DIAGNOSTICKÝ POTENCIÁL GRADOVANÝCH ÚLOH

Renáta ZEMANOVÁ[1], Darina JIROTKOVÁ[2]
[1] Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
[2] Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta (Česká republika)
renata.zemanova@osu.cz, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz

Abstrakt

V článku je představen nástroj, jehož diagnostický potenciál byl využit ke zkoumání aritmetických kognitivních i metakognitivních schopností žáků 4. roč. ZŠ při online výuce v r. 2020/2021. Nástrojem je série gradovaných úloh z prostředí Sčítací trojúhelníky. Podrobně jsou popsány parametry gradace úloh a vzhledem k nim byla provedena analýza žákovských řešení. Pozornost byla věnována žákovským chybám, popisu jejich charakteru a na spekulativní úrovni byla odhalována jejich příčina.

Výsledky analýz v rámci třídy i v rámci různých souborů úloh byly komparovány. Jednotlivá zjištění jsou podkladem pro následnou práci s daným žákem tak, aby se efektivně rozvíjel, překonal příčiny chyby, miskoncepce, epistemologické překážky. Je poukázáno na možnosti využití získaného materiálu i v pregraduální přípravě budoucích učitelů elementaristů.

Klíčová slova: sčítací trojúhelníky, online výuka, gradační parametry úloh, analýza žákovských řešení, práce s chybou, sčítání, odčítání, symetrie, algebrogram, zobecňování

DIAGNOSTIC POTENTIAL OF TASKS OF ENVIRONMENTS OF ADDITION TRIANGLES IN ONLINE EDUCATION

Abstract

The article presents a tool whose diagnostic potential was used to investigate the arithmetic cognitive and metacognitive abilities of 4 grade pupils in online teaching in 2020/2021. The tool is a series of graded tasks from the didactical environment Additive Triangles. The parameters of task gradation are described in detail. Due to them an analysis of pupils´ solutions was done. Attention was paid to the pupil's mistakes, the description of its character and its cause was revealed on a speculative level.

The results of the analyses were compared. The findings enabled to set tasks for follow up work with the pupil so that he/she can develop effectively or helped to formulate a re-education process to overcome the cause of mistake, misconception, epistemological obstacles. The possibilities of how to use the acquired material in the undergraduate training of prospective elementarists are pointed out.

Keywords: additive triangles, online teaching, parameters of graded tasks, analysis of pupils' solutions, work with mistake, addition, subtraction, symmetry, algebrogram, generalization

ISSN 2694-8133

1. Úvod

Učitel, který usiluje o rozvoj každého jednoho žáka do jeho maximální úrovně v různých směrech – kognitivních, metakognitivních, osobnostních, pečlivě plánuje své výukové hodiny, formuluje cíle, strukturu, obsah, formy atd. Pro kvalitní výuku je klíčové, aby si učitel stanovil cíle, a to jak krátkodobé, tak i dlouhodobé a vzhledem k nim naplánoval, jaké důkazy o učení jednotlivých žáků v průběhu hodiny může očekávat. Mluvíme o vyučování založeném na důkazech (evidence based teaching). Pro učitele je tento koncept detailně rozpracován a teorií argumentován např. v publikaci Pettyho (2009). Učitel při výuce žáky průběžně diagnostikuje, diagnostikuje jak jejich myšlenkové procesy, tak jejich procesy učení. Tím se práce učitele nikdy nestane pouhou rutinou, každý žák je jedinečný, s individuálními potřebami i způsobem učení se. Požadavek na respektování různosti žáků, jejich individuálních potřeb a jejich práva na to být vzděláváni v příznivém klimatu (Keller-Schneider, 2020) je silný zejména na učitele primárního i preprimárního vzdělávání. Proto je průběžná diagnostika žáků pro učitele vždy velkou výzvou. J. Hoth et al. (Hoth et al., 2016) poukazují na značnou různost v tom, jak učitelé pracují s diagnostickými úlohami a jak na diagnostiku nahlížejí. V souladu s autory Hoth, et al. (2016) budeme učitelovy schopnosti diagnostikovat své žáky vnímat jako schopnost odhalit a popsat jevy učení, odhalit žákovy prekoncepty, odhalit a popsat jeho obtíže, odhadnout příčiny obtíží, popsat dosaženou kognitivní úroveň žáka v daném čase a v dané oblasti a schopnost navrhnout následný edukační či reedukační proces v zóně žákova nejbližšího vývoje (Vygotskij, 1970). V prezenční výuce do procesu diagnostiky vstupuje žákovo chování, jak matematické, tak sociální. Diagnostika žáků v online výuce je ochuzena o mnoho parametrů žákova chování, učitel nevidí žákovu hru těla, gesta a mimiku a komunikaci se spolužákem, třídou apod. a diagnostika je tedy mnohem náročnější.

