktivite tieto technológie využívané jeho študentmi.

Rovnako digitálne technológie svojimi možnosťami spracovania informácií dokážu spätne ovplyvniť učiteľa nielen pri stanovovaní cieľov, ale taktiež ponúkajú príležitostí na obmieňanie metód a foriem práce napríklad so zámerom personalizovať vzdelávací proces.

Vychádzajúc z nášho projektu, ktorého cieľom je začlenenie technológie rozšírenej reality do profesijnej matematickej prípravy budúcich učiteľov elementaristov, sa v ďalšom popise možného využitia digitálnych technológií sústredíme viac na technológiu rozšírenej reality. Podľa viacerých autorov (Schutera et al., 2021) je rozšírená realita so svojimi možnosťami intuitívnej vizualizácie a interakcie, predurčená na využitie v edukácii, a to z viacerých dôvodov:

- dovoľuje prekrytie reality virtuálnymi objektami v reálnom čase, čím pohľad na reálny svet dopĺňa a obohacuje o ďalšie – inak pre študenta nedostupné informácie multimediálneho charakteru,
- podporuje zaradenie bádateľských a objaviteľských metód do výučby, pričom technológia AR umožňuje študentovi interagovať s virtuálnymi objektami a dovoľuje mu vložené 3D modely ovládať a skúmať,
- podporuje personalizovaný prístup k učeniu, nakoľko doteraz realizované výskumy poukazujú na zlepšenie porozumenia obsahu vzdelávania, dlhodobé uchovanie informácií v pamäti, dosahovanie profitu najmä pre študentov so slabými výsledkami (Radu, 2014, Freitas & Campos, 2008),
- je taktiež využiteľná aj v kolaboratívnych činnostiach, umožňuje spoluprácu, podporuje komunikáciu medzi učiteľom a študentmi i medzi študentmi navzájom (Freitas & Campos, 2008, Baumgartner, 2013),
- oproti ostatným technológiám umožňujúcim čiastočné alebo úplné ponorenie sa do virtuálneho sveta, je z hľadiska softvéru i hardvérového vybavenia dostupnejšia, a teda v škole ľahšie implementovateľná.

Výsledným prienikom všetkých troch znalostných oblastí učiteľa v rámci modelu TPAC je spracovanie konkrétnej edukačnej aktivity, ktorá demonštruje, ako možno zaradením DT (v našom prípade AR) modifikovať výučbu s cieľom naplniť stanovený obsah vzdelávania. V ďalšej časti popíšeme čiastkové výsledky dosiahnuté v skupine študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie pred a po zaradení AR technológie do pripravenej aktivity.

3. Prvotné skúsenosti z praxe

Do edukačnej aktivity bola zapojená skupina študentov 2. ročníka magisterského štúdia študijného odboru Učiteľstvo pre primárne vzdelávanie v rámci seminára k povinne voliteľnému predmetu Digitálne technológie v matematickej edukácii, ktorý bol kvôli covidovým opatreniam realizovaný dištančnou formou. V prvej fáze bolo študentom na online seminári sprístupnené modifikované znenie pôvodnej úlohy:

Každý predmet sa dá nakresliť do troch priemetní: nárysne, pôdorysne a bokorysne. S takouto požiadavkou sa stretávame v edukačnej praxi v primárnej edukácii pri výučbe tém v tematickom okruhu Geometria a meranie, ale aj pri práci s digitálnymi technológiami, napríklad pri 3D modelovaní.

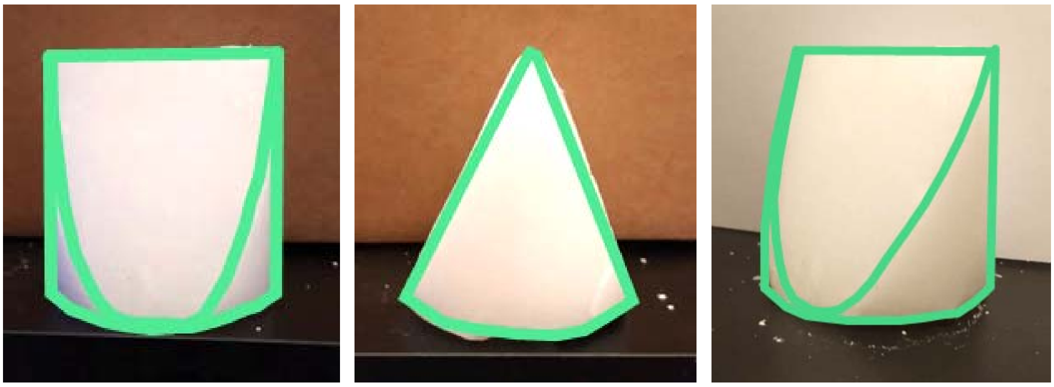
V tomto zadaní nás bude zaujímať, ako asi vyzerá teleso, ktorého obrys je v pôdoryse kruh, v bokoryse trojuholník a v náryse štvorec?

Modifikácia je badateľná vo formálnej úprave zdôvodnenia potreby riešenia úloh takéhoto typu bez zmeny matematického obsahu pôvodnej úlohy. Študenti mohli svoje riešenia spracovať akoukoľvek elektronickou formou a odovzdať do termínom ohraničeného zadania v kurze LMS Moodle. Zároveň bola v kurze ponúknutá možnosť doplniť riešenie komentárom ohľadom zvolenej stratégie riešenia. Účasť študentov bola postavená na báze dobrovoľnosti. Tá bola, v prípade korektného spracovania, ocenená bodovým benefitom v priebežnom hodnotení študenta v predmete. Po absolvovaní seminárov venovaných práci s programom GeoGebra, ktorý dovoľuje vytvárať 3D modely telies a zobrazovať ich technológiou AR, bolo študentom sprístupnené znenie obmenenej úlohy s opätovnou požiadavkou jej riešenia. Obmena spočívala v zámene tvarov obrysov v náryse a bokoryse hľadaného telesa. Aj v tomto prípade bola účasť študentov postavená na báze dobrovoľnosti s prípadným možným ziskom bodového benefitu v priebežnom hodnotení študenta.

Napriek ponúknutým bonusom sa 11 študentov (tj. 37,93 % z celkového počtu 29 študentov) do aktivity v žiadnej jej fáze nezapojilo a vypracovanie úloh do daného termínu neodovzdalo. Dôvody ich rozhodnutia zisťované neboli. Prekvapivým bola rôznorodosť formy i kvality obsahového spracovania výstupov zapojených študentov. Tie sme následne podrobili analýze profilu. Pre zvýšenie prehľadnosti budeme jednotlivé analyzované prípady pomenovávať náhodne vybranými menami študentov idúcimi v abecednom poradí.

Anna a Betka (tj. 2 študentky – 11,11 % z celkového počtu študentov zapojených aspoň do jednej fázy edukačnej aktivity) dospeli ku korektnému výslednému zobrazeniu hľadaného telesa už pred znalosťou práce s 3D. Je skutočnosťou, že obe pri hľadaní riešenia využili tvorbu reálneho 3D modelu. Anna, uvedomujúc si nedokonalosť vytvoreného modelu, doplnila jeho digitalizovanú podobu ďalšími informáciami v podobe farebného zvýraznenia hrán. Tento fakt uvádza aj v slovnom komentári k úlohe, v ktorom zdôvodňuje zvolený postup slovami:

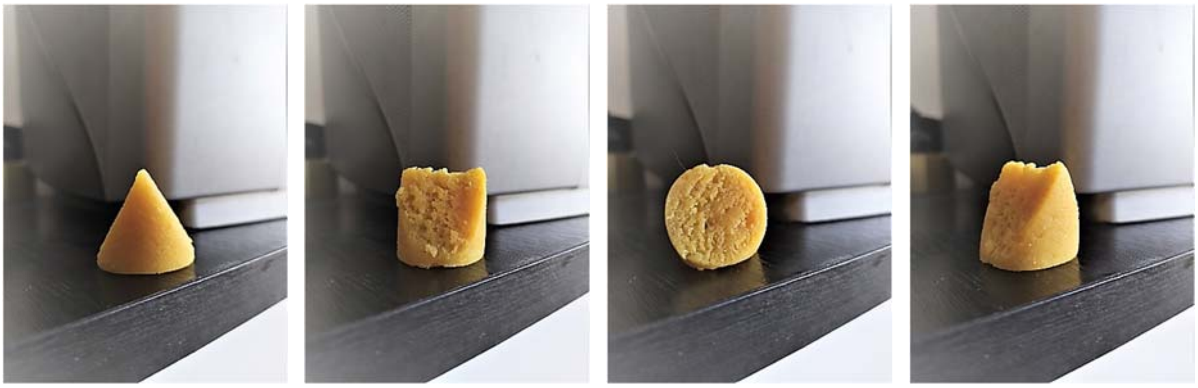
„*Ak je vrchná hrana telesa, výška telesa a priemer podstavy rovnakej dĺžky, tak je priemetom štvorec. Moje teleso je zrezaný valec, kde je rez od priemeru hornej podstavy valca vedený smerom k okraju dolnej podstavy na obidve strany, takže zboku smerom do rovnoramenného trojuholníka. Keďže to však neviem presne nakresliť a pri riešení bolo možné použiť ľubovoľný spôsob zobrazenia telesa, tak som použila sviečku, čo nebolo jednoduché, ale hádam to postačí :) nahrala som vypracovanie aj s náčrtmi pomocou fotiek.*“ (obr. 4).



Obrázok 4. Študentské riešenie úlohy prípad *Anna*

V citovanom zdôvodnení je jasne badateľný implikačný argumentačný prístup študentky k riešeniu úlohy. Rovnako spôsob vyjadrovania a používania terminológie svedčí o pochopení a orientovaní sa v riešenej problematike. Použitie digitálnych technológií, ktoré táto študentka pri riešení úlohy zvolila, má jednoznačne substitučný charakter. Svoju neznalosť konštrukcie rezu valca rovinou vyriešila tvorbou reálneho modelu. Po oboznámení sa so softvérovými možnosťami riešenia svojho problému použila v ďalšej úlohe rovnakú stratégiu riešenia pričom výslednú konštrukciu rezu prenechala softvéru.

Komentár druhej študentky Betky bol o dosť strohejší a bez snahy o korektné použitie odbornej matematickej terminológie v jeho popise: „*Vyskúšala som to na sójovej tyčinke. Tú som orezala a vyšiel mi taký klin. Len strany by mali byť hladšie a presnejšie.*“ (obr. 5), rovnako boli pomenované i vložené súbory (*klin1.jpg* až *klin4.jpg*).



Obrázok 5. Študentské riešenie úlohy prípad *Betka*

Faktom pozorovateľným z dokladovaného obrazového zdroja (obr. 5) je snaha študentky prezentovať zachovanie tvaru priemetov vytvoreného telesa a jeho modelovanie pomocou rezov valca. Podrobnejší popis postupu, ani zdôvodnenie jeho korektnosti však študentka v komentári neuvádza. Text v komentári svedčí buď o nedôslednosti študentky alebo o terminologických nedostatkoch v jej odbornom vyjadrovaní. Podobne ako Anna, i ona pri riešení modifikovanej úlohy siahla po riešení s využitím technológie AR, ktoré bolo realizované vhodným postupom a so žiadúcim výsledkom.

Iné korektné riešenia prvej úlohy študentmi odovzdané neboli. V riešeniach ďalších študentov bolo možné identifikovať viaceré miskoncepty, ktoré kategorizujeme do nasledujúcich skupín aj s uvedením ukážok výskytu v praxi.

- Nepochopenie zadania úlohy (2 študentky - 11,11 %)

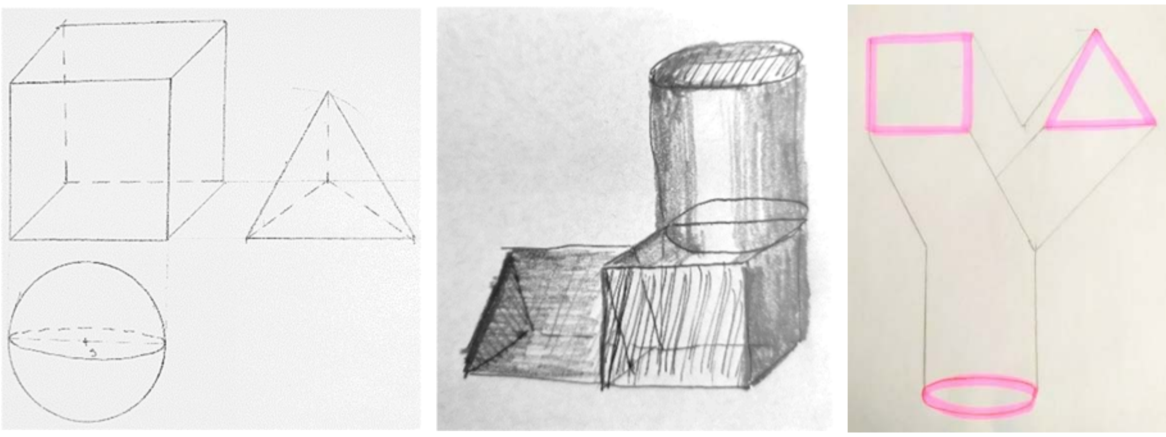
Študentka Celesta nehľadá jedno teleso s obrysmi daných tvarov v jeho priemetoch, ale ku každému priemetu nachádza jedno teleso, ktoré má vo všetkých svojich priemetoch obrys daného tvaru (obr. 6 vľavo). Študentka Dana miesto hľadania telesa popísala konštrukciu zadania t. j. štvorca, kružnice a chybne identifikovaného rovnostranného trojuholníka, pričom polohu týchto útvarov uvádza pomocou x-ových a y-ových súradníc jednotlivých vrcholov uholníkov a súradníc stredu kružnice.

Tieto chyby možno pripísať absencii čítania s porozumením (napr. zámena gramatických tvarov slova „teleso“ v jednotnom čísle a „súčiastok“ v množnom čísle) alebo vážnej neznalosti odbornej terminológie (identifikácie telies ako priestorových geometrických útvarov).

- Separátne chápanie zloženého telesa (3 študentky – 16,67 %)

Študentka Ela prezentuje ako hľadané riešenie zložené teleso, ktoré je vytvorené z troch telies - trojbokého hranola, kocky a valca. Po ich zložení do jedného celku však prestáva akceptovať tvar pôdorysu, nárysu a bokorysu výsledného telesa a zameriava sa len na jeho konkrétne „vyčnievajúce“ bázické časti (obr. 6 stred). Ďalšie riešenie sa od Elinho líši zámenou elementárnych telies v zloženom telese (polguľa miesto valca a trojboký ihlan miesto trojbokého hranola).

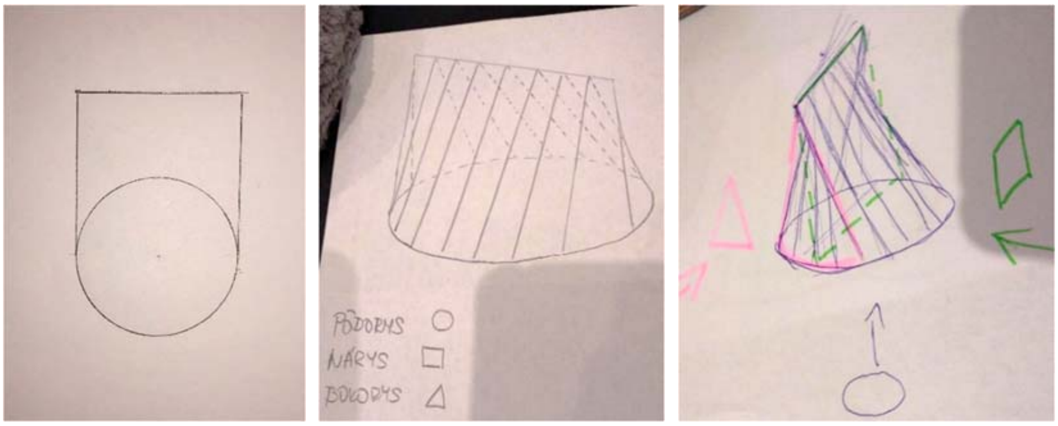
Študentka Filka chápe priemety telesa len ako otlačky vystupujúcich častí zloženého telesa (obr. 6 vpravo).



Obrázok 6. Chybné študentské riešenia úlohy – nepochopenie zadania (prípad *Celesta*), separátne chápanie zloženého telesa (prípady *Ela, Filka*)

- Intuitívne chápanie výsledného telesa bez schopnosti identifikovať existenciu, resp. tvar hrán telesa (5 študentiek – 27,78 %)

Študentky tejto skupiny dokázali správne identifikovať potrebu vychádzať pri hľadaní výsledného telesa z modelu valca. V rámci dosiahnutej úrovne priestorovej predstavivosti však zlyhávajú v načrtnutí korektného umiestnenia a tvaru hrán tohto telesa. V prípade vlastného náčrtu nie sú schopné posúdiť reálnosť existencie nimi načrtnutého telesa, resp. dodržanie tvarov jeho priemetov. Tento fakt možno demonštrovať napríklad neodkontrolovanou zmenou tvaru pôdorysu hľadaného telesa z požadovaného kruhu na n-uholník (obr. 7 stred a vpravo);

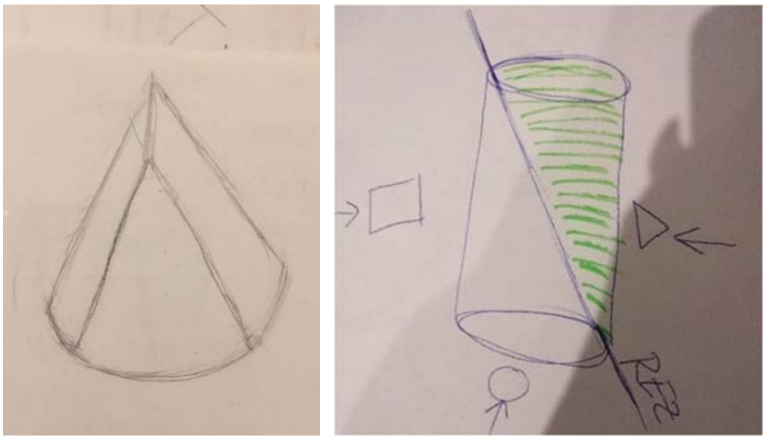


Obrázok 7. Chybné študentské riešenia úlohy – intuitívne modely telies

- Model telesa s konštrukčnou chybou (2 študentky – 11,11 %)

Do tejto kategórie miskonceptov sú zaradené výstupy dvoch študentiek prezentujúce náčrty telesa využívajúce rez valca jednou alebo dvoma rovinami rôznobežnými s podstavnou rovinou telesa, pri ktorom v riešeniach nebol zvládnutý náčrt rezu (obr. 8). Tento fakt svedčí o chýbajúcej skúsenosti študentiek s konkrétnymi modelmi rezov kužeľovej, resp. valcovej plochy.

Je zároveň potrebné uvedomiť si existujúce objektívne dôvody tohto stavu vychádzajúce z realizovanej redukcie obsahu učiva analytickej geometrie v stredoškolskej matematike. Téma kužeľosečiek nie je v súčasnosti obsiahnutá v ŠVP matematiky pre gymnázia so štvorročným alebo päťročným vzdelávacím programom (ŠPÚ, 2015), ani v cieľových požiadavkách na vedomosti a zručnosti, ktoré sú určené slovenským maturantom z matematiky (ŠPÚ, 2016).

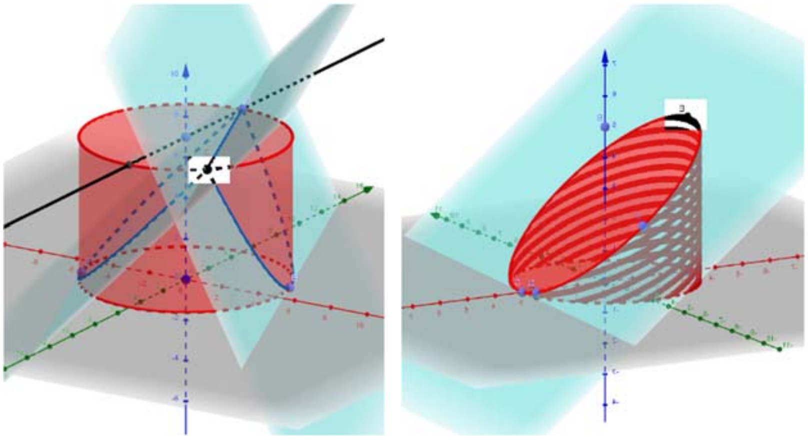


Obrázok 8. Ukážky chybných riešení úlohy s použitím rezu telesa

Kvôli úplnosti je tiež potrebné uviesť existujúce problémy s používaním odbornej matematickej terminológie, ktoré boli identifikované v komentároch študentov napríklad pri používaní pojmov: strana, hrana, stena, priemet a rez telesa (ukážka v komentári Betky).

Po absolvovaní seminárov venovaných práci s programom GeoGebra, ktorý dovoľuje vytvárať 3D konštrukcie a zobrazovať ich aj technológiou AR, bolo úlohou študentiek riešiť obmenu úlohy. Obmena spočívala v zámene tvarov nárysu a bokorysu hľadaného telesa. Konštrukciu spracovanú pomocou softvéru GeoGebra 3D v tomto prípade odovzdalo 18 z 21 študentiek prítomných na online seminári so 67,90% úspešnosťou jej vyriešenia.

Potešiteľné bolo, že aj všetky chybné riešenia, ktoré boli v tomto prípade identifikované, vychádzali z konštrukcie výsledného telesa pomocou rezu, resp. rezov valca. Ich realizácia však naďalej zlyhávala v dodržaní tvarov priemetov, resp. v korektnosti konštrukčného postupu. Umiestnenia bodov tvoriacich roviny rezov neboli totiž výsledkom konštrukčných krokov, skôr len odhadom miesta ich výskytu, čo potvrdila aj dynamická zmena vstupných údajov výkresov pri kontrole funkčnosti modelu (obr. 9).



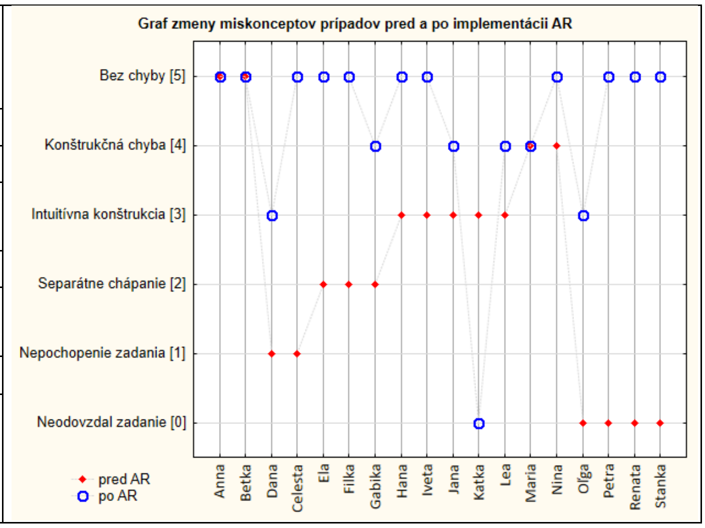
Obrázok 9. Ukážky chybných riešení úlohy s využitím 3D konštrukcie

4. Analýza prípadov

Nižšia početnosť študentov zapojených do aktivity a práca s dostupným výberom nám dovoľuje sledovať posun v chybovosti riešenia úloh v rámci uvedenej kategorizácie miskonceptov pred a po implementovaní technológie AR a to nielen sumárne, ale aj procesuálne s možnou konkretizáciou v jednotlivých skúmaných prípadoch (tab. 1).

Tabuľka 1. Absolútna početnosť výskytu miskonceptov pred a po implementácii AR do edukačnej aktivity

Kategórie miskonceptov [Kód]	Výskyt pred AR	Výskyt po AR
Neodovzdané zadanie [0]	4	1
Nepochopené zadanie [1]	2	0
Separované chápanie zloženého telesa [2]	3	0
Intuitívny model [3]	5	2
Model s chybou v konštrukcii [4]	2	4
Bez chyby [5]	2	11
Spolu	18	18



Z uvedených údajov zisťujeme, že v rámci edukačnej aktivity sa do riešenia úlohy po implementácii AR zapojil vyšší počet študentov než pred jej implementáciou (tab. 1, kategória [0]). Práca s novou technológiou síce jednu študentku odradila (tab. 1, graf - prípad Katka), avšak ďalšie štyri študentky motivovala k odovzdaniu zadania po implementácii AR do výučby (tab. 1, graf - prípady Oľga, Petra, Renáta a Stanka).