V našem výzkumu jsme ověřili, že série obtížnostně gradovaných úloh může být pro učitele dobrý nástroj diagnostiky zejména při online výuce. Využili jsme naše znalosti a zkušenosti s jedním didaktickým matematickým prostředím, sčítací trojúhelníky, a rozpracovali zde sérii obtížnostně gradovaných úloh. Podrobně jsme popsali gradační parametry.

Pojem didaktické matematické prostředí, nebo též v českém didaktickém prostředí používaný termín podnětné výukové prostředí (substantial learning environment) přinesl do didaktiky matematiky německý badatel E. Wittmann (2001), který navázal na myšlenky o procesu učení Deweye (1938), Piageta (2010), Freudenthala (1991). Wittmann zejména požadoval, aby žáci měli možnost řešením úloh v daném prostředí odhalovat zákonitosti a klíčové matematické pojmy.

M. Hejný pojem didaktické matematické prostředí precizoval a formuloval 4 kritéria (Hejný, 2014, s. 13). Z nich zmíníme tři, která jsou důležitá pro naše cíle: úlohy v daném prostředí lze formulovat tak, aby byly přiměřené daným žákům, mají nastavitelnou obtížnost a byly využitelné dlouhodobě. Tedy aby bylo možné nastavit obtížnost úloh od velice jednoduchých pro nejmladší žáky, či nejméně zdatné žáky, až po značně náročné pro žáky starší či matematicky zdatné. Tedy lze formulovat například do jedné vyučovací hodiny úlohy tak, aby na ně dosáhli žáci sice jedné třídy, ale širokého spektra kognitivních schopností.

2. Sčítací trojúhelníky

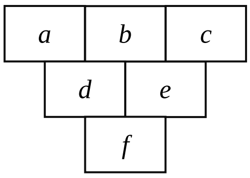
Úlohy, které jsou rozpracovány do podoby celého didaktického matematického prostředí Sčítací trojúhelníky, jsou inspirovány úlohami typu číselná zeď (number wall) z publikace (Wittmann & Müller, 1990). Pro svou grafickou podobu jsou též často na různých místech používány[1] s názvem pyramidy či hrozny.

---

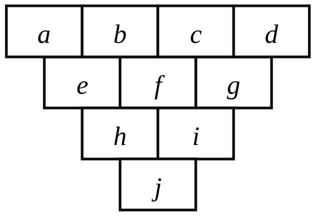
[1] https://sites.google.com/site/funproblemsolving/mathclub-problems/number-wall
https://www.youtube.com/watch?v=-kyV0ai_oGU

ISSN 2694-8133

Sčítacím trojúhelníkem rozumíme číselnou strukturu zapsanou v grafice uvedené na obrázcích 1. a 2. Podle počtu oken v horní řádce budeme mluvit o trojúhelnících 3., 4., … *n*-tého řádu, nebo též trojúhelnících tříúrovňových, resp. čytřúrovňových.



Obrázek 1. Trojúhelník 3. řádu



Obrázek 2. Trojúhelník 4. řádu

Pro naši další potřebu označíme čísla v jednotlivých oknech obecně pomocí 6 písmen *a, b, c, d, e, f* pro trojúhelník 3. řádu, případně pomocí 10 písmen *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j* pro trojúhelník 4. řádu. Strukturu čísel vytváří tyto základní vztahy: součet dvou čísel umístěných do polí vedle sebe je zapsán pod nimi, např. na obrázku 1. je $a + b = d$. Takové trojice jsou v trojúhelníku na obrázku 1. tři a na obrázku 2. jich najdeme šest. O dalších vazbách v této struktuře se zmíníme níže.

Při didaktickém využití sčítacích trojúhelníků v matematice je samozřejmě vhodné s nejmenšími žáky začínat s trojúhelníky 2. řádu. V našem experimentu jsme pracovali s trojúhelníky 3. a 4. řádu.

Vhodný způsob, jak tvořit konkrétní úlohy, je začít doplněným trojúhelníkem a z něj vymazat čísla z některých políček. Řešit úlohu pak znamená do prázdných políček doplnit čísla tak, aby platily dané základní vazby. Je zřejmé, že úloha je jednoznačně řešitelná, pokud budou prázdná 1–3 políčka u trojúhelníku 3. řádu, 1–*n* políček u trojúhelníku *n*-tého řádu.