Študentky Anna a Betka, ktoré i bez použitia AR našli správne riešenie úlohy, zotrvali vo zvolenej stratégii riešenia s ochotou zameniť tvorbu reálneho modelu za tvorbu virtuálneho 3D modelu telesa. Pod vplyvom technológie teda nedošlo k nepriaznivej zmene počtu úspešných riešiteľov úloh, naopak z pôvodných dvoch prípadov pred implementáciou sa počet úspešných riešiteľov zvýšil na 11 študentov (tab. 1, kategória [5]). Toto navýšenie bolo sýtené predovšetkým zo skupín študentov, ktorí nepochopili zadanie úlohy, ich chápanie výsledného modelu bolo separátne alebo intuitívne.

Zo všetkých sledovaných prípadov len Mária zotrvala v identickej konštrukčnej chybe pri riešení úlohy pred i po implementácii AR do edukačnej aktivity. Oproti náčrtu (obr. 8 vpravo) však korigovala rozmery telesa v snahe dodržať požadovaný obrys tvarov priemetov (obr. 9 vpravo). Okrem uvedených prípadov došlo vo všetkých ostatných sledovaných prípadoch pod vplyvom technológie AR k posunu v riešiteľských stratégiách, ktorý vnímame pozitívne.

Z pohľadu zmien v početnosti jednotlivých miskonceptov sa najzaujímavejšou javí skupina študentov s intuitívnou predstavou výsledného telesa bez schopnosti identifikovať existenciu, resp. tvar hrán telesa. Z nej časť študentov bola schopná využiť zobrazenie telesa v rámci 3D/AR pre odstránenie miskonceptu (tab. 1, graf - prípady Hana a Iveta), časť študentov bola schopná posunúť sa k realizácii konštrukcie telesa, pri ktorej sa však dopustila konštrukčných chýb (tab. 1, graf - prípady Jana a Lea) a jedna študentka riešenie obmenenej úlohy neodovzdala (tab. 1, graf - prípad Katka).

Za dôležité taktiež považujeme konštatovanie, že AR technológia nie je nami považovaná za univerzálnu technológiu, ktorej použitie zaručuje odstránenie všetkých chybných krokov v riešiteľských stratégiách študentov či dosiahnutie absolútnej úspešnosti riešenia úlohy všetkými študentmi. Z predchádzajúcich zistení je však možné zamyslieť sa nad vplyvom AR technológie na zmenu miskonceptu v riešení študenta.

5. Zhrnutie a záver

Použitie modelu TPAC pri spracovaní nami uvedenej konkrétnej edukačnej aktivity so začlenením AR technológie do výučby sa javí ako prínosné. Analyzovanie vzdelávacieho obsahu, pedagogických znalostí a možnosti využitia dostupných digitálnych technológií má z pohľadu vyučujúceho pozitívny dopad predovšetkým na návrh didaktického konceptu edukačnej aktivity použiteľnej v rámci pregraduálnej prípravy študentov učiteľstva pre primárnu edukáciu.

Odozva študentov v implementovanej aktivite bola zaznamenaná:

- v oblasti záujmu o prácu s novými technológiami – relatívna početnosť zapojenia študentov do aktivity s využitím AR, za nezmenených podmienok zachovávajúcich dobrovoľnosť a bodový benefit, vzrástla zo 48,28 % na 62,07 % z celkového počtu študentov,
- vo zvýšení úspešnosti riešenia problémovej úlohy zameranej na rozvoj priestorovej predstavivosti z 11,11 % na 61,11 % z celkového počtu študentov.

Záverom je potrebné konštatovať, že uvedeným popisným zisteniam kvôli nízkej početnosti zapojených študentov zatiaľ chýba štatistická preukaznosť. Získané výsledky dosiahnuté začlenením technológie AR do výučby matematiky študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie však vytvárajú sľubnú platformu pre ich ďalšiu exploráciu.

Acknowledgements

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 036PU-4/2021 *Technológia rozšírenej reality v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov elementaristov* riešeného na PF PU v Prešove.

Literatúra

Baumgartner, P., & Herber, E. (2013). Höhere Lernqualität durch interaktive Medien? - Eine kritische Reflexion. *Erziehung & Unterricht*, (3-4), 327–335.

Freitas, R., & Campos, P. (2008). SMART: A System of Augmented Reality for Teaching 2nd Grade Students. In *Proceedings of the 22nd British HCI Group Annual Conference on People and Computers XXI: Culture, Creativity, Interaction* (s. 27–30). UK: Liverpool.

Harris, J., Mishra, P., & Koehler, M. (2009). Teachers' technological pedagogical content knowledge and learning activity types: curriculum-based technology integration reframed. *Journal of Research on Technology in Education*, 41(4), 393–416.

Hnatová, J., & Hnat, A. (2021). Matematický príbeh o mayskom kľúči s využitím AR In *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let*. (s. 1–10). Ústí nad Labem: UJEP.

Kaiser, G., & Stender P. (2013). Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. In *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (s. 277–293). Dordrecht: Springer.

Kopka, J. (2010). *Ako riešiť matematické problémy*. Ružomberok: VERBUM.

Kovalčíková, I., & Prídavková, A. 2021. Dynamická stimulácia učebných schopností žiaka prostredníctvom matematickej úlohy. In *Acta Paedagogicae.* Presoves – *Nova Sandes*, (s. 85–93). Prešov: Vydavateľstvo Prešovskej univerzity.

Novomeský, Š., Križalkovič, K., & Lečko, I. (1968). *Zábavná matematika 300+3 zábavných matematických úloh*. Bratislava: SPN.

Radu, I. (2014). Augmented reality in education: A meta-review and cross-media analysis. Pers. *Ubiquitous Comput*, 18, 1533–1543. https://doi.org/10.1007/s00779-013-0747-Y.

Repáš V., & Jančiarová, I.. (2018). Geometria pre 2. ročník ZŠ. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana.

Schutera, S. et al. (2021). On the Potential of Augmented Reality for Mathematics Teaching with the Application cleARmaths. *Education Sciences*, 11(8):368. https://doi.org/10.3390/educsci11080368.

ŠPÚ. (2014). *Štátny vzdelávací program pre 1. stupeň ZŠ. Matematika.* [online]. Bratislava: ŠPÚ. https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf.

ŠPÚ. (2015). *Štátny vzdelávací program pre gymnáziá. Matematika*. [online]. Bratislava: ŠPÚ. https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_g_4_5_r.pdf.

ŠPÚ. (2016). *Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky.* [online]. Bratislava: ŠPÚ. https://www.statpedu.sk/files/articles/nove_dokumenty/cielove-poziadavky-pre-mat-skusky/matematika.pdf.

ŠPÚ. (2019). *Koncepcia skvalitnenia matematického vzdelávania na základných a stredných školách v SR (návrh)*. [online]. Bratislava: ŠPÚ. https://digitalnakoalicia.sk/wp-content/uploads/2020/05/Koncepcia_vzdelavania_v_matematike_navrh_FINAL_2019.pdf.

Elementary Mathematics Education Journal *2022, Vol. 4, No. 1*
ISSN 2694-8133

WHAT IS A GEOMETRIC SHAPE? PRESCHOOL AND PRIMARY PRE-SERVICE TEACHER'S MISCONCEPTIONS

Jakub LIPTÁK
University of Presov, Faculty of Education (Slovakia)
jakub.liptak@unipo.sk

Abstract

The paper describes the results of an inquiry conducted on preschool and primary pre-service teachers in Slovakia. Pre-service teachers were given a test with a task to choose the odd one out of four planar figures and explain their choice. The paper focuses on one item with four geometric shapes: parallelogram, isosceles trapezoid, convex octagon, and concave octagon. All these figures have a line of symmetry but a parallelogram. The study investigated whether pre-service teachers could discriminate one non-symmetrical figure from axially symmetrical figures. Surprisingly, the findings revealed unexpected misconceptions of pre-service teachers concerning the comprehension of the term "geometric shape".

Keywords: pre-service teachers, planar shapes, misconceptions

1. Introduction

Geometry plays a significant role in mathematics education. Based on the *Principles and Standards for School Mathematics*, to study geometry means to learn about geometric shapes and structures and how to analyse their characteristics and relationships (NCTM 2000, p. 41). Geometry is an appropriate tool for higher-order thinking skills development, too, since it calls for discovering similarities between geometric shapes, consciously using logic properties such as transitivity or asymmetry (based on deductive cognitive process), proving properties and statements by experimenting and formal logic, using analogies and reasoning in solving problems, etc. Geometry also holds an unchangeable position within mathematics education due to its unique nature of abstract constructs visualisation. Therefore, geometric constructs may be used in mathematics education as iconic representations (based on Bruner's theory of learning modes), e.g., a rectangle for multiplication; a rectangle or circle for fractions; a line for representing numbers, addition, and subtraction; points for representing various items in the combinatoric tasks, etc.

Shapes are a substantial part of teaching and learning geometry. Usually, geometric shapes (or figures) are classified as two-dimensional or three-dimensional. From Euclidean geometry's point of view, two-dimensional shapes lie on a plane, so they have length and height. In contrast, three-dimensional shapes (also called solid shapes) have one more spatial characteristic – a width. We will further focus on two-dimensional figures.

Two-dimensional figures are studied by plane geometry. Learning about those figures relates to learning about the properties of their sides, angles, diagonals, heights, areas, and so on. The content for learning and teaching plane geometry in Slovakia is specified in the *National Educational Program* (National Institute for Education, n.d.), covering preschool through high school educational content and goals all students should reach. With a focus on two-dimensional shapes, Slovak pupils are becoming familiar with them since the preschool stage. They learn to identify, draw, and compose a picture of discs, squares, rectangles, and triangles. Later in primary school, pupils become familiar with polygons (in general) and circles. They should know to describe the properties of all these figures; distinguish one from another; scale squares and rectangles up and down (in a square grid); calculate a perimeter of a triangle, square, and rectangle; know what points do and do not belong to a particular figure, and so on. When they proceed to the lower secondary stage, they learn more parallelograms such as rhombus, rhomboid, and trapezoid. Also, specific types of triangles are introduced (right, acute, obtuse, equilateral, and isosceles), and they formally learn about an area of rectangle, square, and right triangle. During the higher secondary stage, pupils broaden their knowledge of two-dimensional shapes by using a coordinate system, solving problems involving trigonometry, proving the properties of planar shapes, and so on.

In our belief, learning the mentioned content is beneficial for thinking development. It is a prerequisite for not only students proceeding to study STEM college majors but also for any individual solving technically oriented real-life problems. Unfortunately, as it happens in many subjects and content areas, not all students thrive in learning about two-dimensional figures.

2. Misconceptions in the learning of geometry

One of many reasons for students struggling in plane geometry may be anchored in what their mental images of plane figures are. Tall & Vinner (1981, p. 152) define the mental image as “the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and process”. Suppose one’s mental image of a concept does not ally with its scientific meaning. In that case, we say they have built a misconception (according to the constructivist learning philosophy, see works of Piaget, Vygotsky, Bruner, Posner, etc.). The term misconception is closely related to the term preconception. Term preconception is equivalent to what Piaget (1952) calls a schema – an existing unit of knowledge. Schemas are under development, so they are never complete. They are formed by information about some construct, whereas the information has been processed through abstraction and generalisation in the learning process. As schemas, preconceptions are constantly reconstructed by integrating new information (Bertrand, 1998). In the learning process, a pupil’s preconception is the whole spectrum of knowledge they have about some construct before the construct is formally introduced by a teacher (Rumanová & Záhorská, 2019). Some of these preconceptions may be inadequate, not related to what is intended to learn, or missing important pieces of information. Thus, they are called misconceptions. Since no preconceptions are ideal, there is a thin line between what we call a preconception and misconception. From our perspective, misconceptions are the results of the intentional educational process. We call something a misconception if and only if students went through educational content and comprehended it, not as the instructor had hypothesised. Thus, the reason why a misconception has been formed may relate to an inadequate educational experience of the student (Abouelftouh & Alkramiti, 2020) that was created and delivered by an educator.

There were found many students’ misconceptions related to planar geometry. Research body shows that students might have difficulties both with defining and classifying geometric planar shapes (see, for example, Vinner, 1991; de Villiers, 1994; Currie & Pegg, 1998; de Villiers, 1998; Monaghan, 2000; Zaslavsky & Shir, 2005; Atebe & Schäfer, 2008; Kembitzky, 2009; Žilková, 2013), not excluding elementary school pre-service teachers (see Jones, Mooney & Harries, 2002; Pickreign, 2007; Fujita & Jones, 2007, Cunningham & Roberts, 2010; Hnatová & Mokriš, 2021). They might also have difficulties identifying a model of planar shapes. For instance, they might not recognise a square when its model is rotated such that its diagonals are in vertical and horizontal positions (Gunčaga, Tkačik & Žilková, 2017). This misconception occurs not only among primary school pupils but can persist in some students even to the secondary school stage (Rafiah & Ekawati, 2017). In another example, some pupils might overlook an important aspect when identifying rectangles – their vertices – and claim a shape that looks like a rectangle with arches instead of vertexes as a rectangle (Gunčaga, Tkačik & Žilková, 2017). Some elementary pre-service teachers may have a similar misconception. Particularly, Mokriš & Scholtzová (2016) discovered a misconception of incorrectly identifying a squircle as a square. Pre-service elementary teachers also tend to make mistakes when asked to recognise an element of a geometric shape, such as the height of a triangle, a circular sector, and so on (Hnatová & Mokriš, 2021). We hypothesise that some credit for such misconceptions may be given to teachers for going through a myriad of math concepts rather formally than paying attention to a couple of central ideas.

One way of dealing with misconceptions early on is regular assessment of students' mental images (Ketterlin-Geller & Yovanoff, 2009; Tóthová, 2014). There are more ways of identifying or diagnosing individuals' mental models (preconceptions, misconceptions). The primary methods are a qualitative diagnosis that focuses on identifying misconceptions, and a quantitative diagnosis that allows studying their frequency within a group of students, comparing various groups of students, focusing on changes and further course of building concepts (Doulík & Škoda, 2003; Štrauch & Hanč, 2017). To obtain data, instruments such as questioning students, interviews, tests, multiple-choice questionnaires with incorporated distractors, concept maps, and writing prompts may be used (Drake & Amspaugh, 1994; Masingila & Prus-Wisniowska, 1996; Morrison, 1999; Ketterlin-Geller & Yovanoff, 2009; Štrauch & Hanč, 2017).

3. Methodology

3.1. Aim and data collection

This study initially aimed to investigate pre-service preschool and primary teachers' ability to discriminate figures that are not axially symmetrical from axially symmetrical figures. To do so, we developed four items test where each item consists of four planar figures. Pre-service teachers were asked to choose the odd one out in each item, whereas axial symmetry was not mentioned. Three of these figures were axially symmetrical; the fourth one was not. Moreover, students had to explain their choice. We hypothesised that most students would remember and embrace the concept of axial symmetry when analysing and selecting an odd figure. The test was distributed to students in two forms: a paper form and an electronic form. This paper focuses on one of four items (see Fig. 1) that consists of (a) a parallelogram, (b) an isosceles trapezoid, (c) a concave equilateral octagon, and (d) a convex octagon with pairs of equilateral sides. Figures (b), (c), and (d) are axially symmetrical; figure (a) is not.

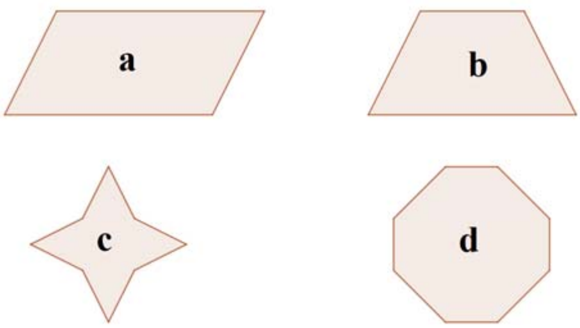


Figure 1. An item with three axially symmetrical plane figures (one is not axially symmetrical)

3.2. Participants

The group consisted of 66 preschool and primary school pre-service teachers in their first year of study in Slovakia. The group was consistent in all pre-service teachers studying at the same university. From the group, 22 participants filled out the paper test administrated by the author, and 44 completed the electronic test in their home environment. The electronic test was sent to 80 students, whereas 44 tests were filled and sent back. The paper test was administered in the classroom. The response rate of the electronic test was 55 %, and the response rate of the paper test was 100 %.

The participants were chosen based on cluster sampling, convenience sampling, and voluntary response sampling.

Participants had not gone through any geometry college courses then, although they took a Mathematical Literacy course in the previous semester in which they learned about some planar geometry concepts. None of the participants chose to pass the school-leaving exam from mathematics for upper secondary education. All 66 participants were girls, so there was no need to discuss potential differences in results based on gender. Due to missing answers, only 61 tests were examined (21 paper versions, 40 electronic versions) out of 66 submitted tests.

Participants' age inquiry was not conducted; participants' age average can be estimated as 19–20 years.

3.3. Data analysis

The received answers were transcribed into MS Excel, based on which eight meaning categories were created (see Chart 1). We used both quantitative and qualitative means to process and analyse the data.

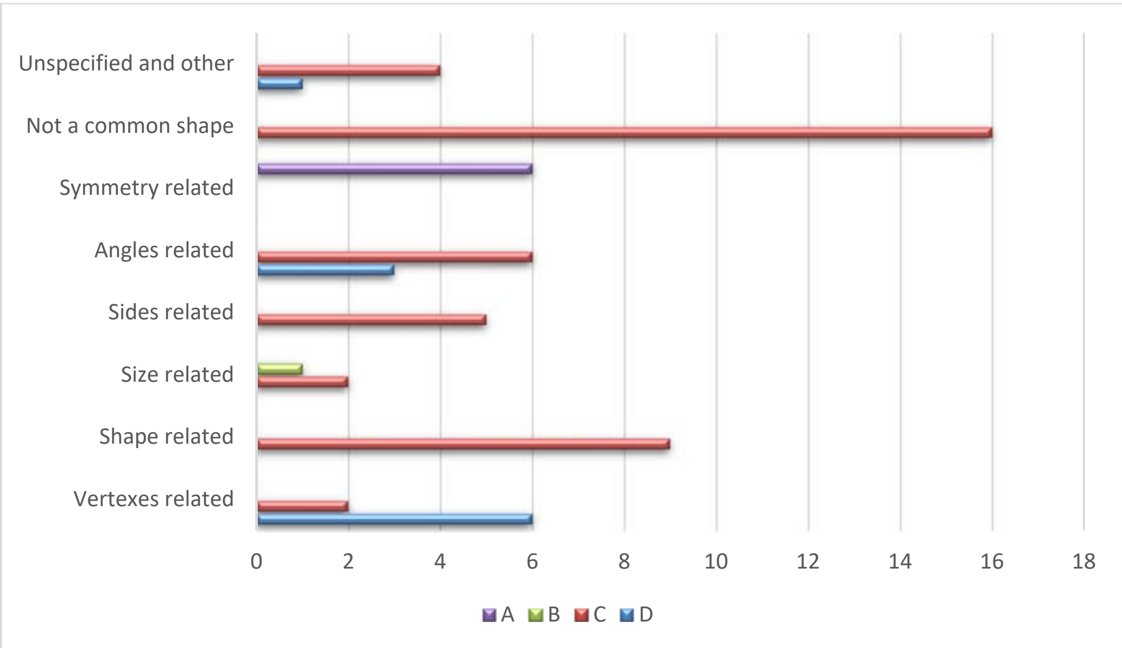


Chart 1. Visualisation of answers categorised into eight categories

We pursued a holistic approach in the data analysis process and focused on the most frequent responses. In the process of analysis, we further categorised answers from the category "not a common shape" into two subgroups: "not a common geometric shape" and "not a geometric shape" since it gives us interesting results for further discussion.

3.4. Findings

The results show a prevalence of answers in favour of figure C (73.8 %), whereas the least dominant were the answers in favour of figure B (1.6 %). All pre-service teachers who chose figure A (9.8 %) explained their choice related to symmetry. The most numerous group were students who chose figure C (26.2 %), whereas their choice was supported by the explanation "not being a common shape". Furthermore, 16.4 % of all students explained choosing figure C as "it is not a geometric shape at all". Hence, this choice appears to be the most frequent in the collected data set; our initial hypothesis was not approved.

Another obtained result points to the relatively mediocre level of willingness of students to spend their time participating in research inquiry, as 45 % of asked students did not return the test.

4. Discussion

The study aimed to determine whether the property of axial symmetry embodied in pictorial models of specific geometric shapes can be recognised by preschool and primary pre-service teachers at the beginning of their professional preparation. Even though the results showed that some students did observe this property and used it as a discriminative factor, we expected a more significant number of students. Based on obtained answers, we see potential downsides of the presented item that could steer students' attention another way.

1. Figure C is the only one that is concave.
2. None of figure C's sides is horizontal.
3. Exposed figures do not have an equal number of sides.
4. Figure D is the only one with all angles obtuse.
5. Figure C is not commonly presented to students in geometry courses.

The mentioned list results from qualitative analysis and can be used to improve the testing instrument in further research. Not only data to improve the test were obtained. The research results discovered the misconception of some preschool and primary school pre-service teachers centred on the concept of a *geometric shape*. The results imply that some students may think of a *geometric shape* only as some of those common shapes, such as triangles, parallelograms, circles, polygons, and so on. Thus, they understand a *geometric shape* as a general category that includes specific geometric shapes learned in school, excluding all shapes they are unfamiliar with; or that are not prototypical. This issue may be anchored in how educators discuss geometric shapes with pupils through the pure systematisation of geometric shapes without pointing to what is and is not a geometric shape. To be clear, the classification of geometric shapes plays an essential role in learning about specific shapes (Elia & Gagatsis, 2003) and is beneficial for proving and inferencing properties from more general shapes, such as parallelograms, to more particular shapes, such as squares (Fujita & Jones, 2007).

We assume that discussing only typical geometric shapes in the classroom without mentioning some non-prototypical shapes does not follow the learning principle and the necessity of conceptual learning (NCTM, 2000, p. 20). Reasonably, school mathematics must be centred on central ideas and concepts that learners are likely to face in the future. Another argument might be related to time constraints, and thus that learning "non-curricular" content may prevent mathematics teachers from spending time discussing content specified in curriculum standards. Nevertheless, lesson structure depends on the educator, too; a few minor instructions or activities on deepening conceptual understanding of a *geometric shape* should not cause any harm either to learners or the run of the math course. Finally, we suggest that students should be acquainted at some level with what is and what is not a geometric shape.

This brings us to the heart of the problem: the definition of a *two-dimensional geometric shape*. Mathematics textbooks usually do not define what *geometric shape* means. Instead, this term is introduced through concrete types of geometric shapes such as lines, triangles, squares, rectangles, quadrilaterals, and so on. Scanning various math textbooks, we did not find any precise definition of geometric shape or non-model of a geometric shape (geometric figure). Euclid, in his work *Elements*, defines a figure as something "which is contained by some boundary or boundaries", whereas "a boundary is that which is the extremity of something" and "the extremities of a surface are lines" (Fitzpatrick, 2008, p. 6). A different transcription of Euclid's *Elements* says that "a figure is a surface enclosed on all sides by a line or lines" whereas "a line is length without breadth" (Byrne 1847, p. XVIII-XIX). Since those two transcriptions of Euclid's work do not specify whether these lines are straight or curved (despite he deals in his work with the term *straight line*), both types can be accepted. Thus, two-dimensional figures can be defined as an area closed by its boundary, whereas the boundary may consist of a combination of curves and straight lines. There is also a different way of defining a *figure* that uses a topological approach. Based on this approach, the interior points, boundary points, and exterior points of a figure can be defined as follows (Medek, Mišík & Šalát, 1975):

- point $X \in E_2$ is called an interior point of figure F if there exists a ball centred at the point X, that lies entirely in figure F,
- point $X \in E_2$ is called an exterior point of figure F if there exists a ball centred at the point X, that has an empty intersection with figure F,
- point $X \in E_2$ is called a boundary point of figure F if any ball centred at the point X, consists of both interiors and exterior points of figure F.

Either of these two definitions may be included in learning about geometric shapes, depending on the current level of students' cognitive development. Moreover, besides the importance of introducing the *planar shape* definition, it is essential to engage students in relevant activities. Thus, we suggest following instructions.

1. Draw a few arbitrary planar shapes that have 4 sides each. Compare your shapes with your classmate. What shapes do you have in common? What shapes are unique? How could we name such a shape?
2. There are three planar shapes in the picture. Write down all properties of those shapes you can think of. Put yourselves in groups and summarise your ideas.
3. There is a list of properties one planar shape should have. Use those properties to draw the corresponding shape. How many different shapes can you draw?

The mentioned instructions are quite general and not finite. They are supposed to serve rather as an inspiration than the limited list of possibilities for a math teacher.

5. Conclusion

Starting in preschool, shapes are discussed as common features of real objects that people can observe, touch, and model. They can be effortlessly compared to each other to determine how similar or different they are (Morgenstern et al., 2021). Young pupils should be confronted with shapes in activities where they must observe and describe various shapes. Based on that, pupils start noticing the properties of those shapes. Learning about geometric shapes, their properties, and general logic properties in learning geometry can occur through activities such as combining or cutting apart shapes for a new shape (NCTM, 2000, p. 98). If geometric content is taught inappropriately, students' mental models may differ from the scientific meaning in some essential attributes.

The study was conducted on novice preschool and primary pre-service teachers. Thus, their educational background differs from case to case. The survey results revealed unexpected students' misconceptions about the term *geometric shape*. Notably, some students may think of geometric shapes as just as common shapes they are typically learning about. We believe that the source of this misconception is an extreme accent on common shapes' hierarchisation (e. g., parallelograms, squares, triangles …) without discussing those shapes that do not fit into any of the shapes' categories.

The result of the study shows the need for inquiry about pre-service teachers' conceptions. Just as many other study results (e. g. Bulut & Bulut, 2012; Molitoris Miller, 2018), systematic inquiry serves as a basis for the revision of relevant mathematics courses within teacher preparation programs. We suggest that students should be confronted with more than just the "typical" hierarchy of two-dimensional geometric shapes.

References

Abouelftouh, D., & Alkramiti, M. (2020). Misconceptions of Mathematics and Its Relationship to The Learning Pleasure among Elementary School Students in Saudi Arabia. *Elementary Education Online*, 19 (4), 303–321. doi:10.17051/ilkonline.2020.04.131.

Atebe, H. U., & Schäfer, M. (2008). "As soon as the four sides are all equal, then the angles must be 90° each". Children's misconceptions in geometry. *African Journal Of Research In Mathematics, Science And Technology Education*, *12*(2), 47–65. https://doi.org/10.1080/10288457.2008.10740634.

Bertrand Y. (1998). Soudobé teorie vzdělávání. Praha: Portál.

Bulut, N., & Bulut, M. (2012). Development of Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Geometric Thinking Levels Through an Undergraduate Geometry Course. *Procedia - Social And Behavioral Sciences*, *46*, 760–763. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.05.194.

Byrne, O. (1847). The First Six Books of the Elements of Euclid with Coloured Diagrams and Symbols. London: William Pickering. https://www.math.uci.edu/~ndonalds/Elements-I-VI.pdf.

Cunningham, R. F., & Roberts, A. (2010). Reducing the mismatch of geometry concept definitions and concept images held by pre-service teachers. *IUMPST: The Journal. Vol 1 (Content Knowledge)*. http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/1.contentknowledge/cunningham01/article.pdf.

Currie, P., & Pegg, J. (1998). Investigating students understanding of the relationships among quadrilaterals. In: C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), *Teaching Mathematics in New Times, Proceedings of the 21th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated, Gold Coast, Australia 5 – 8 July*, Volume 1, (p. 177–184). https://www.merga.net.au/Public/Publications/Annual_Conference_Proceedings/1998_MERGA_CP.aspx.

de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11−18. https://flm-journal.org/Articles/58360C6934555B2AC78983AE5FE21.pdf.

de Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In: A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, (pp. 248−255). http://academic.sun.ac.za/mathed/174/MichaelDefining.pdf.

Doulík, P., & Škoda, J. (2003). Tvorba a ověření nástrojů kvantitativní diagnostiky prekonceptu a možnosti jejího vyhodnocení. *Pedagogika*, 53(2), 177−189. https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?attachment_id=1917&edmc=1917.

Drake, B. M., & Amspaugh, L. B. (1994). What Writing Reveals in Mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 16(3), 43−50.

Elia, I., & Gagatsis, A. (2003). Young children's understanding of geometric shapes: The role of geometric models: The role of geometric models. *European Early Childhood Education Research Journal*, *11*(2), 43−61. https://doi.org/10.1080/13502930385209161.

Fitzpatrick, R. (2008). *Euclid's Elements of Geometry - The Greek text of J. L. Heiberg (1883−1885)*. https://farside.ph.utexas.edu/books/Euclid/Elements.pdf.

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1&2), 3−20. https://doi.org/10.1080/14794800008520167.

Gunčaga, J., Tkačik, Š., & Žilková, K. (2017). Understanding of Selected Geometric Concepts by Pupils of Pre-Primary and Primary Level Education. *European Journal of Contemporary Education*, 6(3), 497−515. https://doi.org/10.13187/ejced.2017.3.497.

Hnatová, J., & Mokriš, M. (2021). *Kalibrácia metakognitívneho monitorovania v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov: Presnosť a skreslenie hodnotenia*. Prešov: Vydavateľstvo Prešovskej univerzity.

Jones, K., Mooney, C., & Harries, T. (2002). Trainee primary teachers' knowledge of geometry for teaching. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 22(2), 95−100.

Kembitzky, K. A. (2009). *Addressing Misconceptions in Geometry through Written Error Analyses*. [Doctoral dissertation, The Ohio State University]. https://etd.ohiolink.edu/apexprod/rws_etd/send_file/send?accession=osu1259169709&disposition=inline.

Ketterlin-Geller, L. R., & Yovanoff, P. (2009). Diagnostic assessments in mathematics to support instructional decision making. *Practical Assessment, Research and Evaluation*, 14(16), https://doi.org/10.7275/vxrk-3190.

Masingila, J., & Prus-Wisniowska, E. (1996). Developing and assessing mathematical understanding in calculus through writing. In: P. Elliot, & M. Kenney (Eds.), *National Council of Teachers of Mathematics 1996 yearbook: Communication in mathematics, K-12 and beyond* (pp. 95−104): Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Medek, V., Mišík, L., & Šalát, T. (1983). *Repetitórium stredoškolskej matematiky, 3. vydanie*. Bratislava: Alfa.

Mokriš, M., & Scholtzová, I. (2016). Miskoncepcie v identifikácii rovinných geometrických útvarov u budúcich učiteľov-elementaristov. *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae: Universitatis Catholicae in Ružomberok*. Ružomberok, (pp. 141−146).

Molitoris Miller, S. (2018). An analysis of the form and content of quadrilateral definitions composed by novice pre-service teachers. *The Journal Of Mathematical Behavior*, *50*, 142−154. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.02.006.

Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children views of the difference between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 179–196. https://doi.org/10.1023/A:1004175020394.

Morgenstern Y, Hartmann F, Schmidt F, Tiedemann H, Prokott E, Maiello G, & Fleming, R. W. (2021). An image-computable model of human visual shape similarity. *PLoS Comput Biol* 17(6): e1008981. https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1008981.

Morrison, J. A. (1999). *Investigating Teachers' Understanding and Diagnosis of Students' Preconceptions in the Secondary Science Classroom*. [Doctoral thesis, Oregon State University]. https://ir.library.oregonstate.edu/downloads/vq27zr61k.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/.

National Institute for Education. (n. d.). *National Educational Program.* Retrieved June 20, 2022. https://www.statpedu.sk/sk/svp/inovovany-statny-vzdelavaci-program/.

Piaget, J., & Cook, M. T. (1952). *The origins of intelligence in children*. New York, NY: International University Press.

Pickreign, J. (2007). Rectangle and rhombi: how well do pre-service teachers know them? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, Volume 1: Content Knowledge. http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/1.contentknowledge/pickreign01/article.pdf.

Rafiah, H., & Ekawati, A. (2017). Misconceptions of the Students with High Mathematical Creative Thinking Level in Solving the Geometric Shapes Problems. In: *Proceedings of the 5th SEA-DR (South East Asia Development Research) International Conference 2017 (SEADRIC 2017)*, (pp. 155−158). https://doi.org/10.2991/seadric-17.2017.33.

Rumanová, L., & Záhorská, J. (2019). Chyby v riešeniach vybraných úloh z geometrie. *Acta Mathematica Nitriensia*, 5(1), 23-29. http://www.amn.fpv.ukf.sk/papers/amn_5_2/3_Rumanova_AMN_vol_5_no_2_2019.pdf.

Štrauch, P., & Hanč, J. (2017). Kvantitatívna diagnostika miskoncepcií v prírodovednom vzdelávaní. *Edukácia*, 2(1), 291−302. https://www.upjs.sk/public/media/15903/Strauch_Hanc.pdf.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151−169.

Tóthová, R. (2014). *Konštruktivistický prístup vo výučbe ako možnosť rozvoja myslenia žiakov*. Bratislava: Metodicko-pedagogické centrum. https://mpc-edu.sk/sites/default/files/projekty/vystup/tothova.pdf.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, in: D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317−346.

Žilková, K. (2013). *Teória a prax geometrických manipulácií v primárnom vzdelávaní*. Praha: Powerprint.

SOUVISLOST MEZI MATEMATICKÝM NADÁNÍM A ÚSPĚŠNOSTÍ VE ŠKOLNÍ MATEMATICE

Jitka PANÁČOVÁ, Irena BUDÍNOVÁ
Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
panacova@ped.muni.cz, budinova@ped.muni.cz

Abstrakt

Příspěvek je zaměřen na vzdělávání nadaných žáků v matematice. Ve stručnosti teoreticky pojednává o vzdělávání žáků nadaných na matematiku a případných rizicích v jejich vzdělávání. Vybraná případová studie je zaměřena na žáka, který se před vstupem do základního vzdělávání jevil jako nadaný na matematiku, ale ve školním prostředí zůstalo jeho nadání skryto. Případová studie je součástí dlouhodobého výzkumného šetření zabývajícího se různými typy nadaných žáků a jejich problémy ve výuce.

Klíčová slova: nadaní žáci, matematické nadání, matematická úloha, řešitelské strategie

CONTEXT BETWEEN MATHEMATICAL GIFT AND SUCCESS IN SCHOOL MATHEMATICS

Abstract

The paper focuses on the education of gifted students in mathematics. In short, it theoretically discusses their education and possible risks in their education. The selected case study is focused on a pupil who seemed gifted in mathematics before entering primary education, but his talents remained hidden in the school environment. The case study is part of a long-term research investigation dealing with different types of gifted students and their problems in education.

Keywords: gifted students, mathematical talent, mathematical problem, solving strategies

1. Úvod

V posledních letech je věnována zvýšená pozornost vzdělávání nadaných žáků. Ve školním prostředí tráví žáci podstatnou část svého dne a mělo by být žádoucí, aby se zde setkali s dostatečnou pozorností, která by přispěla k pozitivnímu rozvoji jejich nadání. Pozná však učitel vždy nadaného žáka? Vzhledem k tomu, že nadaný žák je všeobecně často stále vnímán jako „ten šikovný“, může to snadno vést k představě, že ve škole je nadaný žák lehce rozpoznatelný. S tímto přístupem jde přeci o žáka, kterého baví matematika, podává v ní skvělé výkony, nemá s ničím problémy, úlohy řeší bezchybně a rychle se učí. Realita související s identifikací nadaných žáků ve školním prostředí však vykazuje značný rozpor s tímto všeobecným mýtem. Dokladem toho je níže popsaná případová studie žáka, na které ilustrujeme skutečnou obtížnost identifikace nadaných žáků z rizikových skupin ve školním prostředí.

2. Nadaní žáci a jejich klasifikace

Pojem intelektového nadání byl historicky vymezen z několika různých hledisek a existuje řada rozdílných přístupů k jeho definici. Z celé této nabídky zmíníme alespoň pohled Hříbkové (2009), která shledává dva protichůdné přístupy k nadání, přičemž oba mají své opodstatnění. Hříbková (2009) uvádí, že nadání je možno chápat jako *projev nadprůměrného výkonu* nebo jako *potenciál podávat nadprůměrný výkon*. Pokud na nadání nahlížíme jako na projev nadprůměrného výkonu, vnímáme ho jako potenciál rozvinutý pílí a získáváním potřebných znalostí a zkušeností. V případě nadání jakožto potenciálu podávat nadprůměrný výkon je toto vnímáno jako něco, co bylo jedinci „sesláno shůry" či „dáno do vínku", ale nemusí být v průběhu jeho života rozvinuto v něco hodnotného.

Existuje řada různých typů nadaných žáků, přičemž žáky z některých skupin bývá obtížné ve školním prostředí identifikovat jako nadané. Pro porozumění této disharmonii představíme klasifikaci nadaných žáků provedenou Georgem Bettsem a Maureen Neihartovou (1988), kteří zavedli šest *profilů nadaných žáků*:

- *Úspěšní žáci*, kteří jsou oblíbení u učitelů, obdivovaní spolužáky i rodiči; mají excelentní výsledky ve škole a jsou často vytipováni učiteli; tito žáci, jakož i žáci z dalších profilů, se ve škole snadno začnou nudit.
- *Autonomní žáci*, kteří jsou obdivováni pro své schopnosti, jsou vnímáni jako ti, kteří uspějí; mají dobré sebevědomí, vysokou vnitřní motivaci; mívají dobré známky.
- *Skrývači nadání* („underground gifted"), kteří působí tiše a ostýchavě, jako málo odolní a přecitlivělí, jsou vnímáni jako úspěšní průměrní; nejsou si jisti sami sebou, mají nízké sebevědomí; ve škole nebývají identifikováni.
- *Defenzivní odpadlíci*, kteří jsou vnímáni jako neposlušní, nepřijímají je dospělí ani vrstevníci; jsou stále v opozici, mají na vše vztek; objevuje se u nich nesoulad mezi inteligencí a školními výsledky, jsou vynikající v mimoškolních aktivitách.
- *Provokatéři* (kreativní rebelové), kteří mívají problémy s disciplínou, působí jako iritující; ve škole se rychle začnou nudit, jsou netrpěliví, často v opozici, mají nízké sebevědomí; ve škole nebývají identifikováni.
- *Žáci s dvojí výjimečností* (nadaní žáci s fyzickým hendikepem či s poruchou učení). Do této skupiny patří nadaní žáci s poruchou učení, nejčastěji dyslexií, nadaní žáci s Aspergerovým syndromem – poruchou autistického spektra, nadaní žáci s poruchou pozornosti (ADD) či hyperaktivitou (ADHD) aj., kteří bývají vnímáni jako divní a hloupí, ostatní žáci se jim vyhýbají; nedokážou reagovat na požadavky učitele, jsou frustrovaní, mají nízké sebevědomí, nechápou příčiny svých těžkostí; potřebují velkou podporu.

Dá se předpokládat, že dle klasifikace Bettse & Neihartové (1988) bývá v prostředí školy rozpoznáno nadání žáků v případě profilu úspěšného či autonomního žáka. Žáci z ostatních profilů jsou rizikoví a k identifikaci jejich nadání z jejich školních výkonů většinou často nedojde. Důvodem bývá rozpor mezi vnímáním nadání a jeho projevů a skutečnými projevy žáka. V dalším textu představíme jeden zajímavý případ žáka nadaného na matematiku, u něhož k rozpoznání talentu v rámci školního prostředí nedošlo.

3. Případová studie žáka 5. ročníku ZŠ, který se jeví jako nadaný na matematiku

Tato část příspěvku zpracovává případovou studii žáka 5. ročníku, který se jeví jako velmi nadaný na matematiku, ale neabsolvoval odbornou identifikaci tohoto nadání v pedagogicko-psychologické poradně (PPP).

Adam (jméno je smyšlené) byl již jako předškolák velmi zvídavé, hloubavé dítě, které vykazovalo nezvyklou trpělivost při činnostech, jež ho zajímaly. Už jako malý dbal na pořádek a svoje činnosti konal s precizností. Rodiče i učitelky u Adama v jeho předškolním období shledaly, že je „napřed" v porovnání s jeho vrstevníky v mnohých oblastech. Před nástupem do školy uměl číst a psát, a zvláště jeho matematické schopnosti se jevily mimořádné. V pěti letech se orientoval v čase, poznal, kolik je hodin, hrál šachy, počítal do tisíce, dokázal sčítat a odčítat přirozená čísla do 100. Odvodil si sám násobení jako opakované sčítání, tj. $7 \cdot 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 56$. Po rodičích vyžadoval stále příklady tohoto typu, přičemž při jejich řešení se u něj projevovaly dobře vytvořené představy o číselné řadě, uspořádání v množině přirozených čísel, zákonitosti operací sčítání, odčítání a násobení přirozených čísel. Při řešení různých úloh pak funkčně používal vlastnosti těchto operací. Kromě této počtářské záliby měl velký zájem o vesmír a zeměpisnou tématiku, ve kterých vynikal svými encyklopedickými znalostmi.

Z uvedených důvodů nastoupil do 1. ročníku o rok dříve. Z pedagogicko-psychologické poradny dostal k dřívějšímu nástupu do školy doporučení s potvrzujícími údaji, že se jedná ve všech oblastech o mírně nadprůměrného žáka, v matematice o vysoce nadprůměrného.

Dle očekávání rodičů nebyl pro Adama po jeho nástupu do 1. ročníku žádný školní předmět problém. Až do 5. ročníku výborně prospíval ve všech předmětech. Z rozhovoru, který lektorka vedla s Adamovými rodiči, vyplynulo, že s nástupem do školy však jeho dřívější velký zájem o matematiku jako mimoškolní aktivitu najednou zcela upadl do pozadí. Tytam byly jeho aktivity spojené s počtářstvím, Adam se v tomto období začal aktivně věnovat sportu a ze zájmových činností u něj převažovaly dále vesmír a zeměpisná tématika. Dostával sice stále pouze jedničky z matematiky, ale vnitřní motivace rozvíjet se dále v matematické oblasti jako dříve v předškolním věku se vytratila.

Adamovi rodiče tuto skutečnost komentovali tak, že se u něj situace spojená s nadšeným počtářstvím „ustálila" ve chvíli, kdy začal chodit do školy. Zapadl prý rychle mezi ostatní žáky a nevyčníval zdaleka tolik jako ve školce. Rodiče tedy ani neměli motivaci s ním navštívit pedagogicko-psychologickou poradnu, kde by bylo jeho matematické nadání odborníky oficiálně potvrzeno. Ani Adamova učitelka je k tomu nijak nenabádala, na třídních schůzkách se vždy na dotaz rodičů pouze vyjádřila ve smyslu, že s Adamem nemá problém a že je u něj vše v pořádku. Podle rodičů snad nezaregistrovala jeho matematický talent a možná ani nevěděla, jakou Adam vykazoval výjimečnost v počtech v předškolním věku. Adam sice byl vždy první v počítání příkladů, ale protože v klidu trpělivě seděl, čekal na ostatní, a hlavně nikoho nerušil, tak nebyla nucena mu toto čekání zkrátit předem připravenými zajímavými matematickými či logickými úlohami, které by jistě rád řešil. Ani poté, co byl Adam úspěšný v řadě kategorií Matematického klokana, se paní učitelce nejevil jako nadaný v matematice.

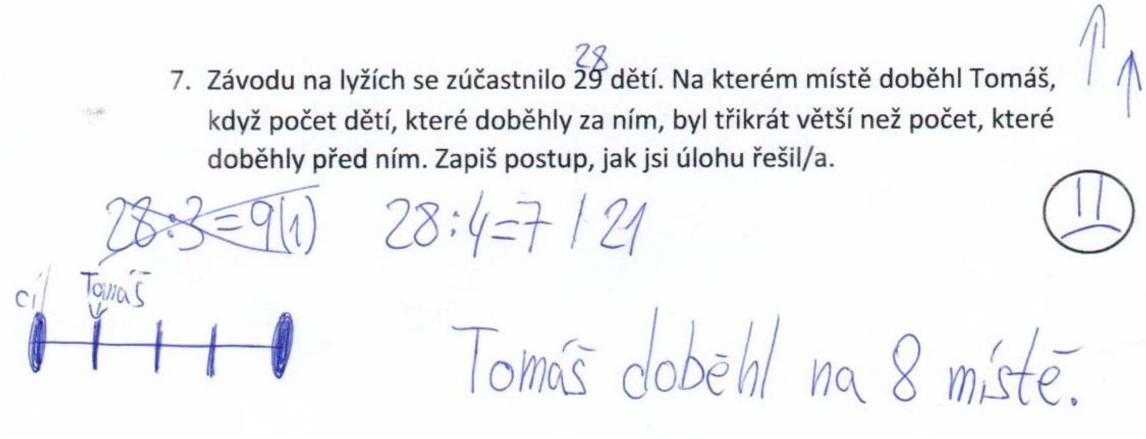
Z konstatování rodičů vyplynulo, že rozvoj Adamových matematických schopností se s nástupem do školy zastavil, ba dokonce vytratil. Nabízí se tři otázky:

1. *Proč se Adamovy matematické schopnosti během vzdělávání na 1. stupni již neprojevovaly tak zřetelně jako dříve?*
2. *Kam se poděla jeho vnitřní motivace hlouběji se rozvíjet v matematické oblasti*?
3. *Potvrdí se Adamův talent na matematiku na základě výsledků vypracovaného standardizovaného testu*?

Pro ověření aktuálního stavu Adamových matematických schopností byl vytvořen pracovní list s nestandardními a problémovými úlohami se stupňující se náročností, které měly ověřit, zda se případné nadání pro matematiku opravdu vytratilo, či zda u Adama pouze neprojevené setrvává. Tento pracovní list obsahoval 12 úloh, zadání vybraných úloh byla inspirována publikacemi Budínové, Blažkové, Vaňurové & Durnové (2016) a Budínové (2018). Ilustrujme jeho postup řešení a výsledky na několika vybraných úlohách.

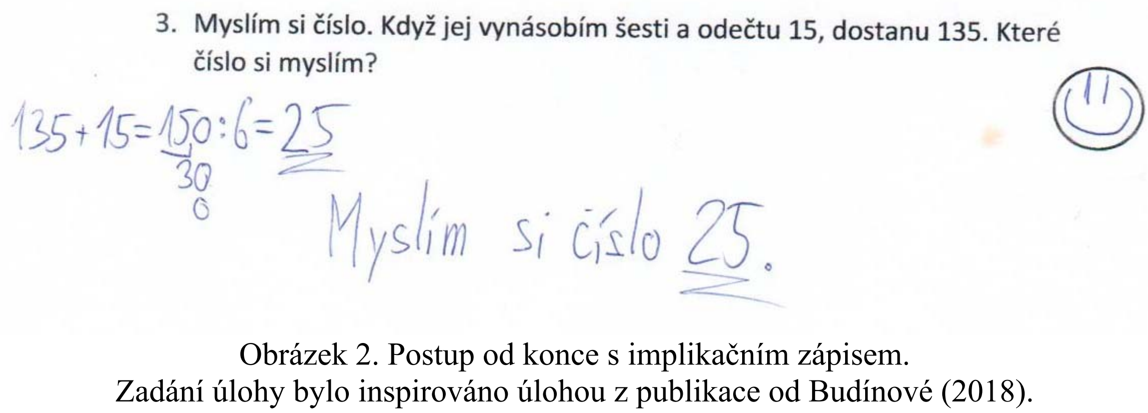
3.1. Analýza žákovského řešení vybraných úloh

Na Obr. 1 je ukázka aritmeticky řešitelné úlohy, kterou Adam řešil nejprve chybně tak, že počet dětí 28 (bez Tomáše) dělil třemi, tj. 28 : 3 = 9 (1). Svůj chybný výsledek si hned uvědomil, řešení opravil a oporou o grafický názor úlohu vyřešil správně.



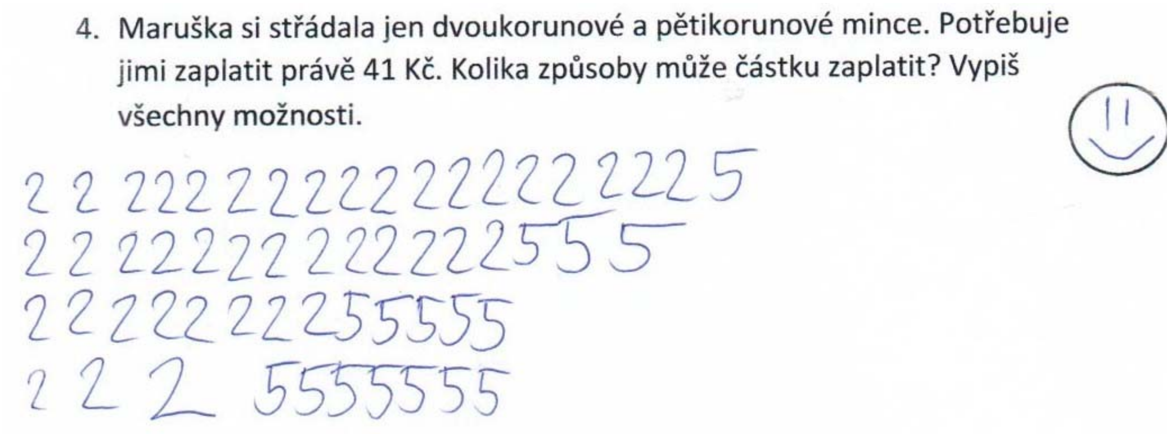
Obrázek 1. Řešení úlohy se opírá o grafický názor.
Zadání úlohy bylo inspirováno úlohou z publikace od Budínové (2018).