Dále se budeme věnovat trojúhelníkům 3. řádu. Pro úlohy budeme rozlišovat čtyři odlišné situace: je zadána skupina čísel, která

- nejsou na sobě závislá (tj. nelze některé z nich dopočítat z ostatních, např. čísla *a, b, d* jsou na sobě závislá, neboť $a + b = d$) a jejich počet je takový, že úloha je jednoznačně řešitelná. Taková skupina se nazývá bazí trojúhelníka (Hejný, Hejná, 1998; Žáková, 2009). Didakticky se jedná o základní typ úloh.
- nejsou na sobě závislá (tj. nelze některé dopočítat z jiných dosazením do trojúhelníka) a jejich počet je menší, než je počet prvků baze a úloha má tak více nebo nekonečně mnoho řešení. Didakticky se jedná o náročnější situaci, kdy žák hledá parametrický systém řešení, tedy úlohy mohou vést ke zobecnění nějakého vztahu mezi čísly ve struktuře, případně pracuje s doplňujícími podmínkami.
- jsou na sobě závislá, ale lze z nich vybrat různé baze, tzn. počet zadaných prvků je větší než počet prvků baze. Didakticky se jedná zejména o úlohy, kdy se žák může sám ujistit o správnosti výpočtu, tedy je lze využít i v reedukačních postupech.
- jsou na sobě závislá, ale nelze z nich vybrat bazi (např. trojice *a, b, d*). Taková úloha má pak nekonečně mnoho řešení. Patří tak do náročnějších úloh. Nabízí prostor pro další práci se zadáním úlohy, např. zvolit čtvrtý prvek tak, aby řešení úlohy splnilo jistou zadanou podmínku.

Gradačními parametry úloh jsou: A. počet zadaných čísel (viz výše), B. pozice zadaných čísel, C. číselný obor zadaných čísel.

3. Gradační parametry úloh s jednoznačným řešením

Dále se budeme věnovat jen úlohám, kdy je zadaná baze trojúhelníka 3. řádu a budeme uvažovat gradační parametr B. Uvedeme jednotlivé případy v takovém pořadí, které podle našich kritérií stupňuje obtížnost. Ale o tom, jak je daná úloha pro konkrétního žáka obtížná, rozhoduje sám daný žák. U každého to může být nastaveno jinak.

1. Nejjednodušší úlohou je zadání baze a, b, c . Zde je možno snadno dopočítat $d = a + b$, $e = b + c$, $f = d + e$. Při řešení je potřeba použít třikrát operaci sčítání a řešení probíhá jedním směrem v trojúhelníku.
2. Obtížnější úlohou je zadání baze a, b, e (resp. symetrické baze b, c, d). Zde je možné dopočítat $c = e – b$, $d = a + b$, $f = d + e$. Obdobnou úroveň gradace má zadání baze a, c, d, resp. symetricky a, c, e, kdy stejným způsobem počítáme b a další neznámá čísla. Při řešení je potřeba použít dvakrát operaci sčítání a jednou operaci odčítání. Řešení tedy neprobíhá jedním směrem v trojúhelníku.
3. Náročnější variantou je zadání baze a, d, e (resp. symetrická baze c, d, e). Zde je potřeba provést jednou sčítání a dvakrát odčítání ($f = d + e$, $b = d – a$, $c = e – b$).
4. Další je zadání baze a, d, f případně dalších kombinací, kdy je potřeba provést třikrát operaci odčítání ($b = d – a$, $e = f – d$, $c = e – b$).
5. Zajímavé je ještě zadání baze a, c, f. Zde není ihned patrné, jaký výpočet je potřeba provést. Žák, který nezná vazbu mezi těmito zadanými čísly trojúhelníku ($f = a + 2b + c$), bude nejspíše řešit metodou pokus - ověření - korekce (Eisenmann a kol., 2015, s. 540).

Kromě základních vazeb, kterých se využívá v bodech 1-4, Hejný v (Hejný, Hejná, 1998) uvádí i vazby odvozené, např. tu v bodě 5. nebo vazbu $a + e = c + d$, $a + e = f – b$. Prostředí tak kromě rozvoje kalkulativních dovedností nabízí též příležitost k rozvoji schopností zobecňovat a odhalovat zákonitosti dané struktury čísel.

4. Metodologie

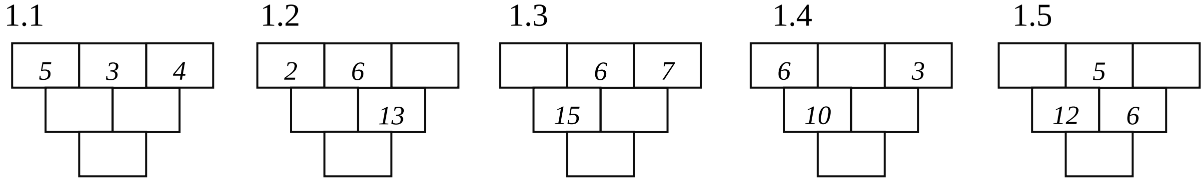
Subjekty našeho výzkumu byli žáci a jejich třídní učitel jedné třídy 4. ročníku na ZŠ Zdeňka Škarvady v Ostravě – Porubě. Počet žáků, kteří se výzkumu účastnili, byl 20. Výzkumná data byla sbírána v prvním pololetí školního roku 2020/21. Výzkum je součástí projektu *Inovace ŠVP ve školních družinách a diferenciace výuky matematiky na 1. stupni ZŠ* v operačním programu *Výzkum, vývoj a vzdělávání*. Řešitelem projektu je společnost H-mat, o.p.s. a první autorka článku je členkou řešitelského týmu. Doba řešení projektu je r. 2020-2022.