Při řešení úlohy rovnicového charakteru na Obr. 2 zvolil Adam aritmetický postup od konce pomocí inverzních operací vzhledem k násobení a odčítání. Je zde vidět implikační zápis (Budínová, 2018), ve kterém Adam neuvažoval symbol „=“ jako znak pro rovnost, ale jako pokyn k počítání. Úlohu řešil správně. Zajímavé je si povšimnout, že u většiny úloh nechybí odpověď.



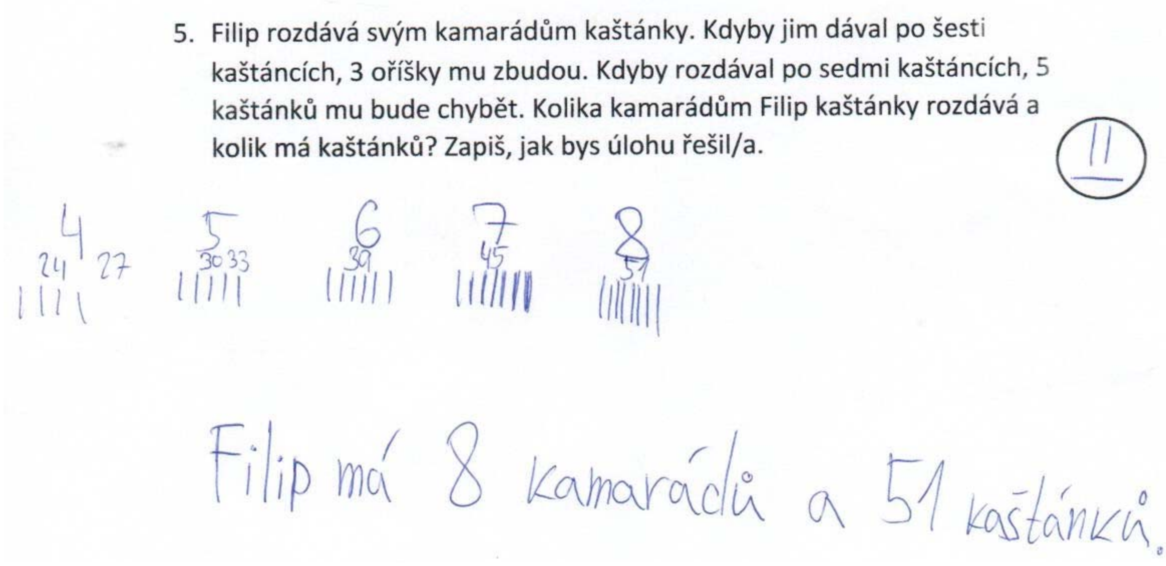
Obrázek 2. Postup od konce s implikačním zápisem.
Zadání úlohy bylo inspirováno úlohou z publikace od Budínové (2018).

U kombinatorické úlohy na Obr. 3 svůj postup Adam vysvětlil v rámci reflexe následovně: „Sčítal jsem postupně dvojkoruny tak dlouho, dokud jsem neměl celkem 36 Kč. Když k třiceti šesti korunám přičtu pětikorunu, mám 41. Takže mám 18 dvojkorun a jednu pětikorunu. Pak jsem zase sčítal dvojkoruny tak dlouho, dokud jsem neměl 26 Kč. Když ke dvaceti šesti korunám přičtu tři pětikoruny, mám zase 41. Dvě pětikoruny mít nemůžu, protože kdybych k nim měl přičítat dvojkoruny, tak nikdy nedostanu 41…“ Úlohu Adam řešil experimentálně, z popisu jeho vlastního řešení je patrná dobrá logická úvaha a výborná aritmetická zdatnost. Všechny možnosti řešení si postupně vypisoval, způsob zápisu však použil mírně neekonomický.



Obrázek 3. Kombinatorická úloha řešená experimentálně.
Zadání úlohy bylo inspirováno úlohou z publikace od Budínové (2018).

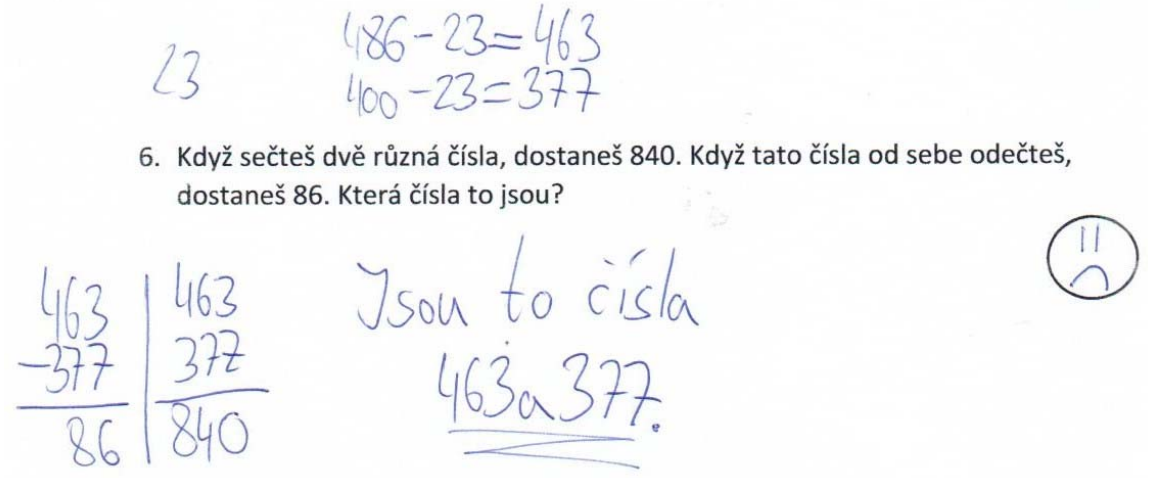
Experimentální metodu Adam využil i u následující úlohy rovnicového charakteru na Obr. 4, přičemž se opíral o vlastní grafický názor. Výchozí počet kamarádů si zvolil 4 a zjistil, že při tomto počtu kamarádů by bylo celkem $4 \cdot 6 + 3 = 27$ kaštánků. Tento počet však nevyhovuje druhé podmínce úlohy. Počet kamarádů pak postupně o jednu zvyšoval do okamžiku, kdy obě podmínky úlohy byly splněny. Výchozí Adamova úvaha také svědčí o vhledu do dané problematiky.



Obrázek 4. Úloha řešená experimentálně opírající se o vlastní grafický názor.
Zadání úlohy bylo inspirováno úlohou z publikace od Budínové (2018).

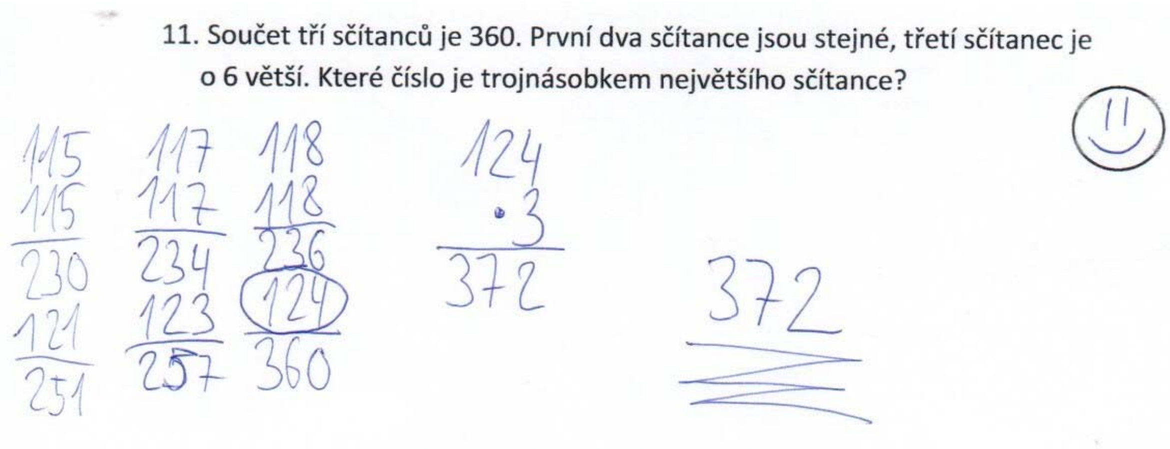
Kombinací experimentální strategie, kdy nejdříve uvažoval čísla 400 a 486, a zdatností v aritmetice spojenou se silnou logickou úvahou dospěl Adam ke správnému výsledku úlohy na Obr. 5. Z jeho řešení je vidět, že řadu podstatných kroků výpočtů prováděl zpaměti a své úvahy nezaznamenal. U této úlohy je provedena i ověřující zkouška správnosti.

ISSN 2694-8133



Obrázek 5. Aritmetické řešení úlohy s výpočty prováděnými zpaměti.
Zadání úlohy bylo inspirováno úlohou z publikace od Budínové (2018).

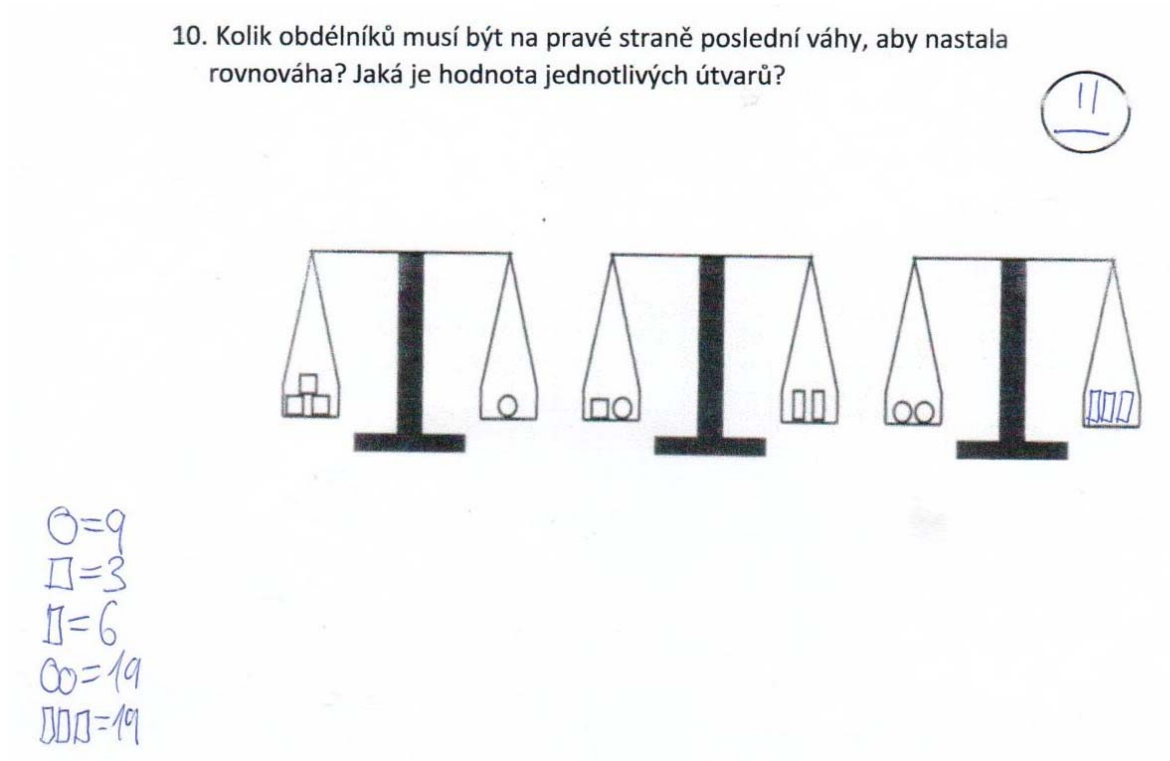
Způsob řešení úlohy na Obr. 6 poukazuje na elegantně řízený experiment, hluboký vhled a intuici, které se při řešení úlohy projevily. Ze společné debaty k řešení tohoto příkladu Adam nejdříve vydělil 360 : 3 = 120. Soudil správně, že první dva sčítance budou zcela jistě menší než 120. Zvolil tedy nejdříve za první dva sčítance čísla 115 a třetí sčítanec 121. Součet těchto tří sčítanců však neodpovídal číslu 360 v zadání, tedy bylo třeba za první dva sčítance uvažovat čísla větší než 115. Záměrně přeskočil ve svých dalších úvahách číslo 116. Je zajímavé, že součty v prvních dvou sloupcích zleva jsou s chybou, místo 351, resp. 357 mu vyšlo 251, resp. 257.



Obrázek 6. Úloha rovnicového charakteru řešená řízeným experimentem.
Zadání úlohy bylo inspirováno úlohou z publikace od Budínové (2018).

Při řešení úlohy na Obr. 7, která je propedeutikou učiva o rovnicích, Adam prokázal schopnost analýzy a logického myšlení, u kterých je však předpokladem dobrý aritmetický základ. Vhodně zvolil za pomocníky svá oblíbená čísla a následná logická úvaha založená opět na vhledu a intuici jej dovedla ke správnému řešení, které zaznačil do zadaného obrázku. Všimněme si zde zápisů ◯◯ = 19 a □ □ □= 19 s chybou, které patrně vznikly z nepozornosti, i když výsledek úlohy je správný.

ISSN 2694-8133



Obrázek 7. Úloha, u které Adam prokázal schopnost analýzy a logického myšlení. Zadání úlohy bylo inspirováno úlohou z publikace od Blažkové, Budínové, Vaňurové & Durnové (2016).

Adam pracovní list vyřešil s 90% úspěšností (získal 30 bodů z maximálního počtu 33). Při analýze výsledků se jevilo, že Adamovy matematické schopnosti jsou silně nadprůměrné.

3.2. Pozorované fenomény žákovského řešení vybraných úloh

Na základě výše uvedené analýzy řešení vybraných úloh shrnujeme fenomény, které byly u Adama pozorovány:

- Jeho zápis byl úhledný a srozumitelný.
- Často volil k řešení úloh experimentální strategii, mnohdy řízenou.
- U řady úloh se často opíral o vhodný grafický názor.

  V některých případech se dopouštěl chybného zápisu čísla v průběhu dílčího výpočtu. K tomuto docházelo pravděpodobně z nepozornosti, kdy tento zápis neměl vliv na správnost výsledku.

  U některých úloh si pomáhal pamětnými výpočty, které již nezapisoval, což svědčí o jeho rozvinutých aritmetických představách.
- Řešení řady úloh byla provázena dobrými logickými úvahami a vhledem.
- V rámci reflexe byl schopen srozumitelně slovně popsat způsob řešení úloh. Jeho popis se opíral o přesné matematické vyjadřování, dobrou argumentaci a zdůvodňování.

Z výsledků testování lze tedy u Adama s rozumnou mírou jistoty uvažovat o jeho nadprůměrné úrovni matematických schopností. Vracíme se tedy k prvním dvěma otázkám, které spolu úzce souvisí:

1. *Proč se Adamovy matematické schopnosti během vzdělávání na 1. stupni již neprojevovaly tak zřetelně?*
2. *Kam se poděla jeho vnitřní motivace hlouběji se rozvíjet v matematické oblasti?*

Na základě předchozích zjištění se nabízí hned několik odpovědí na vznesené otázky: U Adama se během školní docházky projevilo několik nepříznivých okolností - rodina se dostala do tíživé existenční situace, Adam měl řadu mimoškolních aktivit, které zastínily jeho zájem o matematiku. Zřejmé také v důsledku nízké profesionality Adamovy učitelky nebyly z její strany mimořádné matematické schopnosti chlapce rozpoznány. Uvedené okolnosti považujeme za příčinu jeho stagnování v matematice. Toto je vnímáno u nadaného dítěte jako problém, protože nemohou být kontinuálně rozvíjeny jeho schopnosti a dovednosti.

S ohledem na předchozí zjištění se můžeme vrátit k poslední vznesené otázce:

3. *Potvrdí se Adamův talent na matematiku na základě výsledků vypracovaného standardizovaného testu?*

3.3. Test pro identifikaci nadaných žáků na matematiku TIM$^{3–5}$

Pro ověření a případné potvrzení matematického talentu byl Adam následně testován standardizovaným Testem pro identifikaci nadaných žáků v matematice TIM$^{3–5}$ (TIM$^{3–5}$, 2017). Rodiče s testováním souhlasili. Test TIM$^{3–5}$ využívá standardizovanou psychodiagnostickou metodu pro měření matematických schopností v pásmu středního a vyššího nadprůměru žáků 3.–5. ročníků základní školy a byl vytvořen odbornými pracovníky, psychology Centra rozvoje nadaných dětí Fakulty sociálních studií Masarykovy univerzity v Brně. Test TIM$^{3–5}$ byl vyvinut v roce 2017 za účelem poskytnutí pedagogům a psychologům spolehlivý nástroj k vyhledávání matematicky nadaných žáků, neboť do současné doby v České republice neexistoval standardizovaný a psychometricky ověřený nástroj pro měření mimořádné úrovně těchto schopností u dětí na prvním stupni ZŠ. Test je určen primárně pro pedagogy, psychology a speciální pedagogy. Jaké základní vlastnosti má test TIM$^{3–5}$?

- Lze jej použít individuálně i skupinově,
- Test sestává z 25 položek s volnou odpovědí (výpočtem), administrace testu trvá zhruba 45 minut (1 vyučovací hodinu).
- K dispozici jsou dvě paralelní formy (Forma A a Forma B), které je možné použít např. pro opakované testování téhož žáka s krátkým časovým odstupem.
- Skórovací systém (podrobně popsaný v uživatelské příručce) umožňuje u většiny položek zohlednit i částečně správné odpovědi (např. správný postup, ale chybný výsledek v důsledku drobné nepozornosti apod.
- Vyhodnocovací aplikace vygeneruje pro každé testování podrobnou zprávu, která obsahuje srovnání matematických schopností žáka s normami pro odpovídající ročník (vyjádřenými ve formě percentilů a některých dalších skórů, jejichž smysl a interpretace jsou podrobně popsány v uživatelské příručce).
- Test je určen primárně pro žáky, u nichž lze s rozumnou mírou jistoty předem uvažovat o nadprůměrné úrovni matematických schopností.

3.4. Výsledky Adamova testu TIM$^{3–5}$

Adam v rámci testu TIM$^{3–5}$ absolvoval Formu A. Vyhodnocovací aplikace testu vygenerovala z výsledků jeho řešení podrobnou zprávu, která obsahovala srovnání jeho matematických schopností s normami pro odpovídající ročník. Tabulka 1 shrnuje výsledky podrobné zprávy Adamova testu pro identifikaci nadaných žáků v matematice.

Tabulka 1. Výsledky podrobné zprávy Adamova testu TIM $^{3–5}$ (Forma A)

Jednotka	**Skór (95% interval spolehlivosti)**
Hrubý skór	33
Percentil	98 (CI95% = 92-100)
T-skór	73 (SE = 3.335), CI95% = 66.4–79.6
W-skór	541 (SE = 4.82), CI95% = 531.6–550.4
RPI-1	79/10

Součástí podrobné zprávy Adamova testu byly mimo jiné tyto vysvětlivky k výsledkům:

Hrubý skór - součet bodů za jednotlivé položky. Nelze interpretovat, slouží jen pro kontrolu.

W-skór - schopnost dítěte vyjádřená na škále, která je nezávislá na ročníkových skórech (T-skórech, percentilech atp.). Umožňuje například sledovat, jak moc se dítě zlepšuje při opakovaném testování.

T-skór – standardní skór (M = 50, SD = 10), který umožňuje srovnání dítěte s ostatními dětmi ve stejném ročníku. Průměrné dítě má T-skór 50, T-skór 60 a více dosahuje přibližně 16 % dětí, více než 70 něco přes 2 % dětí a T-skór 80 a více jen asi jedno dítě z tisíce.

Percentil - procento dětí ze stejného ročníku, které v testu dosahují stejného nebo horšího výsledku.

RPI-1 – udává průměrnou pravděpodobnost, s jakou dítě vyřeší velmi obtížné položky, které řeší správně jen 10 % dětí ve stejném ročníku. Průměrné dítě má tedy RPI-1 10/10, nadprůměrné děti mají RPI-1 vyšší (např. 23/10).

95% interval spolehlivosti (CI95%) - každý psychologický test měří s určitou chybou. Interval spolehlivosti udává, v jakém rozmezí se s danou pravděpodobností nachází skutečný skór dítěte při určité naměřené hodnotě. Například „percentil 90 (CI95% = 73-98)" znamená, že skutečný percentil dítěte leží s 95 % pravděpodobností mezi 73. a 98. percentilem.

SE – standardní chyba měření. Slouží k výpočtu intervalu spolehlivosti.

Dle výsledků v Tabulce 1 s přihlédnutím k vysvětlivkám jednotlivých zjištěných položek lze v případě Adamova testu konstatovat tato klíčová zjištění:

- *Percentil 98 ($CI_{95\%}$ = 92-100)* znamená, že 98 % dětí z Adamova ročníku by dosáhlo stejného nebo horšího výsledku (skutečný percentil Adama leží s pravděpodobností 95 % mezi 92–100 percentilem).
- *T-skór 73 ($CI_{95\%}$ = 66.4–79.6)* srovnávající Adama s ostatním dětmi ze stejného ročníku znamená, že Adam patří mezi 2 % dětí v porovnání s průměrným dítětem disponujícím T-skórem 50 (s 95 % pravděpodobností T-skóru 66.4–79.6).
- *RPI^{-1} 79/10* znamená, že s průměrnou pravděpodobností 79 % Adam vyřeší velmi obtížné položky, které řeší správně jen 10 % dětí ve stejném ročníku.

Výsledky Adamova testu dle podrobné zprávy vyhodnocovací aplikace nabízí odpovědi na poslední vznesenou otázku. Na základě výsledků testu TIM $^{3–5}$ se můžeme oprávněně domnívat, že Adamovy matematické schopnosti jsou vysoce nadprůměrné.

4. Závěr

V popsané případové studii jsme se setkali s žákem, jehož matematické schopnosti byly na základě standardizovaného testu TIM $^{3–5}$ potvrzeny jako vysoce nadprůměrné. Ve školním prostředí však u něj nebylo toto nadání rozpoznáno, přičemž k tomu zřejmě přispěly tyto faktory:

- Nízká profesionalita vyučující - ze strany učitelky se žákovi nedostávalo uspokojivé pozornosti (pravděpodobně tak tomu bylo i ze strany rodičů), ve výuce byl žák vnímán jako bezproblémový, učitelka nerozpoznala signály upozorňující na žáka nadaného na matematiku.
- Žák neměl potřebu prosazovat si své zájmy, nedožadoval se podnětů, které by ho v matematice kultivovaly, a rychle se přizpůsobil školnímu prostředí.

V důsledku těchto faktorů se žák stal podvýkonným vzhledem ke svým schopnostem a začal své matematické nadání skrývat. V matematice se pak dále nerozvíjel ani ve školním ani v domácím prostředí. V typologii Bettse & Neihartové (1988) bychom ho mohli zařadit do profilu „skrývač nadání". Když nebyl dostatek podnětů ze strany školy ani rodiny, žák reagoval tím, že si našel jiné záliby a ztratil motivaci své matematické nadání projevovat a dále rozvíjet.

V návaznosti na zkušenost popsanou v případové studii zde upozorňujeme na skutečnost, že existuje řada nadaných dětí (nejen na matematiku), u kterých nedojde k identifikaci nadání z jejich školních výkonů. Rizikovým jevem u takovýchto případů je, že tito žáci zažívají často frustraci a nedostatek motivace, které je mohou vést až k podvýkonům.

V této souvislosti shledáváme možné cesty pro včasné odhalení nadání u žáků a jejich následný rozvoj. Jednou z těchto cest je kvalitní teoretická příprava budoucích učitelů, kteří budou obeznámeni o tom, jak se nadaný žák může projevovat a jak jeho nadání ve výuce rozpoznat. Výzvou pro učitele mohou být matematické znalosti nadaného žáka, které značně převyšují učivo prvního stupně. Učitel také musí mít hodně trpělivosti a ochoty věnovat čas tomu, aby s nadaným dítětem mohl diskutovat o věcech, které ho v oblasti jeho zájmu zaměstnávají.