Nástrojem našeho výzkumu byl jeden z úkolů řešených v projektu: Třídní učitel naší třídy obdržel podrobný popis didaktického prostředí *Sčítací trojúhelníky* s typovými úlohami uspořádanými do gradovaných sérií a doplněnými didaktickými komentáři, které průběžně využíval ve výuce. Na základě vlastních zkušeností se žáky sestavil sérii gradovaných úloh tak, aby očekávaná doba řešení nepřesáhla 40 minut. Toto byl první materiál naší výzkumné databáze. Tuto sérii úloh zadal žákům k řešení při online výuce. Žákovská řešení a řešitelské strategie pak analyzoval. Na základě výsledků analýz, odhalených problémů a chyb navrhnul následné úlohy, které plnily reedukační roli. Žáci řešili úlohy samostatně, učitel se ujal role experimentátora, žáky jen pozoroval, ale nevstupoval do průběhu jejich řešení. Výsledná řešení žáci online předali učiteli.

Databázi našeho výzkumu tvoří již zmíněná učitelem sestavená série úloh pěti typů s jeho písemnými komentáři a žákovská řešení série úloh. Komentáře uvádíme pro každou následující úlohu.

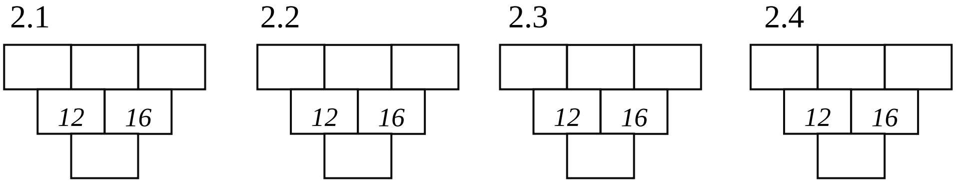
ISSN 2694-8133

Úloha 1: Doplň scházející čísla.



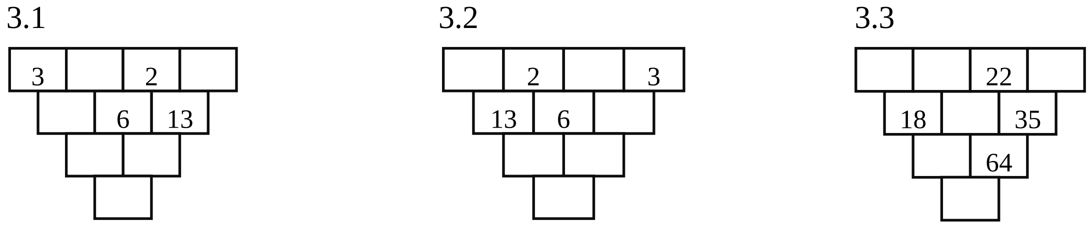
Podle učitele je gradačním parametrem pozice zadaných čísel, která určuje, jakou operaci je nutno provést a popřípadě určuje i pořadí operací. V úloze 1.1 je zadána nejjednodušší baze *a, b, c* a je potřeba provést třikrát operaci sčítání. Úlohy 1.2 a 1.3 mají symetrické baze *a, b, e – b, c, d* a provádíme jednou odčítání a dvakrát sčítání. Úlohu 1.3 považuje pan učitel za obtížnější vzhledem k neznámé hodnotě čísla *a*. Úloha 1.4. obsahuje bazi *a, c, d* a počtem a druhem operací v řešení odpovídá zadání úloh 1.2 a 1.3. Je považována za obtížnější, neboť jako první je nutno provést operaci odčítání a teprve pak dvakrát operaci sčítání. Úloha 1.5 je považována za nejobtížnější, neboť je nutné dvakrát odčítat a jednou sčítat. Pořadí operací si může řešitel volit.

Úloha 2: Doplň scházející čísla.



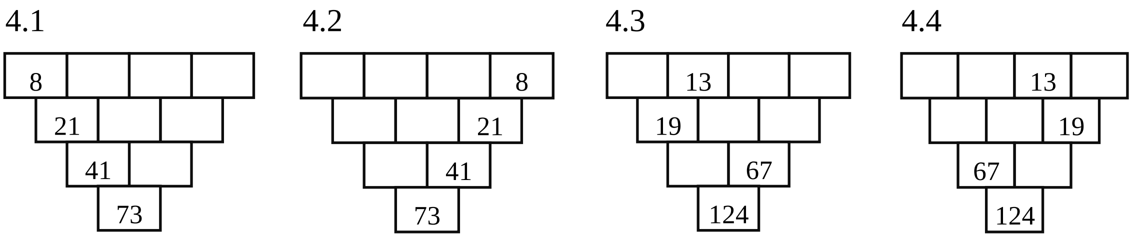
Učitel tuto úlohu zařadil s cílem diagnostikovat žákovo porozumění rozkladu čísel, žákovu schopnost systematičnosti řešení, schopnost zobecňování řešení a objevování vztahu mezi prvky trojúhelníku. Přesto, že existuje více řešení (v oboru celých čísel nekonečně mnoho), nabídl jen čtyři trojúhelníky s cílem diagnostikovat potřebu žáka nacházet další, případně všechny řešení, i když k tomu není vyzván.

Úloha 3: Doplň scházející čísla.



Učitel zadal trojúhelníky 3.1 a 3.2 symetricky. To mu umožnilo diagnostikovat metakognitivní schopnost žáka využívat symetrického zadání pro symetrické řešení. Přidal další gradační parametr – použil trojúhelníky 4. řádu. Trojúhelník 3.3 je podle něj nejobtížnější vzhledem k pozici zadaných čísel i jejich hodnotě. V této úloze se tedy objevují všechny typy gradačních parametrů, které jsme popsali v teoretickém úvodu.

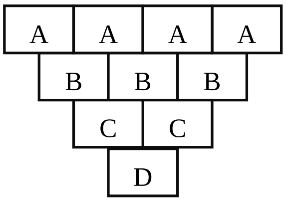
Úloha 4: Doplň scházející čísla.



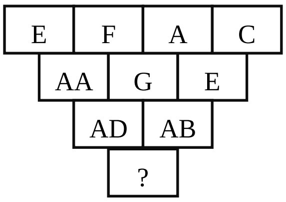
Učitel opět zadal úlohy 4.1 a 4.2 symetricky, aby porovnal diagnostiku z úloh 3.1 a 3.2. Úlohy jsou obtížnější umístěním prvků baze i jejich hodnotou. Totéž provedl s úlohami 4.3 a 4.4. Tyto považuje za obtížnější umístěním prvků baze i jejich hodnotou.

Úloha 5: Vyřeš algebrogramy.

5.1



5.2



V učitelově zadání úloh jsme identifikovali diagnostické jevy, které v odstavci 5 detailně analyzujeme. Jevy jsme rozdělili do dvou tříd: 1. jevy související se zadáním úlohy, 2. jevy související s žákovským řešením.

1. Úroveň trojúhelníků, Hodnota čísel, Více řešení, Symetrie, Algebrogram
2. Strategie řešení úlohy $a + b = c$, Symetrie, Systematičnost, Zobecňování

Vzhledem k těmto jevům byla vedena jevová a následně komparativní analýza žákovských řešení. V rámci každého jevu jsme sledovali:

1) zda žák chybuje a pokud ano, co je příčinou,

2) řešitelskou strategii.

Pro analýzu jsme použili tabulky, pro každý jev samostatnou tabulku. Tabulka 1 ilustruje evidenci jevu systematičnost v žákovských řešeních. V prvním sloupci uvádíme kód experimentu a žáka (01-03 znamená experiment 01, žák 03). V následujících sloupcích uvádíme čísla úloh, ve kterých se jev vyskytl (zde úlohy 2 a 5.2). Tyto sloupce jsou pro jednotlivé úlohy rozděleny na několik sloupců podle potřeby. Zde obě úlohy se dělí na dva sloupce: „chyby“ (chybuje – popis chyby, nechybuje 0) a „strategie“ (popis strategie buď konkrétně, nebo ano/ne ve vztahu ke sledovanému jevu ve smyslu „používá“/„nepoužívá“, nebo N – nelze zjistit). Pokud žák úlohu neřešil, uvádíme x. V úloze 5.2 jsme sledovali strategie nalezení dalších řešení, tedy pokud žák našel jen 1 nebo žádné řešení, není strategie dále popisována.