Literatura

Betts, G. T. & Naihart, M. (1988). Profiles of the gifted and talented. *Gifted Child* Quarterly, 32(2), 248–253.

Blažková, R., Budínová, I., Vaňurová, M. & Durnová, H. (2016*). Matematika pro bystré a nadané žáky.* Brno: Edika.

Budínová, I. (2018). *Přístupy nadaných žáků 1. a 2. stupně základní školy k řešení některých úloh v matematice.* Brno: Masarykova univerzita.

Hříbková, L. (2009). *Nadání a nadaní.* Praha: Grada.

TIM $^{3–5}$. (2017). *Test pro identifikaci nadaných žáků v matematice TIM $^{3–5}$.* Získáno 15. srpna 2022 z nadanedeti.cz: https://www.nadanedeti.cz/testy-matematicky-test-tim.

PRÁCE S DATY NA 1. STUPNI ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Ivana SIKOROVÁ[1], Šárka PĚCHOUČKOVÁ[2], Václav KOHOUT[2]
[1] 14. základní škola Plzeň (Česká republika)
[2] Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická (Česká republika)
sikorova.ivana@email.cz, pechouck@kmt.zcu.cz, vkohout@kmt.zcu.cz

Abstrakt

Na prvním stupni základní školy proběhla sonda, jejímž cílem byla analýza vybraných učebnic matematiky třetího až pátého ročníku základní školy z hlediska zařazení různých typů úloh na práci s daty, tvorba vlastních úloh s využitím mezipředmětových vztahů, jejich realizace se žáky 5. ročníku a reflexe žáků. Pro žáky pátého ročníku bylo vytvořeno 7 matematických úloh s přesahem do jiných předmětů. V rámci některých úloh realizovali žáci mikrovýzkum, řešení tedy mělo dlouhodobější charakter.

Klíčová slova: práce s daty, matematika, mezipředmětové vztahy

WORK WITH DATA AT ELEMENTARY SCHOOL

Abstract

A study of selected 3rd to 5th year mathematics textbooks was carried out at elementary-school level. Main aspects of the analysis were: inclusion of various types of problems focused on work with data; creation of original problems with interdisciplinary relationships; solving these problems with fifth-year students; and students' reflections. 7 mathematical problems with interdisciplinary context were created for fifth-year students. Students carried out micro-research as part of solving some of the problems, the work was therefore of long-term character.

Keywords: work with data, mathematics, interdisciplinary relationships

1. Úvod

Práce s daty provází svým způsobem člověka po celý život, jak soukromý, tak i pracovní. Proto je potřeba se na ni připravovat již od prvního stupně základní školy. Tato práce není založena jen na orientaci v tabulkách, diagramech a grafech, záleží rovněž na logickém myšlení a porozumění textu.

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání je toto téma zařazeno do tematického okruhu **Závislosti, vztahy a práce s daty**. Žáci rozpoznávají různé změny a závislosti, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a postupně docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. Změny a závislosti poznávají žáci z tabulek, diagramů a grafů, v jednoduchých případech grafy konstruují nebo modelují. Na konci prvního období jsou u žáka očekávány výstupy:

- „žák se orientuje v čase, provádí jednoduché převody jednotek času;
- žák popisuje jednoduché závislosti z reálného života;
- žák doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel." (Jeřábek, Tupý, 2017, s. 32)

ISSN 2694-8133

Ve druhém období jsou uvedeny tyto očekávané výstupy:

- „žák vyhledává, sbírá a třídí data;
- žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy.“ (Jeřábek, Tupý, 2017, s. 35)

2. Experiment na základní škole

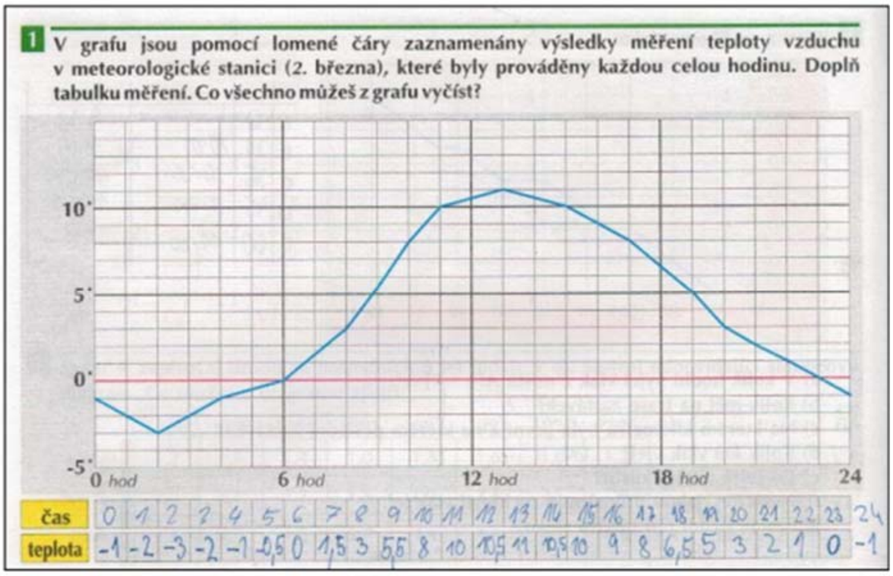
Ve třetím, čtvrtém a pátém ročníku základní školy proběhla sonda, jejímž cílem bylo:

- obsahová analýza vybraných učebnic matematiky z hlediska práce žáků s daty;
- tvorba vlastních úloh s využitím mezipředmětových vztahů, jejich realizace se žáky 5. ročníku a reflexe žáků

2.1. Obsahová analýza vybraných učebnic matematiky

Pro obsahovou analýzu jsme vybrali učebnice a pracovní sešity matematiky, které jsou podle našich zkušeností nejčastěji používané při výuce matematiky na 1. stupni. Jednalo se o učebnice nebo pracovní sešity nakladatelství Alter, Fortuna, Prodos a SPN (některé tituly jsou uvedeny v seznamu literatury). Zaměřili jsme se především na různé postupy při práci s daty a na typy úloh.

Na základě vyhodnocení této části sondy jsme zaznamenali tři základní postupy při práci s daty. **První způsob** spočíval v tom, že je žákům předložena vytvořená tabulka nebo zpracovaný diagram, ze kterých musí určité údaje vyčíst (obr. 1).



Obrázek 1. Úloha s grafem (Molnár, Mikulenková, 2014, s. 26)

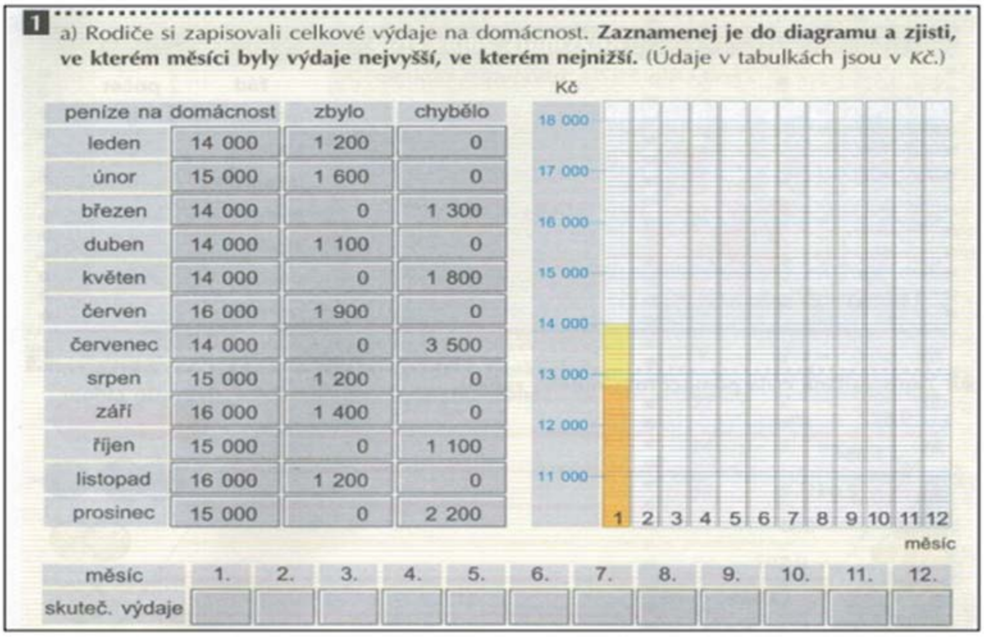
Druhý způsob je opačný, žáci již konkrétní data (čísla, údaje) znají a musí je jen vhodnou formou zaznamenat do diagramu.

Třetí způsob je specifický v tom, že údaje jsou zadány ve formě vět či obrázků, na jejichž základě žáci odpovídají na určité otázky. Místo tabulky jsou zde tedy využívány věty, na základě jejich informací lze vytvořit pořadí nebo jednoduchý graf (obr. 2). Tyto úlohy procvičují logické myšlení žáků, porozumění textu a souvislost jednotlivých početních operací. Na 1. stupni základní školy se setkáme se všemi způsoby, nejrozšířenější je však způsob první. Najdeme však i úlohy, ve kterých se uvedené způsoby kombinují.

Obrázek 2. Úloha zadaná pomocí vět (Čížková, 2008, s. 25)

Z hlediska různých typů úloh (nebo témat), které se v učebnicích vyskytují, jsme nalezli pět základních typů:

- úlohy týkající se domácí ekonomiky
- úlohy, ve kterých se pracuje se vzdálenostmi
- úlohy, ve kterých se pracuje s teplotou
- úlohy zabývající se průzkumy ve třídě
- úlohy na výpočet aritmetického průměru
- úlohy s jízdními řády



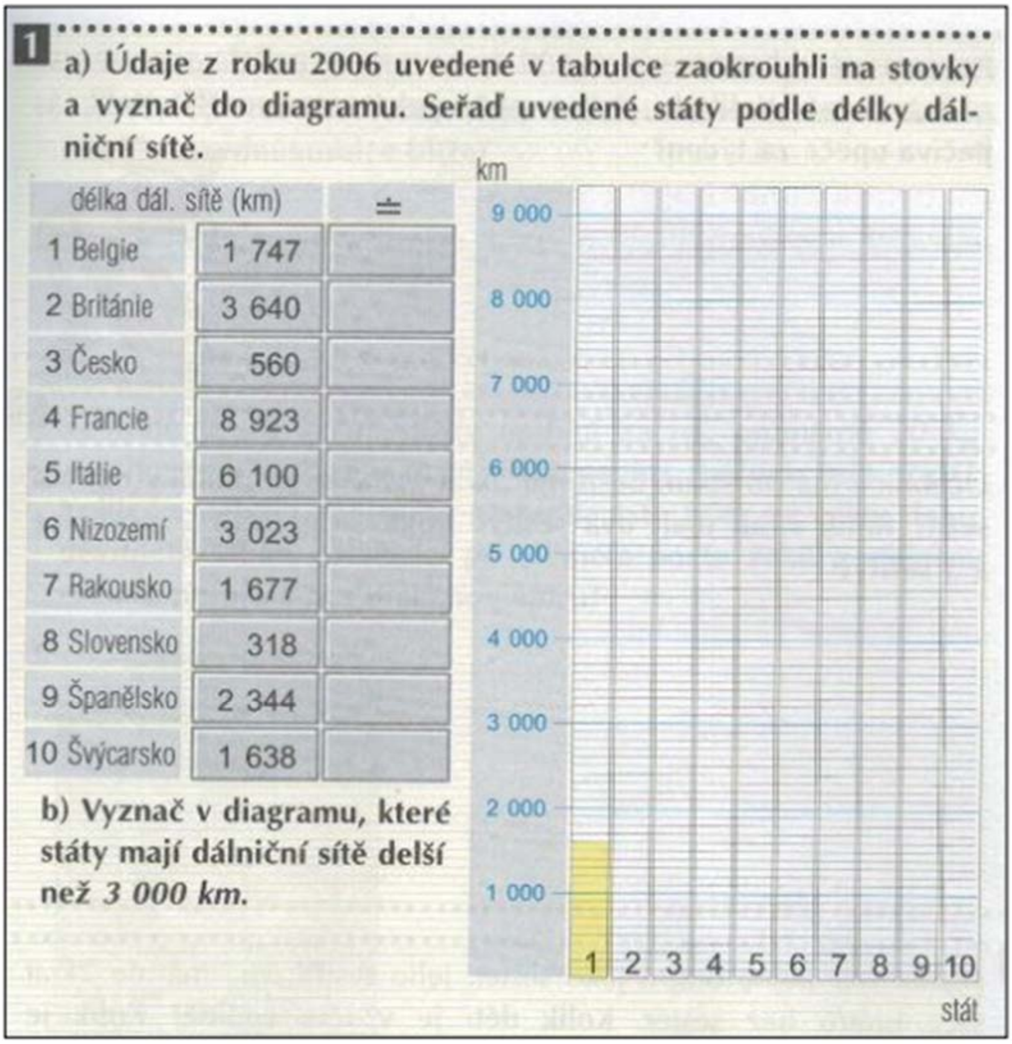
peníze na domácnost		zbylo	chybělo
leden	14 000	1 200	0
únor	15 000	1 600	0
březen	14 000	0	1 300
duben	14 000	1 100	0
květen	14 000	0	1 800
červen	16 000	1 900	0
červenec	14 000	0	3 500
srpen	15 000	1 200	0
září	16 000	1 400	0
říjen	15 000	0	1 100
listopad	16 000	1 200	0
prosinec	15 000	0	2 200

měsíc	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
skuteč. výdaje												

Obrázek 3. Úloha týkající se domácí ekonomiky (Molnár, Mikulenková, 2010, s. 27)

Nejčastěji se objevují **úlohy týkající se domácí ekonomiky**, které jsou v různých kombinacích a úpravách součástí téměř každé zkoumané učebnice od třetího do pátého ročníku. Obsahují různé činnosti s penězi a připravují tak žáky zejména na hospodaření s nimi. Jedná se tedy o propedeutiku finanční gramotnosti žáků (obr. 3)

Úlohy, ve kterých se pracuje se vzdálenostmi, se vyskytovaly především v učebnicích pro 4. a 5. ročník a byly zaměřené například na porovnávání dálniční sítě jednotlivých států, na porovnávání délky běžeckých tras nebo určování vzdálenosti daného cíle. Žáci si jejich řešením procvičují odhad a využívají často zaokrouhlování a početní operace sčítání a odčítání (obr. 4).



Obrázek 4. Práce se vzdálenostmi (Molnár, Mikulenková, 2010, s. 51)

Řešení **úloh, ve kterých se pracuje s teplotou**, se objevilo již ve třetím ročníku. Tyto úlohy jsou vhodným prostředkem pro pozorování teploty v průběhu několika dní, její záznam do tabulky či grafu a následnou práci se získanými údaji.

Na základě vlastních zkušeností můžeme říci, že mezi žáky jsou velmi oblíbené **úlohy zabývající se průzkumy ve třídě**. Mohou se týkat zjišťování data narození, zálib žáků, známek, délky vlasů, délky chodidla. Údaje pak slouží k tvorbě tabulek, grafů nebo diagramů.

Výpočet aritmetického průměru se dá aplikovat v rámci velkého množství úloh na práci s daty. Jakmile se žáci naučí počítat aritmetický průměr, využívají ho zejména pro výpočet aritmetického průměru svých známek.

Pro žáky je důležitá i **orientace v jízdních řádech** doplněná o různé symboly, které se v něm objevují. Domníváme se však, že je potřeba práci s jízdním řádem v učebnici doplnit o práci s jízdním řádem na internetu, který se při hledání spojů v současné době více využívá.

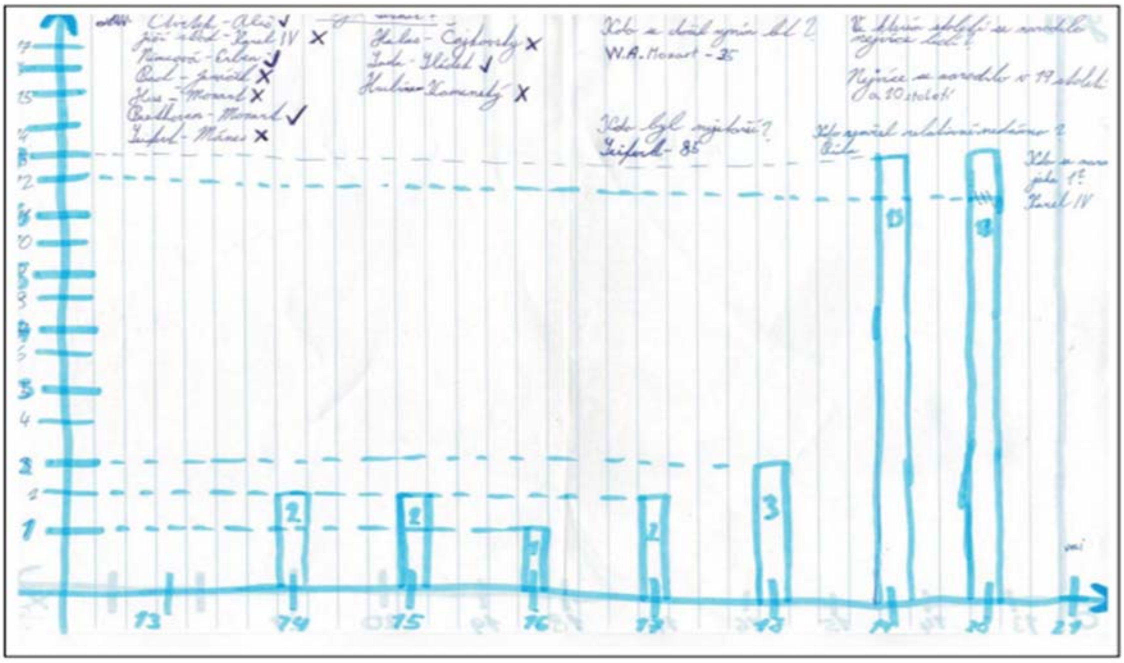
2.2. Tvorba konkrétních úloh pro žáky 5. ročníku

Při tvorbě jednotlivých úloh jsme se zaměřili na praktické využití výsledných poznatků a na zapojení mezipředmětových vztahů. Přihlédli jsme přitom k tomu, co žáky baví a jak spolu budou navzájem spolupracovat. Vytvořili jsme celkem 7 úloh. Z důvodu omezeného rozsahu článku se zaměříme jen na některé.

Úloha 1 – Mohli se potkat?

Úloha integrovala matematiku a vlastivědu. Před její realizací jsme vybrali známé osobnosti, které žáci znali z vlastivědy. Úvodní část hodiny jsme věnovali motivaci a připomenutí všech 28 osobností. Každá osobnost byla ukázána na fotografii nebo prostřednictvím videa a společně jsme si o ní něco řekli. Všechna jména jsme zapsali na tabuli a očíslovali. Třída se losováním rozdělila na čtyři skupiny a každá si vylosovala 7 osobností. Domácím úkolem bylo zjistit datum narození a úmrtí každé z nich

V následující hodině žáci sepsali barevně na velkoformátové listy papíru jména osobností, data narození a úmrtí. Společně jsme si vysvětlili problematiku určování století. Každá skupina dostala zadáno jedno století a připsala ho k osobnostem, které se v tomto století narodily. Na základě vytvořené tabulky žáci samostatně vytvořili sloupcový diagram, který znázorňoval, kolik osobností se v daném století narodilo. Na základě údajů v tabulce a diagramu žáci odpovídali na otázky typu: *Kolik lidí se narodilo v daném století? Ve kterém století se narodilo nejvíce/nejméně osobností? Mohl se setkat Leoš Janáček s Mikolášem Alšem? Kdo se dožil nejvyššího/nejnižšího věku? Kdo z osobností se narodil/zemřel jako první?* (obr. 5)



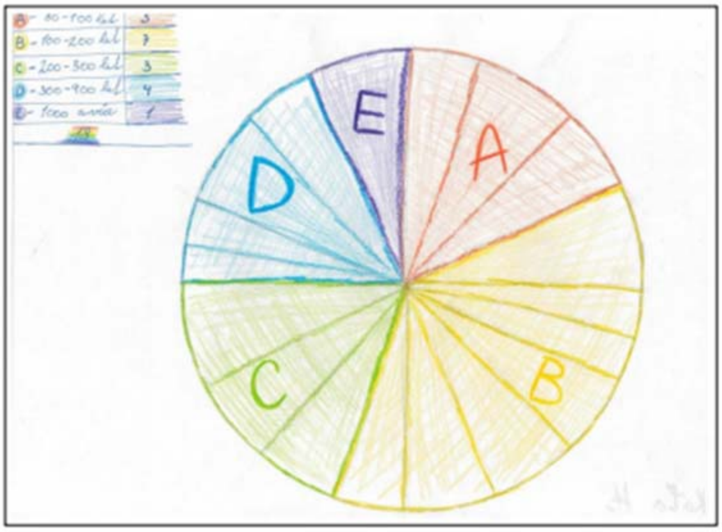
Obrázek 5. Sloupcový diagram k úloze 1 (vlastní zdroj)

Úloha 2 – Mohli to používat?

Tato úloha navazovala na úlohu předcházející, opět tedy integrovala matematiku a vlastivědu. Vytvořili jsme seznam osmnácti vynálezů. Ty z nich, které žáci neznali, jsme si promítli a vysvětlili jejich funkci. Následně žáci pracovali ve stejných skupinách jako v předchozím úkolu. Losováním si vybrali vynálezy, u kterých za domácí úkol našli rok výroby (resp. rok prvního použití). Následující hodinu jsme rok zaznamenali ke každému vynálezu do tabulky a skupiny ještě doplnily stáří daného výrobku. Poté každá skupina dostala jednu otázku: *Které vynálezy jsou starší než jedno století? Které vynálezy jsou starší než půl tisíciletí? Které vynálezy jsou starší než čtvrt století? Které vynálezy jsou starší než půl století?* Tato aktivita sloužila k připomenutí pojmů *století, čtvrt století, tisíciletí.*

Vytvořenou tabulku jsme využili u následujícího úkolu, kdy se všichni žáci vystřídali při kladení otázek typu: *Mohl J. A. Komenský používat kapesní hodinky?* Otázky si pokládali vzájemně mezi sebou. Ten, kdo otázku položil, musel znát pravdivou odpověď a další žák měl funkci kontrolora, aby zhodnotil, kdo odpověděl správně, nebo chybu opravil. Zazněly např. tyto otázky: *Mohla císařovna Marie Terezie telefonovat? Mohl císař Karel IV. nosit brýle? Mohl prezident T. G. Masaryk sledovat televizní zprávy? Mohli přejíždět vojáci v první světové válce vlakem?*

Poslední etapou tohoto úkolu bylo sestavení kruhového grafu s hodnotami stáří vynálezů. Žáci sami přišli na to, že musíme vynálezy roztřídit do skupin podle stáří. Vytvořili tedy jednoduchou tabulku, kde vynálezy rozdělili do pěti skupin. Skupina A obsahovala vynálezy staré 80–100 let, skupina B vynálezy staré 100–200 let, skupina C staré 200–300 let a skupina D staré 1 000 a více let (žádný vynález nepatřil do dvou skupin, proto jsme mohli vytvořit tyto nedisjunktní intervaly). Na základě těchto údajů žáci narýsovali graf (obr. 6).



Obrázek 6. Kruhový diagram k úloze 2 (vlastní zdroj)

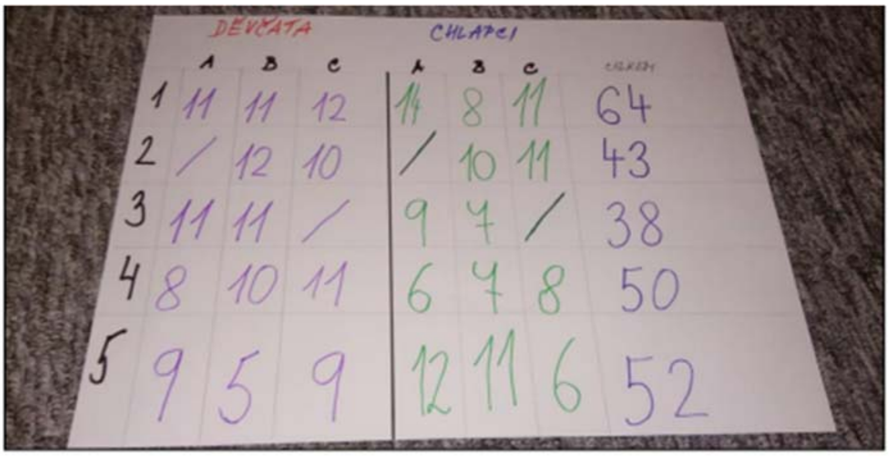
Úloha 1 a úloha 2 byly náročné na čas. Práci jsme rozvrstvili do pěti vyučovacích hodin. Důležitá byla zejména domácí příprava. Počítali jsme i s variantou, že někteří žáci nesplní domácí úkol, a připravili jsme encyklopedie a počítač. Tři žáci nepřinesli data narození známých osobností, dva žáci nenašli rok prvního použití vynálezu, využili tedy počítač. Samozřejmě jsme zkontrolovali všechny vyhledané údaje, byla však přípustná tolerance několika let. V rámci řešení obou úloh žáci rozvíjeli samostatné myšlení, zodpovědnost při plnění úkolů a zastávání určité role ve skupině. Sloupcový diagram vytvořilo správně šestnáct žáků ze sedmnácti, kruhový diagram patnáct žáků. Na následné otázky odpovědělo správně čtrnáct žáků.