Tabulka 1: Ilustrace záznamu dat

	Úloha 2		Úloha 5.2	
	chyby	strategie	chyby	strategie
01-01	0	začíná rozkladem čísla 12 na 6 a 6, dále nemá žádný viditelný systém	0	jen 1 řešení
01-02	0	ANO – začíná rozkladem čísla 12 na 6 a 6, pak použije symetrické rozklady 7 a 5, 5 a 7	nenašel žádné řešení	0 řešení
01-03	0	začíná rozkladem čísla 12 na 3 a 9, nemá žádný viditelný systém	nenašel žádné řešení	0 řešení
01-04	0	rozklad čísla na 6 a 6 má až druhý, jinak viditelný systém není	nenašel žádné řešení	0 řešení
01-05	0	začíná rozkladem 16 na 8 a 8 (tedy zprava), pokračuje 9 a 7, ale dále nemá viditelný systém (očekávali bychom 10, 6 atd.)	0	jen 1 řešení
01-06 atd.	0	používá oba možné rozklady: 12 na 6 a 6, 16 na 8 a 8 (všiml si toho od 2. úlohy), další viditelný systém nemá	0	jen 1 řešení

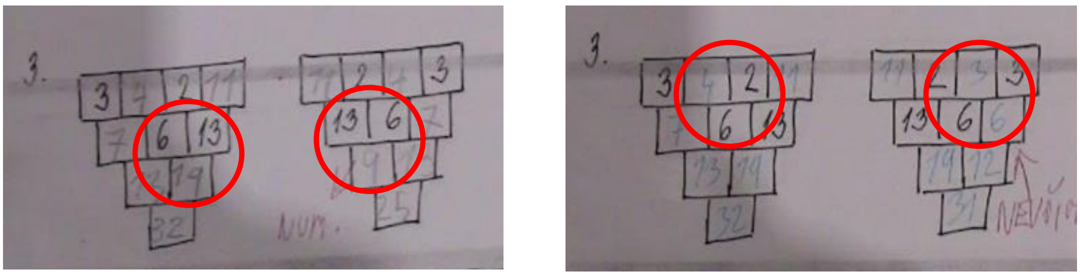
5. Výsledky

Žákovská řešení jsme analyzovali podle jednotlivých diagnostických jevů popsaných v Metodologii. Zpracováváme slovně, tabelárně a tam, kde to má smysl, ilustrujeme ukázkou žákovských prací (autorem dopisovaných poznámek k řešení je učitel).

Úroveň trojúhelníků se na úspěšnosti řešení projevila (tabulka 2). V tříúrovňových trojúhelnících (úlohy 1–2) nechyboval nikdo, ve čtyřúrovňových trojúhelnících (úlohy 3–5) 10 žáků, tj. 50 %. Chyby se vyskytly ve všech úlohách 3–5 s výjimkou úloh 3.1, 4.1 a 4.2. Z toho lze usoudit, že čtyřúrovňový trojúhelník nižší obtížnosti (umístění čísel 4.1 a 4.2) problém není. Chybovost se zvyšuje u čtyřúrovňového trojúhelníku s vyšší obtížností (umístění čísel 3.3, 4.3 a 4.4.). Dva žáci chybovali v úloze 3.2 přesto, že symetrickou úlohu 3.1 měli bez chyby (obr. 2). Zde za příčinu chyby považujeme neznámou pozici levého horního čísla v 3.2 na rozdíl od známé pozice téhož čísla v 3.1. Výsledky ukazují, že čtyřem žákům vyšší úroveň trojúhelníku potíže činí (žáci 11, 12, 18, 20), deseti žákům nečiní (01–08, 17, 19) a u šesti žáků nelze určit (9, 10, 13–16), protože se u nich vyskytují jak správné, tak chybné výsledky úloh srovnatelné obtížnosti.

Tabulka 2: Úroveň trojúhelníků, výsledky žáků

	Úlohy 1, 2	**Úlohy 3 - 5**	**potíže**		**Úlohy 1, 2**	**Úlohy 3 - 5**	**potíže**
žák	**chyby**	**chyby**		**žák**	**chyby**	**chyby**	
01-01	0	0	ne	01-11	0	4.2	ano
01-02	0	0	ne	01-12	0	3.3., 4.3., 4.4.	ano
01-03	0	0	ne	01-13	0	3.2, 3.3	?
01-04	0	0	ne	01-14	0	3.3.	?
01-05	0	0	ne	01-15	0	3.3.	?
01-06	0	0	ne	01-16	0	3.2	?
01-07	0	0	ne	01-17	0	0	ne
01-08	0	0	ne	01-18	0	3.3, 4.3., 4.4.	ano
01-09	0	3.3, 3.4	?	01-19	0	0	ne
01-10	0	3.2.	?	01-20	0	3.3., 4.3., 4.4.	ano



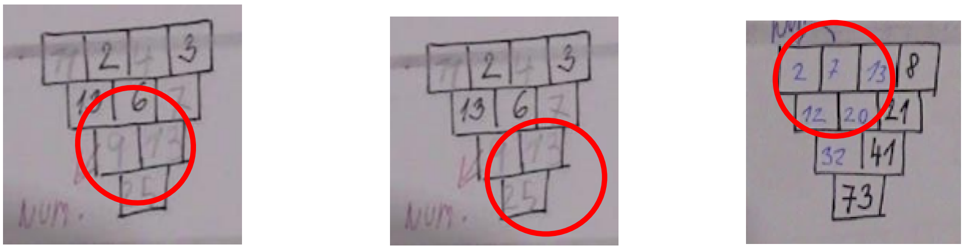
Obrázek 2: Chybná řešení symetrického trojúhelníka 3.2

Hodnota čísel se na úspěšnosti řešení projevila (tabulka 3). Žáci 01–08, 17 a 19 nechybují vůbec, žák 16 sice ano, ale chyba nesouvisí s hodnotou čísel. Žáci 09, 12, 14, 15, 20 s vyššími hodnotami čísel chybují, a to z různých příčin. Čtyři žáci chybují při sčítání (vidíme chyby, přepisování čísel), jeden žák (12) v dopočítávání. U dvou žáků (10, 11) nelze zjistit, zda je chyba způsobena hodnotou čísel, neboť chybují i u čísel nižších hodnot. Příčinou chyby může být problém v oblasti poruchy pozornosti, příp. dysgrafie (žák 10 namísto 19 píše 9, namísto 22 píše 25 (obr. 3), žák 11 chybuje jen v nízkých hodnotách, např. 2 + 7 = 12, 7 + 6 = 11, 15 + 3 = 18, ale ve vyšších hodnotách kalkulativní chyby nedělá).

Tabulka 3: Hodnota čísel, výsledky žáků

	chyby	
01-01	0	ne
01-02	0	ne
01-03	0	ne
01-04	0	ne
01-05	0	ne
01-06	0	ne
01-07	0	ne
01-08	0	ne
01-09	?	ano
01-10	3.2.	N

	chyby	
01-11	1.3., 3.1. a 4.2.	?
01-12	3.2, 4.3, 4.4	ano
01-13	3.1, 3.2., 3.3	ano
01-14	3.3	ano
01-15	3.3.	ano
01-16	3.2.	ne
01-17	0	ne
01-18	3.3., 4.3., 4.4.	ano
01-19	0	ne
01-20	3.3., 4.3., 4.4.	ano



Obrázek 3: Dysgrafie jako možná příčina chyby

Dále nás zajímala strategie, kterou žáci použili při řešení úlohy $a + b = c$, kde jsou známy jeden sčítanec a součet (a, c, nebo b, c) a druhý sčítanec se hledá. Zajímalo nás, jakou operaci zde žáci použijí, zda dopočítávání, nebo zda použijí odčítání jako inverzní operaci ke sčítání ($b = c - a$, resp. $a = c - b$). Tento jev jsme sledovali v úlohách 1, 3, 4. Použitou strategii u jednotlivých žáků nám sdělil třídní učitel, který ji identifikoval v přímém pozorování žáka, případně dotazováním. Dopočítávání značíme v tabulce 4 písmenem D, odčítání O. Vidíme, že žáci používají konzistentně jednu strategii ve všech úlohách, tedy že jejich volba strategie není závislá na tom, který sčítanec je neznámý, ani na hodnotě čísel. Odečítá 15 žáků (01 – 07, 10, 13 – 17, 19 – 20), tj. 75 %. Zbytek žáků dopočítává. Učitel vnímá dopočítávání jako neefektivní strategii ve 4. ročníku a po celou dobu výuky vede žáky k odčítání. Vazba mezi chybovostí a volbou strategie se v experimentu neprojevuje.

Tabulka 4: Strategie řešení úloh $a + b = c$, výsledky žáků, O – odečítá, D – dopočítává

	Úloha 1		Úloha 3		Úloha 4	
	chyby	strategie	chyby	strategie	chyby	strategie
01-01	0	O	0	O	0	O
01-02	0	O	0	O	0	O
01-03	0	O	0	O	0	O
01-04	0	O	0	O	0	O
01-05	0	O	0	O	0	O
01-06	0	O	0	O	0	O
01-07	0	O	0	O	0	O
01-08	0	D	0	D	0	D
01-09	0	D	0	D		D
01-10	0	O	3.2.	O	0	O

	Úloha 1		Úloha 3		Úloha 4	
	chyby	strategie	chyby	strategie	chyby	strategie
01-11	1.3.	D	3.1.	D	4.2.	D
01-12	0	D	3.3.	D	4.3., 4.4.	D
01-13	0	O	3.1., 3.2., 3.3	O	0	O
01-14	0	O	3.3.	O	0	O
01-15	0	O	3.3.	O	0	O
01-16	0	O	3.2.	O	0	O
01-17	0	O	0	O	0	O
01-18	0	D	3.3.	D	4.3., 4.4.	D
01-19	0	O	0	O	0	O
01-21	0	O	3.3.	O	4.3., 4.4.	O