ISSN 2694-8133

Úloha 3 – Poznej svou školu a spolužáky!

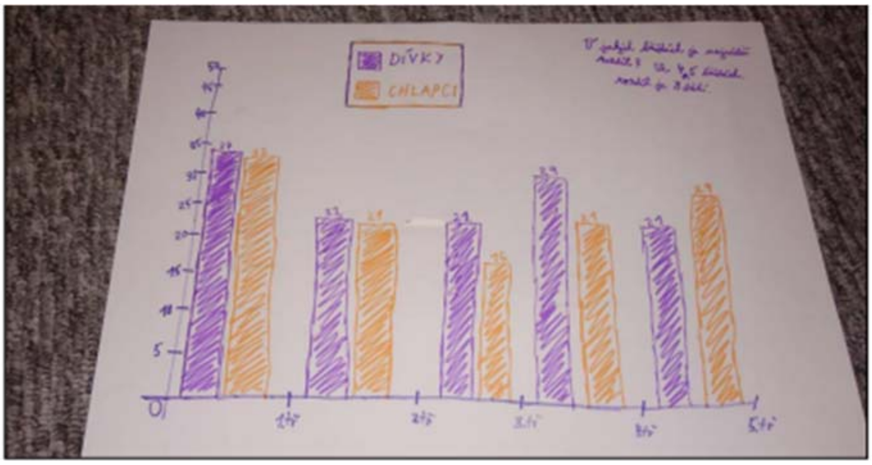
V úvodní motivační části byli žáci seznámeni s celým procesem. Pomalu se vžívali do role badatelů. Museli vypátrat, jak je to se školou, kterou navštěvují. Třída byla rozdělena na tři skupiny a každá si vylosovala vlastní badatelský úkol. Jedna skupina zkoumala počet děvčat a chlapců na celém prvním stupni. Druhá skupina zjišťovala, kolik žáků se v jednotlivých třídách stravuje ve školní jídelně. Třetí třída bádala, kolik žáků navštěvuje školní družinu.

Žáci ve skupině si rozdělili tři základní role - režisér, mluvčí a zapisovatel. Role režiséra spočívala v tom, že v podstatě celou skupinu řídil a stmeloval. Zachraňoval hádky, určoval další postup práce. Mluvčí byl ten, kdo komunikoval s ostatními, ať už ze své třídy, nebo z okolních. Zapisovatel nakonec všechno pečlivě sledoval, počítal a zapsal potřebná data. Takto domluvená skupina se mohla „vydat do terénu“. Ve vyučovacím čase chodila po škole, navštěvovala jednotlivé třídy 1. stupně (1.-5. ročníky) a zjišťovala informace. Samozřejmě s tímto průzkumem museli souhlasit vyučující v jednotlivých třídách. Jakmile měla skupina zjištěné údaje ze všech tříd (ve škole byly v každém ročníku tři třídy - tzn. 15 tříd celkem), vrátila se zpět, vyplnila tabulku (obr. 7) a vytvořila graf (obr. 8), přičemž si mohla vybrat, jaký použije. Dvě skupiny, které se dostaly až k této poslední části úlohy, zvolily sloupcový diagram, který následně ještě barevně odlišily. Samy sepsaly legendu a vymyslely vlastní otázky, které souvisely s vytvořeným diagramem. S vyplněnými tabulkami a připravenými grafy jsme si společně sedli do kruhu na koberec a provedli celkové zhodnocení. Mluvčí každé skupiny zhodnotil práci a uvedl výsledky a závěry. Ostatní se mohli na cokoliv zeptat.



Obrázek 7. Tabulka k úloze 3 (vlastní zdroj)

Doba trvání řešení této úlohy byla dvě a půl vyučovací hodiny. Museli jsme tedy přizpůsobit rozvrh hodin a také požádat ostatní vyučující o možnost navštívit jejich vyučovací hodiny. Žáky výzkum velmi bavil a cítili se jako opravdoví badatelé. Před tím, než žáci opustili svou třídu, upozornili jsme je na vhodné chování na chodbách a domluvili jsme se na bezpečnostních pravidlech pohybu. Po chvíli, kdy už se všechny skupiny vydali zjišťovat data, se jedna skupina vrátila. Byla to skupina složená ze samých chlapců, kteří se ve škole projevovali vždy velmi aktivně, sebevědomě, schopně. Avšak jak jsme zjistili, bylo to pouze v rámci své třídy. Jakmile měli komunikovat s jinými žáky, s jinými učiteli, nebyli schopni nic vyřídit. Nezvládli se ani mezi sebou ve skupině domluvit, kdo by převzal roli mluvčího. Po poradě s námi se nakonec vrátili k bádání a alespoň zjistili ještě několik dat do tabulky. Vyplnili však jen polovinu tabulky, a jelikož ztratili hodně času, nestihli ani sestrojit diagram. Na koberci však následně s námi pracovali relativně bez problémů. Úlohu tedy správně vyřešili dvě skupiny ze tří. Do budoucna, pro příští práci, která by měla podobný charakter, by bylo vhodné klást větší důraz na procvičení reálných situací se žáky.



Obrázek 8. Sloupcový diagram k úloze 3 (vlastní zdroj)

3. Závěr

Ve vybraných učebnicích matematiky pro 3. – 5. ročník základní školy se objevuje několik typů úloh, které zahrnují tři základní postupy při práci s daty. Řešení těchto úloh je pro žáky velice důležité, protože jak se v průběhu experimentu ukázalo, někteří žáci nejsou zvyklí pracovat delší dobu samostatně v několika krocích, které na sebe musí plynule navazovat. Je pro ně samozřejmě mnohem jednodušší vypočítat příklad, který je jim předložen, bez nějakého slovního podkladu. Důležitým předpokladem pro správné vyřešení těchto úloh je také kvalitní porozumění textu. Projevil se poznatek, že čtení není důležité jen v hodinách českého jazyka, ale v jakékoli denní aktivitě. Celkem pět žáků téměř vůbec neporozumělo otázkám na pracovním listu, ale nakonec po vysvětlení odpověděli správně. Je tedy třeba do výuky matematiky na prvním stupni pravidelně zařazovat úlohy na práci s daty a to v jakékoliv formě.

Acknowledgements

Článek vznikl v rámci projektu GRAK2022 „Využití různých metod a forem práce ve výuce matematiky“.

Literatura

Blažková, R., Matoušková, K. & Vaňurová, M. (2010). *Matematika pro 4. ročník základních škol.* Všeň: Alter.

Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Hejl, J. & Hervert, J. (2005). *Matematika pro třetí ročník ZŠ, pracovní sešit 2.* Praha: Fortuna.

Čížková, M. (2008). *Matematika pro 3. ročník základní školy, pracovní sešit 2.* Praha: SPN.

Eiblová, I., Melichar, J. & Šestáková, M. (2010). *Matematika pro 4. ročník základních škol.* Všeň: Alter.

Jeřábek, J. & Tupý, J. (2017). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Praha: MŠMT.

Molnár, J. & Mikulenková, H. (2010). *Matematika a její aplikace pro 4. ročník, 2. díl.* Olomouc: Prodos.

Molnár, J. & Mikulenková, H. (2014). *Matematika a její aplikace pro 4. ročník, 3. díl.* Olomouc: Prodos.

TECHNOLÓGIA ROZŠÍRENEJ REALITY A ROZVOJ MATEMATICKÝCH SCHOPNOSTÍ

Alena PRÍDAVKOVÁ
Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovensko)
alena.pridavkova@unipo.sk

Abstrakt

Technológia rozšírenej reality (augmented reality – AR) predstavuje edukačný prostriedok podporujúci tvorbu modelov matematických konceptov a možností manipulácie s nimi. Týka sa to predovšetkým pojmov z oblasti geometrie. AR umožňuje transformovať 2D model geometrického útvaru na 3D model, ten potom pozorovať a skúmať z rôznych uhlov pohľadu. Navyše vzniká priestor na znázornenie procesu tvorby obrazu útvaru v geometrickom zobrazení - napríklad v osovej súmernosti. Aplikácia technológie AR má potenciál pri tvorbe úloh rôznej úrovne kognitívnej náročnosti. Prezentované budú možnosti využitia technológie AR pri tvorbe zadaní úloh na rôznej úrovni náročnosti, v závislosti od konkrétneho kritéria. V kontexte teórie TPACK (Technological, Pedagogical and Content Knowledge) budú predstavené možnosti uplatnenia princípov v matematickej edukácii.

Kľúčové slová: technológia rozšírenej reality, osová súmernosť, matematické schopnosti

AUGMENTED REALITY TECHNOLOGY AND DEVELOPING MATHEMATICAL ABILITIES

Abstract

Augmented reality technology (AR) is an educational tool supporting the creation of models of mathematical concepts and manipulating them. This is key in the geometry framework. AR allows you to transform 2D model of a geometrical shape into 3D model, which can be observed and explored from different points of view. There is the possibility to illustrate the process of creating the image of the object in geometry mapping, e.g., in axial symmetry. The application of AR technology has the potential to create tasks with different levels of cognitive demand. The possibilities of using AR in the creation of tasks at different levels of difficulties, depending on specific indicator, are presented. The possibilities of applying the main principles of TPACK theory (Technological, Pedagogical and Content Knowledge) in mathematical education, will be presented.

Keywords: augmented reality technology, axial symmetry, mathematical abilities

1. Úvod

Rozšírenú realitu (augmented reality - AR) možno považovať za technológiu, ktorá spája skutočný a virtuálny obsah, dopĺňa skutočný svet virtuálnymi objektmi, je interaktívna v reálnom čase a využíva 3D zobrazenie (Krevelen & Poelman, 2010). Rozšírená realita je prostriedkom na vytváranie virtuálnych prvkov a ich začleňovanie do obrazu reálneho sveta. Vďaka súčasnému stavu technického vybavenia škôl i samotných žiakov nachádza svoje miesto aj vo vzdelávaní, najčastejšie ako pomocný vizualizačný, informačný, fixačný alebo evaluačný nástroj (Hnatová & Hnat, 2019a).

Technológia rozšírenej reality má potenciál z pohľadu rozvoja matematických schopností, napríklad aj prostredníctvom úloh z oblasti osovej súmernosti. Nástroje AR umožňujú flexibilne prispôsobovať a voliť vstupné podmienky úloh na rôznej úrovni kognitívnej náročnosti, modelovať a pracovať s rôznymi reprezentáciami daného konceptu, ako aj znázorniť proces tvorby obrazu útvaru v osovej súmernosti. Podľa Xistouri (2007), dôležitým predpokladom úspešného riešenia úloh z danej problematiky (osová súmernosť), je rozvinutá schopnosť preklopiť vzor za účelom získania obrazu. V uvedenom kontexte je súbor úloh s gradovanou úrovňou náročnosti vhodným prostriedkom pre rozvoj matematických schopností (Xistouri, 2007; Sinclair & Kaur, 2011).

Pri tvorbe modelov, ktoré sú aplikované vo výučbe s podporou AR môžu byť využívané nástroje dynamickej geometrie. Systémy dynamickej geometrie charakterizuje Patsiomitou (2008) ako prostredia, v ktorých sú vytvorené podmienky na tvorbu symbolických a grafických reprezentácií pojmov v matematickej doméne. Žiaci tak môžu skúmať, riešiť problémy rôznymi stratégiami a pracovať individuálne, ale aj v skupinách. Navyše je im poskytnutá spätná väzba na ich návrhy, nápady a postupy.

2. Princípy TPACK teórie v matematickej edukácii

Technológie postupne zastávajú dôležité miesto aj v matematickej edukácii, poskytujú možnosti pre modelovanie a prácu s rôznymi modelmi abstraktných konceptov. Pre ich efektívnu implementáciu do vyučovania je kľúčové, aby učitelia mali dostatočné vedomosti a zručnosti pri práci s nimi s cieľom ich využitia v kontexte s obsahom matematiky. Podľa teórie Technological, Pedagogical and Content Knowledge (TPACK), autorov Mishra & Koehler (2006), sú pri využívaní technológií vo vyučovaní dôležité technologické, pedagogické a obsahové znalosti učiteľov. Pre ich efektívne zaradenie do vyučovania je dôležité vymedzenie vhodného obsahu daného predmetu spolu s pedagogickými prístupmi využívanými pri edukácii daného obsahu.

Teória TPACK môže byť implementovaná aj do vyučovania matematiky. V tabuľke 1 sú uvedené návrhy aplikácie hlavných princípov spomínanej teórie do matematickej edukácie v kontexte pojmu osovej súmernosti. Rozšírená realita je považovaná za technológiu podporujúcu rozvoj matematických schopností z oblasti osovej súmernosti.

Tabuľka 1. Aplikácia princípov TPACK teórie v matematickej edukácii

	Princíp	**Návrh na aplikáciu princípu v matematike**
1.	matematické koncepty môžu byť reprezentované využitím technológií	sprístupnenie konceptu osová súmernosť využitím technológie rozšírenej reality
2.	pedagogické prístupy môžu byť aplikované využitím technológií rôznymi spôsobmi	využitie pri prezenčnej aj dištančnej výučbe; aplikácia rôznych organizačných foriem (individuálna, skupinová, hromadná, rovesnícke vyučovanie)
3.	rôzne pojmy z matematiky vyžadujú od žiakov zručnosti rôznej úrovne; technológie môžu pomôcť pri niektorých požiadavkách	v uvedenom kontexte sú to zručnosti pri rysovaní (znázornenie obrazu útvaru v osovej súmernosti); nástroje AR prezentujú proces riešenia
4.	žiaci prichádzajú na vyučovanie s rôznou úrovňou vedomostí (vrátane predchádzajúcich vzdelávacích skúseností s využitím technológií); vyučovanie s využitím technológií by malo tento fakt rešpektovať	existuje možnosť práce s PC (applety - GeoGebra), ale aj s mobilným telefónom a aplikáciou GeoGebra 3DGraphing Calculator; v závislosti od úrovne schopností žiakov a technického vybavenia je možnosť flexibilného výberu a prispôsobenia použitia technológií

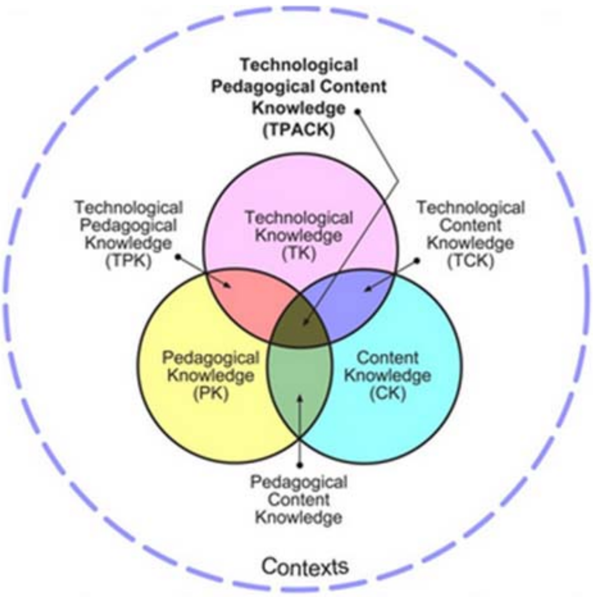
5.	technológie môžu byť využívané v súlade s existujúcimi vedomosťami žiakov, pomáhajú im nielen pri ich rozvíjaní, ale aj pri tvorbe nových poznatkov	technológia AR umožňuje: - tvoriť gradované úlohy na základe rôznych vstupných kritérií špecifikovaných na základe kognitívnej analýzy úlohy (napr. v úlohe nižšie: počet štvorcov, rôzna pozícia osi súmernosti); - vytvoriť podmienky pre pochopenie princípu riešenia úloh (vo verzii pero/papier) cez znázornenie procesu tvorby obrazu objektu v osovej súmernosti

Spracované podľa: https://lnk.sk/dts0

Princípy TPACK modelu je možné aplikovať aj v matematickej edukácii na rôznych stupňoch vzdelávania. V tejto súvislosti predstavujeme vybrané návrhy aplikácie AR v úlohách, ktoré sú obsahovo zamerané na problematiku osovej súmernosti.

3. Návrh použitia technológie rozšírenej reality v úlohách s kontextom osovej súmernosti

Existuje viacero možností využitia technológie AR v matematickej edukácii a jednou z nich je obsah matematiky využívajúci úlohy s kontextom osovej súmernosti. Prezentované návrhy sú zaradené do oblastí vymedzených podľa existujúcich prienikov medzi jednotlivými elementami modelu TPACK (obrázok 1).



Obrázok 1. TPACK model
zdroj: https://lnk.sk/dts0

1. Prienik technologických, pedagogických a obsahových znalostí (TPC).

Úlohy z oblasti osovej súmernosti môžu žiaci riešiť buď vo verzii pero-papier alebo v elektronickej verzii, napríklad využitím AR. Žiaci na 1. stupni ZŠ ešte nemajú rozvinuté zručnosti týkajúce sa zostrojenia obrazu útvaru v osovej súmernosti (prenášanie úsečiek, práca s kružidlom, rysovanie kolmých priamok). AR vytvára priestor na získanie prvotných predstáv o procese tvorby obrazu útvaru v osovej súmernosti, ktorý je dynamicky znázornený, čím sú prezentované procesy riešenia úlohy ako východisko pre porozumenie daného konceptu.

Práca s nástrojmi využívajúcimi technológiu AR je výhodná z pohľadu rešpektovania rôznej úrovne vedomostí a skúseností žiakov s riešením úloh z oblasti osovej súmernosti. AR má výhodu v tom, že učiteľ dokáže efektívne a rýchlo pripraviť úlohy rôznej náročnosti, jednoducho vie meniť úroveň náročnosti úloh (od jednoduchších k náročnejším, ale aj opačne).

2. Prieniky: technologické a pedagogické znalosti (TP), pedagogické a obsahové znalosti (PC).

Technológia AR umožňuje využiť rôzne módy reprezentácie zadania úlohy. Tu je možné identifikovať prieniky TP – technologické a pedagogické znalosti, PC – pedagogické a obsahové znalosti. Pri použití appletov vytvorených v GeoGebre je možné vytvárať modely pojmov v enaktívnom móde (manipulatívny vo virtuálnom prostredí). V prípade, že je v procese riešenia úlohy použitá technológia AR, napríklad aplikácia GeoGebra 3D Graphing Calculator, tak model znázornenia objektu v osovej súmernosti je možné považovať za enaktívny (manipulatívny). Žiak môže pritom meniť orientáciu objektu, ako aj osi súmernosti. Práca s modelom pojmu v enaktívnom móde je prediktorom pre úspešné riešenie úloh v ikonickom a symbolickom móde, ktoré sú považované za kognitívne náročnejšie.

Pri využití technológie AR je možné využiť rôzne formy práce – individuálnu, rovesnícke vyučovanie, prácu v skupinách, frontálnu výučbu. V tejto súvislosti možno uvažovať o prienikoch TP – technologické a pedagogické znalosti a PC – pedagogické a obsahové znalosti. Pri individuálnej práci si každý žiak môže zvoliť typ úlohy, rôznej úrovne náročnosti, v závislosti od aktuálnej vedomostnej úrovne a skúseností. V prípade úloh z oblasti osovej súmernosti nasleduje tvorba, znázornenie obrazu útvaru v AR, kedy má žiak možnosť sledovať proces tvorby obrazu daného útvaru v zobrazení. Pri rovesníckom vyučovaní môže napríklad jeden žiak (Z1) vytvoriť zadanie úlohy - vymodelovať na svojom mobilnom zariadení vzor, ktorého obraz je potrebné vytvoriť v osovej súmernosti. Zadanie úlohy prezentuje druhému žiakovi (Z2), pričom tu existuje viacero možností: Z1 zadá popisne daný útvar (vzor) Z2; Z2 sa pozrie na daný vzor; Z1 nadiktuje nutné vstupné podmienky, na základe ktorých dokáže Z2 vymodelovať daný útvar (vzor). Z2 vymodeluje vzor (podľa pokynov) a pomocou AR vytvorí obraz útvaru. Nasleduje overenie správnosti riešenia úlohy – porovnanie výsledku na zariadeniach oboch žiakov. V prípade nezhody, nasleduje diskusia týkajúca sa možných príčin vzniknutých chýb (v zadaní, v procese riešenia, orientácia osi a pod.). Pri frontálnej forme vyučovania učiteľ vytvára zadania úloh rôznej úrovne náročnosti (vopred pripravené typy vzorov) a žiaci tvoria, modelujú ich obrazy.

3. Prienik technologických a obsahových znalostí (TC).

Obsahové zameranie na oblasť osovej súmernosti sa ukazuje ako vhodné z pohľadu prieniku technologických a obsahových znalostí (TC). V tomto prípade je možné využiť ako východisko reálne situácie, konkrétne objekty, predmety, na čo nadväzuje práca s obrázkami súmerných objektov, kedy je vhodné použiť zrkadlo resp. geometrické zrkadlo na overenie symetrie útvaru, objektu, obrázku. Na overenie symetrie objektu je možné použiť aj technológiu AR.

Objekty, ktorých obraz v osovej súmernosti je vytváraný použitím technológie AR, sú modelované v rovine. Proces tvorby obrazu je transformovaný do priestoru a je dynamizovaný. Tu možno uvažovať o prieniku typu TC – technologické a obsahové znalosti. Modelovanie procesu tvorby obrazu útvaru využitím technológie AR je propedeutikou znázorňovania útvaru v osovej súmernosti (práca s kružidlom, prenášanie úsečiek, kolmosť priamok).

Technológia AR umožňuje diferencovať potrebu vizualizácie procesu riešenia úloh (TC prienik). Niektorí žiaci potrebujú vidieť proces riešenia úlohy, iní majú myslenie na vyššej úrovni abstrakcie a nepotrebujú sledovať proces znázornenia obrazu, dokážu obraz útvaru vytvoriť bez pomoci, bez znázornenia postupu.

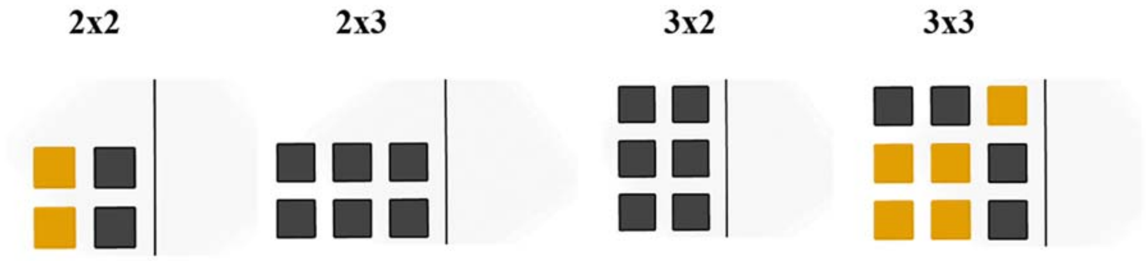
Rozšírená realita, okrem vyššie uvedených možností použitia, predstavuje efektívny prostriedok v procese tvorby úloh rôznej úrovne kognitívnej náročnosti.

3.1. Technológia AR pri tvorbe gradovaných úloh

Kognitívna analýza úlohy, obsahovo orientovanej na problematiku osovej súmernosti, je východiskom pre identifikáciu kritérií, na základe ktorých sú vytvárané úlohy na rôznej úrovni kognitívnej náročnosti. Úrovne náročnosti sú definované vlastnosťami využitých objektov. Analyzovaná úloha je obsahovo zameraná na koncept osovej súmernosti z dôvodu existujúceho potenciálu pri rozvoji matematických schopností a schopnosti učiť sa. V úlohe ide o vytvorenie obrazu útvaru v osovej súmernosti. Vzor predstavuje objekt tvorený daným počtom štvorcov usporiadaných v riadkoch, pričom štvorce môžu byť buď čierne alebo žlté. Za kritériá, ktoré sú východiskom pre tvorbu úloh gradovanej kognitívnej náročnosti, boli zvolené viaceré vlastnosti objektov: počet štvorcov v útvare, pomer počtu štvorcov rôznej farby a ich poloha, orientácia osi súmernosti.

- Kritérium 1: počet štvorcov v útvare (resp. rozmer štvorcovej siete)

Na základe uvedeného kritéria sú postupne tvorené úlohy gradovaného typu (obrázok 2), začínajúc útvarom so štyrmi štvorcami (2x2), cez útvary so šiestimi štvorcami (2x3 a 3x2) až po útvar zložený z deviatich štvorcov (3x3).

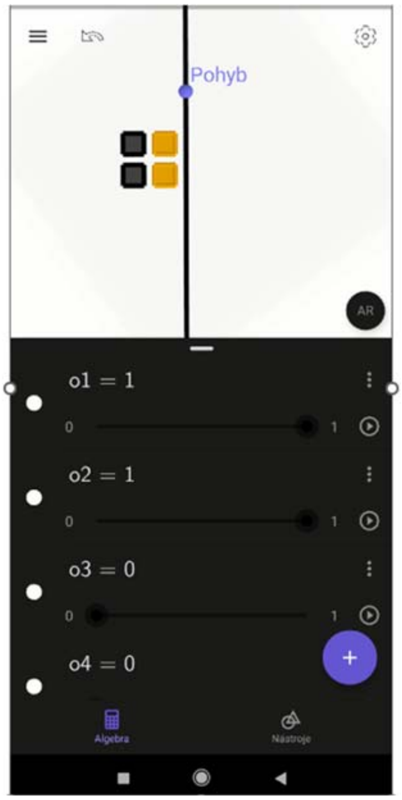


Obrázok 2. Gradácia úlohy v závislosti od počtu štvorcov

V uvedenom kontexte sú pre použitie technológie AR, v rámci projektu KEGA 036PU-4/2021, vytvorené applety (GeoGebra), separátne pre každý typ útvaru v závislosti od počtu štvorcov tak, aby bolo možné definovať farbu štvorcov. Užívateľ si pri voľbe úloh vyberá z týchto možností, v závislosti od požadovanej náročnosti zadávanej úlohy.

- Kritérium 2: počet štvorcov rôznej farby

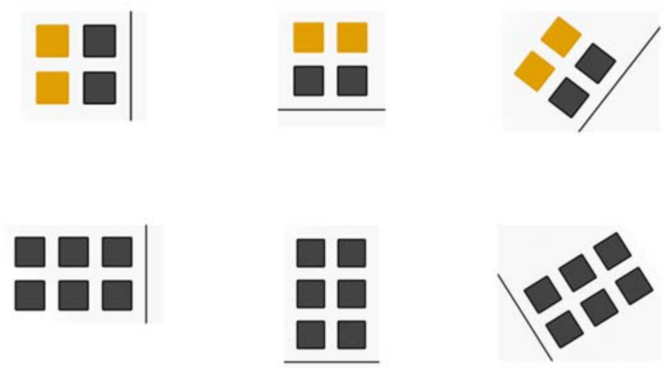
V popisovanej úlohe sú použité dve farby pre štvorce nachádzajúce sa v útvare – čierna a žltá. Podľa pomeru počtu štvorcov rôznej farby sú tvorené gradované úlohy. Pri tvorbe zadania úlohy, využitím aplikácie GeoGebra 3D Graphing Calculator, je možné vopred nadefinovať počet žltých a počet čiernych štvorcov, ako aj ich konfiguráciu. V závislosti od týchto kritérií existuje pomerne efektívna cesta pre tvorbu úloh rôznej náročnosti. Na obrázku 3 je ukážka pre útvar typu 2x2, kde každý štvorec je identifikovaný ako objekt (o1, o2, o3, o4), ktorému je priradená jedna z dvoch hodnôt (0 – čierna, 1 – žltá). Požadovanú hodnotu parametra volí a mení sám užívateľ zakliknutím prislúchajúcej možnosti. Voľbu počtu a rozmiestnenia štvorcov v závislosti od farby realizuje buď učiteľ alebo žiak. Tvorba vzoru môže byť náhodná, ale aj vopred naplánovaná s ohľadom na počet a konfiguráciu štvorcov rôznej farby. Parameter môže učiteľ prezentovať napríklad aj pomocou kódovania konkrétnych elementov (o1–1, o2–1, o3–0, o4–0). Pracujeme na vyššej úrovni abstrakcie v symbolickom móde, kde každému elementu je priradená daná vstupná hodnota, ktorá znamená voľbu farby.



Obrázok 3. Definovanie vstupných podmienok úlohy – počet štvorcov rôznej farby

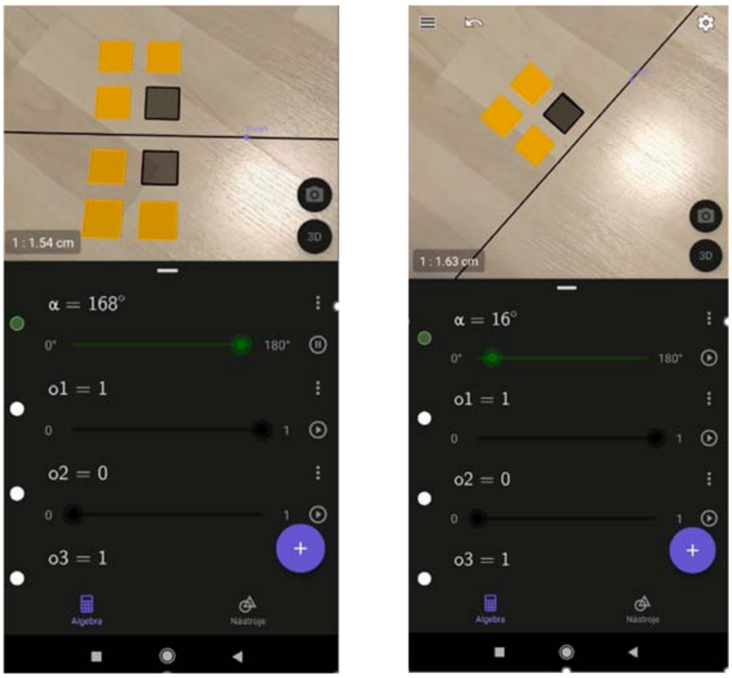
- Kritérium 3: orientácia osi súmernosti

Ďalším kritériom, na základe ktorého je možné tvoriť gradované úlohy, je orientácia osi súmernosti. Na najnižšej úrovni náročnosti je vhodné voliť úlohy, kde je os súmernosti orientovaná zvislo, pokračujeme s úlohami s vodorovnou osou súmernosti a nakoniec sú to úlohy, kde je potrebné pracovať s osou súmernosti umiestnenou „šikmo" (obrázok 4). Ramful, Ho & Lowrie (2015) uvádzajú, že v úlohách, kde je os súmernosti v inej pozícii ako vertikálnej, či horizontálnej, môže byť nápomocná práca so štvorcovou sieťou. V úlohách, kde je os súmernosti orientovaná „šikmo", žiaci často využívajú zmenu orientácie polohy osi na vertikálnu, ktorá je považovaná za najprirodzenejšiu.



Obrázok 4. Gradácia úlohy v závislosti od orientácie osi súmernosti

Pri použití technológie AR existuje možnosť vopred definovať orientáciu osi súmernosti. Pri práci s vytvoreným appletom, použitím aplikácie GeoGebra 3D Graphing Calculator, je možné vopred definovať aj tento vstupný údaj uchytením a otáčaním osi súmernosti (obrázok 5).



Obrázok 5. Definovanie vstupných podmienok úlohy – orientácia osi súmernosti

V závislosti od konkrétne zvoleného kritéria (kritérií) kognitívnej náročnosti sa dajú flexibilne tvoriť úlohy s ohľadom na úroveň poznatkov a myslenia cieľovej skupiny žiakov. Technológia rozšírenej reality predstavuje v procese tvorby úloh nástroj na definovanie a zmenu vstupných podmienok, na základe ktorých sú generované úlohy prispôsobené konkrétnemu žiakovi, či skupine žiakov.

3.2. Technológia AR v procese riešenia úlohy

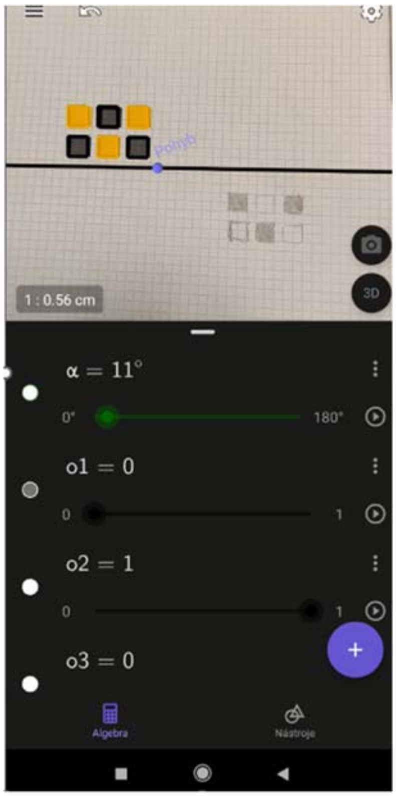
Technológia rozšírenej reality má potenciál nielen pri tvorbe úloh gradovaného charakteru na základe voľby vstupných kritérií, ale aj v procese riešenia úlohy, ako aj pri kontrole a overení korektnosti prezentovaného riešenia. Nástroje využívajúce technológiu rozšírenej reality je možné aplikovať v kontexte matematických úloh v troch etapách procesu riešenia úlohy:

- vstup – tvorba úloh rôznej náročnosti v závislosti od konkrétneho gradačného kritéria,
- proces – proces znázornenia riešenia, modelovanie procesu tvorby obrazu daného útvaru v osovej súmernosti,
- výstup – kontrola, overenie správnosti riešenia (vytvoreného obrazu).

Pri tvorbe a riešení úlohy je vhodné vytvoriť priestor na zoznámenie sa s funkcionalitami appletu, kedy má užívateľ možnosť skúmať princíp zadávania a zmeny vstupných kritérií v úlohe, mení farbu štvorcov, ich rozmiestnenie, oboznámi sa s ich kódovaním a spozná možnosti na zmenu orientácie osi súmernosti. Pri tvorbe zadania úlohy AR umožňuje učiteľovi efektívne pripraviť úlohy rôzneho typu bez toho, aby ich musel vopred editovať vo verzii pero-papier. Na druhej strane je tu aj možnosť pre žiaka samostatne si voliť typ úlohy v závislosti od jeho schopností, vyberať úlohy na rozličných úrovniach náročnosti a flexibilne prechádzať k úlohám náročnejším, ale aj k jednoduchším.

V danom type úlohy, kde ide o vytvorenie obrazu útvaru v osovej súmernosti, je technológia AR využitá v zmysle modelovania procesu tvorby obrazu, ktorý je prezentovaný dynamicky.

Použitie AR má význam aj v etape venovanej kontrole správnosti riešenia úlohy, kedy existuje viacero prístupov. Napríklad žiak má možnosť overiť si správnosť svojho riešenia vytvoreného vo verzii pero-papier a to tak, že objekt na mobilnom zariadení je nasmerovaný na vzor (na papieri), spustením tlačidla „pohyb" je prezentovaný proces tvorby obrazu. Ak je riešenie správne, potom vytvorený obraz (na papieri) je zhodný s obrazom vytvorenom v AR (obrázok 6).



Obrázok 6. Overenie správnosti riešenia úlohy pomocou technológie AR

V prípade, že má žiak problém s modelovaním, znázornením obrazu daného útvaru, tak má možnosť riešenie modelovať využitím AR. Výhoda AR je v tom, že proces je dynamický, žiak vidí, ako je obraz vzoru vytváraný.

4. Rozšírená realita pri rozvoji matematických schopností

Aplikácia rozšírenej reality pri riešení matematických úloh má potenciál aj z pohľadu rozvoja matematických schopností a schopnosti učiť sa. Prezentovaná úloha môže byť transformovaná na úlohu, ktorá je prostriedkom pre rozvíjanie kognitívnych schopností, ako predpokladu schopnosti učiť sa. Existencia možnosti modifikovať úroveň náročnosti úlohy vytvára priestor na zmenu vnímania úlohy ako na diagnostický prostriedok posúdenia kognitívnych deficitov žiakov (Prídavková & Kovalčíková, 2020). Predstavené sú návrhy na aplikáciu daného matematického obsahu s použitím technológie rozšírenej reality z pohľadu rozvoja matematických schopností.

- Učiteľ diktuje postupnosť čísel, napr. 1, 3, 4, predstavujúce kódy polohy štvorcov, ktoré budú žltej farby. Žiak podrží postupnosť čísel vo svojej pracovnej pamäti a modeluje objekt, vzor, ktorého obraz je potrebné vytvoriť v danej osovej súmernosti. Zvyšovaním úrovne náročnosti, napríklad z pohľadu počtu štvorcov, dochádza k rozvoju pracovnej pamäti.

- Jeden žiak (Z1) vytvorí vzor na svojom mobilnom zariadení, ten pretransformuje do kódu, ktorý nadiktuje druhému žiakovi (Z2). Kód identifikuje rozmiestnenie čiernych a žltých štvorcov vo vzore. Z2 modeluje na svojom mobilnom zariadení vzor na základe zadaného kódu. Nasleduje porovnanie vytvorených vzorov na mobilných zariadeniach oboch žiakov, ktoré by mali byť identické. Ak sú rozdielne, žiaci medzi sebou diskutujú a hľadajú príčiny vzniknutých rozdielov, čím je vytvorený priestor na rozvoj schopnosti argumentovať, analyzovať, identifikovať chyby a ich príčiny.
- Jeden žiak (Z1) vymodeluje vzor na svojom mobilnom zariadení. Druhý žiak (Z2) si ho prezrie, snaží sa zapamätať si ho a vymodelovať na svojom zariadení. V tomto prípade je rozvíjaná vizuálna pamäť, ako aj schopnosť komparácie.
- Vzor je prezentovaný v printovej podobe (na papieri, pracovnom liste). Úlohou žiaka je modelovať daný vzor na mobilnom zariadení (vizuálna pamäť). Modifikácia zadania: daný je obraz útvaru v printovej verzii, na papieri. Úlohou je vytvoriť na mobilnom zariadení vzor daného útvaru (obrazu) v danej osovej súmernosti, pričom orientáciu osi súmernosti je možné meniť podľa požadovanej úrovne náročnosti.

Existuje mnoho ďalších prístupov k modifikácii zadania a práce s úlohou prezentovaného typu. Treba zdôrazniť, že aplikáciou nástrojov využívajúcich technológiu rozšírenej reality sa vytvárajú podmienky pre rozvoj kognitívnych schopností nevyhnutných pre porozumenie konceptu osová súmernosť. Ako uvádzajú Kovalčíková & Prídavková (2021) v procese riešenia úlohy sú stimulované exekutívne funkcie (kognitívna flexibilita, analytická percepcia, pracovná pamäť, mentálna rotácia), ktoré predstavujú kľúčový determinant rozvoja schopnosti učiť sa.

5. Záver

Technológia rozšírenej reality (augmented reality - AR) predstavuje edukačný prostriedok podporujúci tvorbu modelov matematických konceptov a možností manipulácie s nimi (Hnatová & Hnat, 2019c). Výhody zaradenia nástrojov využívajúcich rozšírenú realitu vo vyučovaní vidíme v niekoľkých rovinách. Jednou z nich je možnosť modelovania rôznych typov reprezentácií daného konceptu, od enaktívnych, cez ikonické až po symbolické (Bruner, 1960). Využitie enaktívnych modelov v digitalizovanej forme prináša novú dimenziu v procese učenia sa z pohľadu skúmania vlastností a procesu znázorňovaniu útvaru v osovej súmernosti. Technológia AR dopĺňa, v niektorých prípadoch aj nahrádza, edukačné materiály v printovej podobe. V prezentovanej úlohe nástroje AR umožňujú efektívne a optimálne pripraviť úlohy rôznej úrovne náročnosti v závislosti od schopností konkrétneho žiaka. V neposlednom rade implementácia AR do procesu riešenia úloh na osovú súmernosť vytvára podmienky pre rozvíjanie priestorovej orientácie, pracovnej pamäti, schopnosti analyzovať, argumentovať, komparovať, zovšeobecňovať. Zmysel využívania digitálnych nástrojov pri rozvíjaní predstáv o pojme symetria potvrdzujú aj Hoyles & Healy (1997), podľa ktorých nástroje tohto typu predstavujú prostriedok na vnímanie vizuálnych vzťahov a symbolických reprezentácií. Skúmanie využívajúce dostupné digitálne technológie prispieva k obohateniu rôznych prístupov pri učení sa a vyučovaní problematiky priestorovej predstavivosti. Digitálne technológie poskytujú nové možnosti pre tvorbu reprezentácií, manipulácií a procesov z oblasti geometrie a vytvára sa tak priestor pre hlbšie konceptuálne porozumenie a prepojenie rôznych významov a spôsobov zaobchádzania (Jones & Tzekaki, 2016). Zaradenie nástrojov využívajúcich rozšírenú realitu v edukačnom procese má aj svoje limity, ako je napríklad možnosť odmietnutia AR zo strany učiteľov, potreba zmeny v obsahu a v prístupoch k vyučovaniu matematiky (Hnatová & Hnat, 2019b).

Prezentované boli prvotné námety návrhov využitia technológie rozšírenej reality do matematickej edukácie na primárnom stupni vzdelávania, konkrétne v tematickej oblasti osovej súmernosti. Súčasťou návrhov, vytváraných v rámci projektu KEGA 036PU-4/2021, bude príprava metodických podporných materiálov, ktoré budú postupne začlenené do vybraných oblastí pregraduálnej matematickej prípravy budúcich učiteľov primárneho stupňa vzdelávania. Technológia AR má potenciál pri rozvoji matematických schopností žiakov rôznej úrovne myslenia, predstavuje nástroj na tvorbu úloh gradovanej úrovne kognitívnej náročnosti a poskytuje možnosti pre úspešné riešenie matematických problémov rôznymi stratégiami. Prácu s materiálmi využívajúcimi technológiu AR možno považovať za jeden z prístupov pre obohatenie vyučovania v danej problematike.

Acknowledgements

Príspevok je výstupom grantového projektu KEGA 036PU-4/2021 *Technológia rozšírenej reality v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov elementaristov.*

Literatúra

Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Oxford, England: Harvard University Press.

Hnatová, J., & Hnat, A. (2019a). Rozšírená realita vo vzdelávaní. In: *Osvita u suspiľstvo 4.* (s. 100–108). Berďansk: Berďanskyj deržavnyj pedahohičnyj universitet.

Hnatová, J., & Hnat, A. (2019b). SWOT analýza zaradenia technológie rozšírenej reality do vzdelávania. In: *Miedzy teoria pedagogiczna a praktyka edukacijna. Annales Pedagogicae Nowy Sandes-Presoves VIII* (s. 75–83). Nowy Sacz: Poľsko.

Hnatová, J., & Hnat, A. (2019c). Rozšírená realita v testových položkách umožňujúcich interaktívne sebahodnotenie matematického výkonu edukanta. In: *Vysokoškolská edukácia pre „digitálnu" spoločnosť v „informačnej spoločnosti* (s. 8–19). Košice: TU v Košiciach.

Hoyles, C., & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *2*(1), 27–59.

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In: *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 109–149). Rotterdam: Sense.

Krevelen, R. V., & Poelman, R. (2010). A Survey of Augmented Reality Technologies, Applications and Limitations. *The International Journal of Virtual Reality*, 9 (2), 1–20. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.454.8190&rep=rep1&type=pdf.

Kovalčíková, I., & Prídavková, A. (2021). Dynamická stimulácia učebných schopností žiaka prostredníctvom matematickej úlohy. In: *Acta Paedagogicae. Presoves - Nova Sandes* (s. 85–93). Prešov: Vydavateľstvo PU.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teachers' knowledge. *Teachers College Record*, *108* (6), 1017–1054.

Prídavková, A., & Kovalčíková I. (2020). Osová súmernosť ako matematický, edukačný i kognitívny fenomén. *e-Pedagogogium,* 2020(3), 90–99. https://e-pedagogium.upol.cz/artkey/epd-202003-0007_osova-sumernost-ako-matematicky-edukacny-i-kognitivny-fenomen.php.

Patsiomitou, S. (2008). The Development of Students Geometrical Thinking through Transformational Processes and Interaction Techniques in a Dynamic Geometry Environment. In: *Issues in Informing Science and Information Technology.* 2008(5), 355–393. http://proceedings.informingscience.org/InSITE2008/IISITv5p353-393Pats457.pdf

Ramful, A., Ho, S. Y., & Lowrie, T. (2015). Visual and analytical strategies in spatial visualization: perspectives from bilateral symmetry and reflection. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(4), 443–470.

Sinclair, N., & Kaur, H. (2011). Young children's understanding of reflectional symmetry in a dynamic geometry environment. In B. Ubuz (Ed.), (2011). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Developing Mathematical Thinking*. (s. 193–200). Vol 4, Ankara, Turkey: PME.

Xistouri, X. (2007). Students´ ability in solving line symmery tasks. In: *How do students from primary school discovery the regularity.* (s. 526–535).

ANALÝZA VÝSLEDKOV MERANÍ TIMSS ŽIAKOV 4. ROČNÍKA ZÁKLADNEJ ŠKOLY V KOGNITÍVNYCH OBLASTIACH V MATEMATIKE

Edita ŠIMČÍKOVÁ, Blanka TOMKOVÁ
Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovensko)
edita.simcikova@unipo.sk, blanka.tomkova@unipo.sk

Abstrakt

Štúdia IEA TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) sa realizuje pravidelne v štvorročných cykloch od roku 1995 a od roku 2007 sa meraní zúčastňujú aj žiaci 4. ročníka základných škôl. Slovenská republika participuje na uvedených meraniach od počiatku.

Porovnaním výkonov žiakov v medzinárodnom meradle získavajú zúčastnené krajiny informáciu o výsledkoch vlastného vzdelávacieho systému. Základným indikátorom sú výkony žiakov v matematike a v prírodovedných predmetoch, ale aj indikátory kontextu a trendov vo vzdelávaní, ktoré sú aktualizované v jednotlivých cykloch meraní.

Príspevok je zameraný na analýzu výkonov žiakov 4. ročníka základnej školy z matematiky v kognitívnej oblasti. Cieľom príspevku je analyzovať dosiahnuté výsledky z hľadiska uplatnených kognitívnych oblastí a komparovať ich s krajinami EÚ susediacimi so Slovenskou republikou.

Kľúčové slová: testovanie TIMSS, kognitívne oblasti, matematická úloha

ANALYSIS OF ACHIEVEMENT: MATHEMATICS GRADE 4 IN TIMSS INTERNATIONAL RESULTS IN COGNITIVE DOMAINS

Abstract

The IEA TIMSS study has been carried out regularly in four-year cycles since 1995, and since 2007, students of the 4th grade of elementary schools also participate in the measurements. The Slovak Republic has participated in the mentioned measurements since the beginning.

By comparing the performance of pupils on an international scale, the participating countries obtain information about the results of their own education system. The basic indicator is the performance of students in mathematics and science subjects, but also indicators of the context and trends in education, which are updated in individual measurement cycles.

The paper is focused on the analysis of the performance of 4th grade elementary school students in mathematics in the cognitive field. The aim of the contribution is to analyze the achieved results from the point of view of applied cognitive areas and compare them with EU countries neighboring the Slovak Republic.

Keywords: TIMSS Assessment, cognitive domains, math task

1. Úvod

Koncepcia matematických úloh riešených v rámci štúdie TIMSS je tvorená dvoma oblasťami (dimenziami) – obsahovou a poznávacou (kognitívnou). Obsahovú oblasť vymedzuje učivo, ktoré je v úlohe zaradené. V rámci poznávacej oblasti sa rozlišujú kognitívne schopnosti, ktoré by žiaci mali uplatniť pri riešení úlohy. Pri meraní výkonov žiakov v matematike sú zohľadňované tri oblasti kognitívnych schopností: poznatky, aplikácia a uvažovanie. V matematických úlohách riešených v rámci štúdie TIMSS autori predpokladajú vyváženosť v zastúpení obsahu učiva aj vo využívaní kognitívnych schopností žiakov potrebných pre riešenie úlohy. Každá testová položka zaradená v štúdii je spojená s jednou obsahovou oblasťou a s jedným kognitívnym procesom, ktorý by mal žiak počas riešenia úlohy uplatniť.

Podľa štúdie TIMSS je v matematike vo 4. ročníku základnej školy rozdelenie úloh pre obsahové oblasti a pre oblasti kognitívnych schopností nasledovné:

Tabuľka 1. Rozdelenie úloh podľa štúdie TIMSS

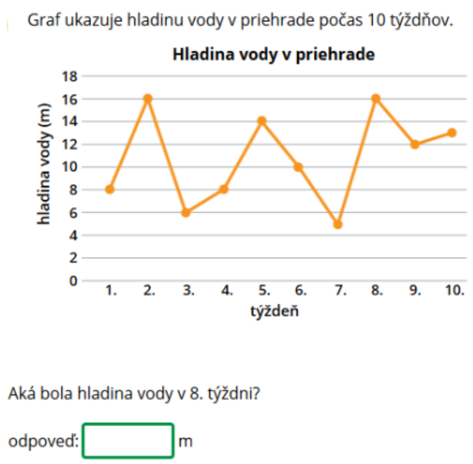
Čísla	50 %	**Poznatky**	40 %
Meranie a geometria	30 %	**Aplikácia poznatkov**	40 %
Dáta/Údaje	20 %	**Uvažovanie**	20 %

Obsahové zastúpenie učiva v testových položkách by malo rešpektovať pomerné zastúpenie učiva matematiky v národnom kurikule v danom ročníku základnej školy. Analogicky zastúpenie úloh zameraných na využitie kognitívnych schopností žiakov počas riešenia úloh možno považovať za adekvátne vzhľadom na špecifiká vekových a vývinových osobitostí žiakov.

Úlohy patriace do oblasti **poznatky** (*knowing*) sú úlohami, v ktorých riešenie závisí na matematických vedomostiach žiakov. Znalosť pojmov, faktov, konceptov a procedúr je predpokladom riešenia bežných matematických problémov. Úlohy zamerané na **aplikáciu poznatkov** (*applying*) zahŕňajú najmä riešenie problémov s využitím tých matematických poznatkov, ktoré sú žiakom známe, alebo ide o naučené postupy. Úlohy patriace do oblasti **uvažovanie** (*reasoning*) vyžadujú od žiakov schopnosť systematického a logického myslenia.

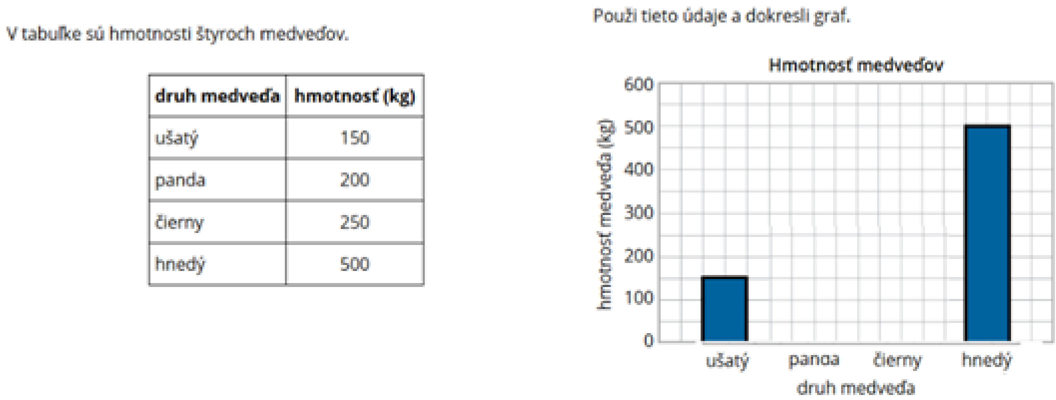
Príkladom úloh reprezentujúcich rôzne kognitívne oblasti sú napr. úlohy z obsahovej oblasti Dáta (Zobrazovanie údajov) zo zbierky uvoľnených úloh TIMSS 2019 matematika (2021).

Úloha zameraná na kognitívnu oblasť **poznatky** (obrázok 1). Žiak pre vyriešenie tejto úlohy potrebuje z oblasti poznatkov identifikovať v grafe údaje zobrazené na vodorovnej a zvislej osi, orientovať sa v grafe a vybrať požadovaný údaj.



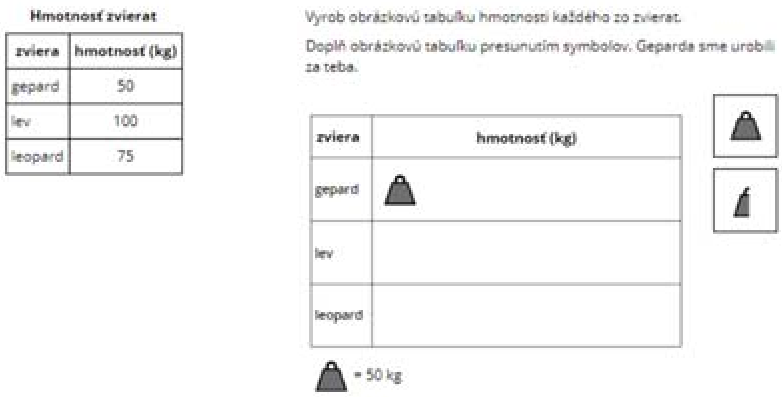
Obrázok 1. Úloha zameraná na kognitívnu oblasť poznatky.

Úloha zameraná na kognitívnu oblasť **aplikácia poznatkov** (obrázok 2). Pri riešení úlohy žiaci využívajú predchádzajúce poznatky z tvorby grafu a naučené postupy aplikujú pri prevode údajov z tabuľky do grafu.



Obrázok 2. Úloha zameraná na kognitívnu oblasť aplikácia poznatkov.

Úloha zameraná na kognitívnu oblasť **uvažovanie** (obrázok 3). Na vyriešenie úlohy žiakom nestačia poznatky o tvorbe tabuľky a orientácii v nej, ale potrebujú uplatniť aj vyššie kognitívne schopnosti, hlavne logické myslenie a systematické uvažovanie.



Obrázok 3. Úloha zameraná na kognitívnu oblasť uvažovanie

Obsahom príspevku nie je analýza jednotlivých testových položiek z hľadiska výsledkov výkonov žiakov, ale naším zámerom je porovnanie výkonov žiakov 4. ročníka základnej školy v matematike na Slovensku v jednotlivých ročníkoch meraní ale aj porovnanie s výkonmi žiakov v rámci vybraných krajín EÚ v jednotlivých kognitívnych oblastiach.

Pozornosť sústredíme na výsledky žiakov v krajinách, ktoré geopoliticky patria ku krajinám susediacim so Slovenskom. Výsledky komparácie predstavujú parciálne východiská zámerov projektu VEGA 1/0631/20.

2. Výsledky slovenských žiakov 4. ročníka základnej školy v štúdii TIMSS v matematike

V medzinárodnom teste z matematiky v roku 2019 dosiahli žiaci 4. ročníka základných škôl na Slovensku skóre 510 bodov, čo je (podľa tlačovej správy MŠVVaŠ SR z 8.12.2020) významne lepší výsledok v porovnaní s priemerom škály TIMSS (500 bodov). Napriek tomu je však tento výsledok výrazne nižší, ako je priemer krajín Európskej únie a krajín OECD.

Tabuľka 2. Bodové skóre v štúdii TIMSS v roku 2019

	priemerná úspešnosť
Priemer krajín OECD	529
Priemer krajín EÚ	527
Slovenská republika	**510**
Priemer škály TIMSS	500

Pri porovnaní výsledkov medzinárodných meraní TIMSS slovenských žiakov 4. ročníka v matematike od r. 2007 môžeme konštatovať, že v roku 2019 dosiahli najvyššiu úroveň. Došlo k štatisticky významnému zlepšeniu oproti rokom 2015 a 2007 a (rovnako ako v roku 2011) bol prekročený priemer škály TIMSS. Výkon slovenských žiakov 4. ročníka v matematike však bol podobne ako v r. 2019 aj v predchádzajúcich meraniach výrazne pod priemerom krajín OECD aj krajín EU.

Tabuľka 3. Bodové skóre slovenských žiakov 4. ročníka v štúdii TIMSS

Cyklus	**Priemerná úspešnosť**	**2015**	**2011**	**2007**
2019	**510**	**12🡅**	**3**	**14🡅**
2015	498	×	**- 9**	**2**
2011	507	×	×	**11**
2007	496	×	×	×

Pri porovnaní výsledkov úspešnosti slovenských žiakov 4. ročníka v kognitívnych oblastiach v matematike v rámci testovania TIMSS v rokoch 2007–2019 môžeme konštatovať, že:

- najlepšie výsledky v oblasti uvažovania a aplikácie poznatkov dosiahli v r. 2019,
- najlepšie výsledky v oblasti poznatkov dosiahli v r. 2011,
- v oblasti poznatkov a ich aplikácii dosiahli v r. 2019 porovnateľné výsledky s rokom 2011,
- výsledky žiakov v kognitívnej oblasti uvažovanie boli v každom roku merania vyššie ako ich výsledky v kognitívnej oblasti poznatky a aplikácia poznatkov.

Tabuľka 4. Bodové skóre slovenských žiakov 4. ročníka v jednotlivých kognitívnych oblastiach

Kognitívne oblasti	**skóre**			
	2019	**2015**	**2011**	**2007**
Poznatky	502	495	506	498
Aplikácia poznatkov	508	494	505	492
Uvažovanie	**522**	**506**	**511**	**499**

3. Výsledky slovenských žiakov 4. ročníka základnej školy v štúdii TIMSS v kognitívnych oblastiach matematiky v porovnaní s výsledkami žiakov susedných krajín

Rešpektujúc projektové zámery sústredíme pozornosť na analýzu výsledkov meraní TIMSS v rokoch 2019, 2015, 2011, 2007 v „*v štátoch stredoeurópskeho priestoru susediacich so Slovenskou republikou*“ (tab. 5). Porovnanie výsledkov žiakov SR a výsledkov žiakov vo vybraných krajín uvedieme aj graficky.

Z geopolitického hľadiska susedí Slovenská republika s piatimi štátmi – Českou republikou, Poľskom, Ukrajinou, Maďarskom a Rakúskom. Merania TIMSS sa okrem Ukrajiny zúčastňujú všetky štáty. Z dôvodu absencie Ukrajiny, ale aj vzhľadom na historické spolužitie Čechov a Slovákov v spoločnom štáte, sme do zoznamu porovnávaných krajín zaradili aj Nemecko.

Usporiadanie krajín v tab. 5 vychádza zo správy medzinárodných meraní (Mullis, Martin, Foy, Kelly, Fishbein 2020). Poradie štátov v tabuľke je vytvorené podľa priemernej úspešnosti žiakov v štúdii TIMSS z r. 2019. V tabuľke chýbajú údaje z niektorých meraní (Poľsko 2007 a Rakúsko 2015), keďže štúdie TIMSS neboli v daných krajinách vo 4. ročníku ZŠ v matematike realizované.

Tabuľka 5. Komparácia dosiahnutej úspešnosti žiakov v stredoeurópskych krajinách v rokoch 2019, 2015, 2011 a 2007

krajina	priemerná úspešnosť	poznatky	aplikácia	uvažovanie
Rakúsko	**539**	**540**	**538**	**537**
2015		x	x	x
2011		507	506	513
2007		504	505	516
Česká republika	**533**	**528**	**531**	**541**
2015		519	528	544
2011		502	512	523
2007		472	493	491
Maďarsko	**523**	**525**	**521**	**522**
2015		532	526	529
2011		519	513	514
2007		511	506	510
Nemecko	**521**	**523**	**514**	**531**
2015		524	515	535
2011		524	528	532
2007		515	530	530
Poľsko	**520**	**509**	**521**	**527**
2015		517	541	546
2011		475	480	493
2007		×	×	×
Slovenská republika	**510**	**502**	**508**	**522**
2015		495	494	506
2011		506	505	511
2007		498	492	499

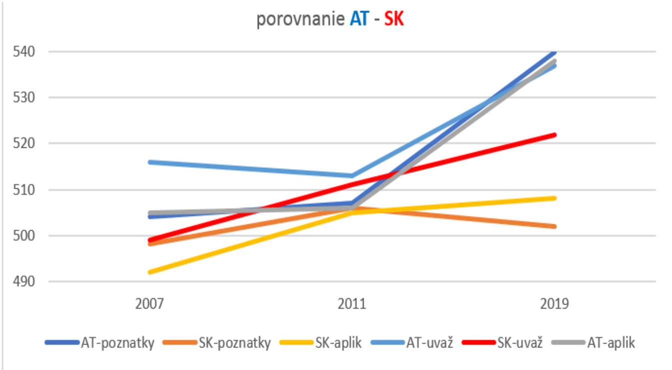
(*Zdroj: vlastné spracovanie podľa* Mullis, Martin, Foy, Kelly, Fishbein 2020)

Pri porovnaní výsledkov úspešnosti žiakov štátov (tab. 5) v r. 2019 v rámci kognitívnych oblastí, sme zistili, že poradie štátov by zostalo zachované iba v oblasti poznatky. V oblasti aplikácia poznatkov by Poľsko predbehlo Nemecko a v oblasti uvažovanie by sa poradie štátov zmenilo a bolo by nasledujúce: Česká republika – Rakúsko – Nemecko – Poľsko. Maďarsko a Slovensko by s dosiahnutou rovnakou úrovňou obsadili v tejto skupine štátov posledné miesto.

Z hľadiska úspešnosti využívania ktorejkoľvek kognitívnej oblasti dosahujú slovenskí žiaci v porovnaní so žiakmi susedných krajín najnižšiu úroveň.

Zaujíma nás, aké výsledky dosiahli slovenskí žiaci v porovnaní so žiakmi ľubovoľného štátu v kontexte histórie meraní. Pre tento účel údaje z tabuľky predkladáme v grafickej podobe. Poradie grafov kopíruje poradie priemernej úspešnosti žiakov podľa tab. 5, ale skúma úspešnosť podľa jednotlivých kognitívnych oblastí.

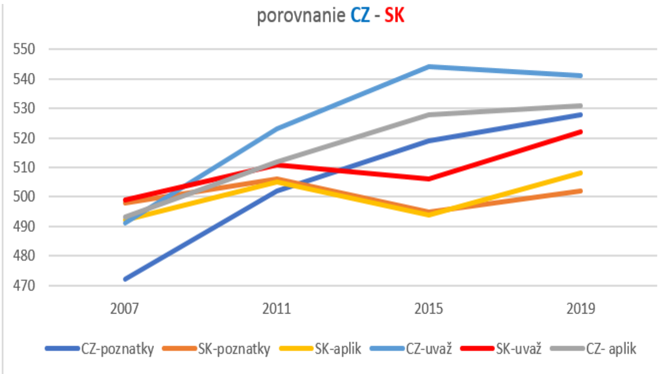
V meraniach v roku 2007 a 2011 boli rakúski žiaci významne úspešnejší v oblasti uvažovania ako v oblasti poznatkov a ich aplikácie podobne ako slovenskí žiaci. Z grafu 1 je evidentné, že rakúski žiaci dosiahli v poslednom meraní zlepšenie vo všetkých kognitívnych oblastiach, pričom významný posun nastal najmä v oblasti poznatkov a aplikácie poznatkov.



Graf 1. Vývoj úspešnosti rakúskych a slovenských žiakov v rokoch 2007, 2011 a 2019

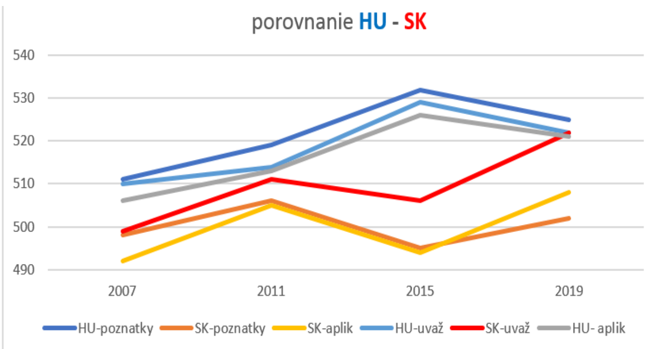
Úspešnosť riešenia úloh českých žiakov v kognitívnych oblastiach stúpala od roku 2007 až po rok 2019. Mierny pokles nastal (oproti r. 2015) iba v oblasti uvažovania. Napriek tomu je však Česká republika v tejto oblasti na 1. mieste v rámci sledovaných stredoeurópskych štátov.

Kým prvé meranie v r. 2007 ukázalo, že slovenskí žiaci boli výrazne lepší v oblasti poznatkov oproti českým žiakom a dosahovali vyrovnanú úspešnosť v ostatných kognitívnych oblastiach, v meraní v r. 2019 (graf 2) je evidentný výrazný posun českých žiakov oproti slovenským vo všetkých kognitívnych oblastiach.



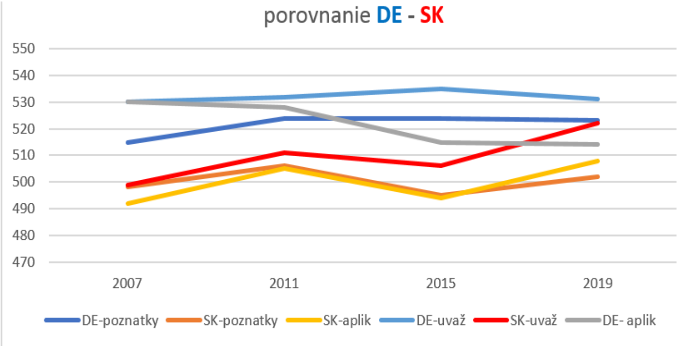
Graf 2. Vývoj úspešnosti českých a slovenských žiakov v rokoch 2007, 2011, 2015 a 2019

Úroveň poznatkov je u maďarských žiakov vždy najvyššia (graf 3). Najnižšiu úroveň dosahujú v aplikácii poznatkov. Od r. 2007 do r. 2015 sa úroveň maďarských žiakov zlepšovala vo všetkých kognitívnych oblastiach.



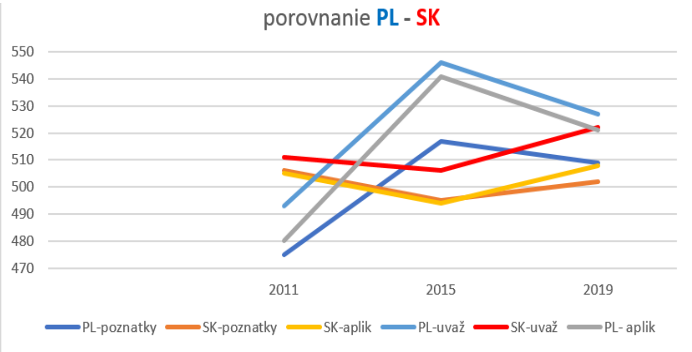
Graf 3. Vývoj úspešnosti maďarských a slovenských žiakov v rokoch 2007, 2011, 2015 a 2019

V poslednom meraní (graf 3) nastal pokles oproti r. 2015. Úroveň úspešnosti slovenských žiakov nekopíruje úroveň úspešnosti maďarských žiakov v jednotlivých meraniach, ale v meraní v r. 2019 sú výsledky v oblasti uvažovania u žiakov oboch krajín rovnaké.



Graf 4. Vývoj úspešnosti nemeckých a slovenských žiakov v rokoch 2007, 2011, 2015 a 2019

Výsledky úspešnosti nemeckých žiakov v kognitívnych oblastiach poznatky a uvažovanie dosahujú v jednotlivých meraniach vyrovnanú úroveň (graf 4). Výrazný pokles nastal v oblasti aplikácie poznatkov, kým u slovenských žiakov to bolo naopak. Žiaci oboch krajín dosahujú nižšiu úroveň úspešnosti v oblasti poznatkov ako v oblasti uvažovanie.



Graf 5. Vývoj úspešnosti poľských a slovenských žiakov v rokoch 2011, 2015 a 2019

Vo všetkých meraniach sa ukázalo, že úspešnosť poľských aj slovenských žiakov bola v oblasti poznatkov nižšia ako v oblasti uvažovania. V r. 2011 bola úspešnosť poľských žiakov vo všetkých kognitívnych oblastiach štatisticky významne nižšia ako úspešnosť slovenských žiakov (graf 5). V r. 2015 zaznamenali poľskí žiaci štatisticky významný nárast vo všetkých sledovaných kognitívnych oblastiach, kým u slovenských žiakov nastal pokles. V r. 2019 sa situácia zmenila (nárast úspešnosti slovenských žiakov a pokles úspešnosti poľských žiakov oproti r. 2015). Napriek tomu sú poľskí žiaci v jednotlivých kognitívnych oblastiach úspešnejší ako slovenskí žiaci.

4. Záver

Na základe porovnania úspešnosti žiakov 4. ročníka základnej školy v medzinárodnom testovaní TIMSS z matematiky na Slovensku (r. 2007 – r. 2019) v kognitívnej oblasti sme očakávali, že slovenskí žiaci dosiahnu (naj)vyššiu úroveň v oblasti poznatkov a (naj)nižšiu úroveň v oblasti uvažovania. Predpokladali sme to vzhľadom na profil absolventa primárneho vzdelávania v matematike uvedený vo vzdelávacích štandardoch z matematiky v príslušných kurikulárnych dokumentoch, ale aj preto, že v kognitívnej psychológii v rámci taxonómie poznávacích funkcií je úroveň poznatkov nižšia ako úroveň uvažovania.

Naše predpoklady sa nenaplnili, čo môže byť ovplyvnené (okrem indikátorov uvedených v správe TIMSS 2019) aj osobnosťou učiteľa a jeho prístupom k výučbe matematiky, učebnými zdrojmi, alebo koncentrovanou prípravou žiakov na riešenie úloh zadávaných v národných a medzinárodných meraniach.

Napriek tomu, že úroveň, ktorú dosiahli slovenskí žiaci v r. 2019 bola najvyššia (oproti ostatným ročníkom), je nižšia ako v susedných krajinách. Slovenskí žiaci 4. ročníka dosiahli v porovnaní s ostatnými krajinami najnižšiu úroveň v kognitívnych oblastiach poznatky a ich aplikácia a v oblasti uvažovanie dosiahli úroveň porovnateľnú s Maďarskom, ale nižšiu, ako bola úroveň úspešnosti riešenia v ostatných sledovaných krajinách.

Všetky susedné krajiny dosahujú vyššiu úspešnosť v jednotlivých kognitívnych oblastiach ako žiaci na Slovensku. Rast úrovne úspešnosti riešenia úloh v Rakúsku a Českej republike je stúpajúci. V Nemecku je úroveň úspešnosti dosiahnutá v jednotlivých ročníkoch vyrovnaná (ale vyššia ako na Slovensku). V Poľsku a Maďarsku nastal nárast úrovne úspešnosti vo všetkých troch kognitívnych oblastiach v roku 2015, ale pokles v roku 2019.

Komparatívna analýza bude podkladom pre ďalšie parciálne výstupy súvisiace s plnením zámerov projektu VEGA 1/0631/20.

Acknowledgements

Príspevok je čiastkovým výstupom projektu VEGA 1/0631/20 Matematika v primárnom vzdelávaní – analýza v medzinárodnom kontexte a identifikácia kategórií determinujúcich kvalitné matematické vzdelávanie na úrovni ISCED 1 riešeného na KME PF PU v Prešove.

Literatúra

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D., & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science.* Retrieved from Boston College: TIMSS & PIRLS International Study. http://timssandpirls.bc.edu/timss2019/international-results/.

TIMSS 2019 - Výsledky medzinárodného merania vedomostí a zručností žiakov štvrtého ročníka ZŠ v matematike a prírodných vedách (2020). Bratislava: NÚCEM. https://www.nucem.sk/dl/4836/Tlacova%20sprava%20TIMSS%202019_NUCEM.pdf.

Tlačová správa ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR TIMSS 2019 - Výsledky medzinárodného merania vedomostí a zručností žiakov štvrtého ročníka ZŠ v matematike a prírodných vedách. https://www2.nucem.sk/dl/4836/Tlacova sprava TIMSS 2019_NUCEM.pdf.

Uvoľnené úlohy TIMSS 2019 matematika (2021). Bratislava: NÚCEM. https://www2.nucem.sk/dl/4838/Uvoľnené úlohy matematika TIMSS 2019.pdf.

ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL

Editorial Office: Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

Address: Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Phone: +420 58 563 5709

E-mail: emej@upol.cz

Electronic edition: http://emejournal.upol.cz/issues

2022

Vol. 4, No. 1

ISSN 2694-8133