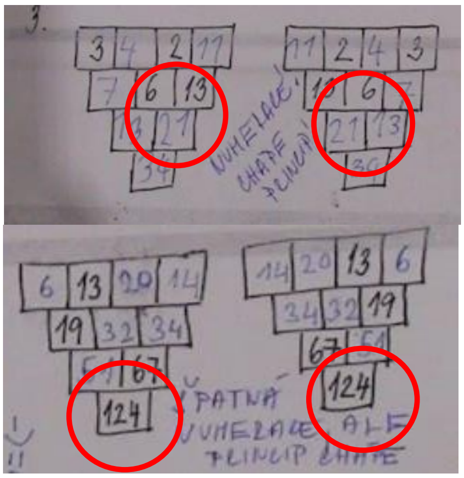
Při analýze jevu symetrie jsme rozlišovali, zda se jedná o symetrii v zadání (zadání je symetrické) nebo o symetrii v řešení úlohy (žák ji nějakým způsobem využil ve vlastním řešení). Symetrická zadání mají úlohy 3.1 a 3.2, 4.1 a 4.2, 4.3 a 4.4, 5.1.

Zda žák symetrie využívá jsme zjišťovali pozorováním žáků při řešení, dotazováním učitele nebo porovnáním řešení symetrických úloh. Pokud jsou žákovy chyby v řešení symetrických trojúhelníků rovněž symetrické, pak pravděpodobně symetrii zadání využívá (obr. 5a), pokud nejsou, pak pravděpodobně symetrii nevyužívá (obr. 5b). Pouze z písemného záznamu to však nelze jednoznačně určit, neboť žák může mít chybně uložen aritmetický spoj. V tabulce 5 jsou pro větší rozsah dat použity zkratky: ch – chyby, s – strategie. Sledujeme, že symetrii v zadání využívá 16 žáků, a to ve všech úlohách, kde je to možné. Symetrie v úloze 5.1 byla obtížně rozpoznatelná, za vyhovující považujeme její využití v úlohách 3 a 4. Symetrii nevyužívají žáci 09, 10, 11, 16, tedy 80 % žáků. Učitel chápe využívání symetrií jako efektivní metastrategii a po celou dobu výuky vede žáky k jejímu používání. Vazba mezi chybovostí a strategií se v experimentu neprojevuje.

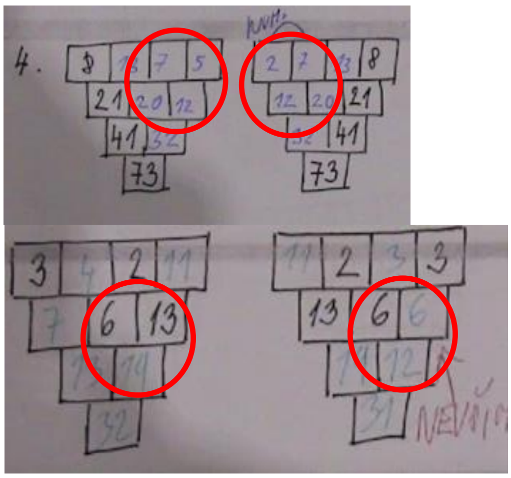
Symetrii v řešení jsme měli v úmyslu identifikovat v úloze 5.2. při nalezení dalších řešení. Nicméně žáci se spokojili s 1 řešením, tedy symetrii nevyužívali ani ti, kteří ji využívali v zadání.

Tabulka 5: Využití symetrie, žákovská řešení

	Úloha 3		Úloha 4		Úloha 5.1.		Úloha 5.2.				Úloha 3		Úloha 4		Úloha 5.1.		Úloha 5.2.	
	ch	s	ch	s	ch	s	ch	s			ch	s	ch	s	ch	s	ch	s
01-01	0	ano	0	ano	1	N	0	x		01-11	3.1.	ne	4.2	ne	0	N	x	x
01-02	0	ano	0	ano	0	N	x	x		01-12	3.3.	ano	4.3., 4.4.	ano	x	x	x	x
01-03	0	ano	0	ano	0	N	x	x		01-13	3.1., 3.2., 3.3	ano	0	ano	0	N	0	x
01-04	0	ano	0	ano	1	N	x	x		01-14	3.3.	ano	0	ano	0	N	0	x
01-05	0	ano	0	ano	0	N	0	x		01-15	3.3.	ano	0	ano	0	N	0	x
01-06	0	ano	0	ano	0	N	0	x		01-16	3.2.	ne	0	ne	0	N	0	x
01-07	0	ano	0	ano	0	N	0	x		01-17	0	ano	0	ano	0	N	x	x
01-08	0	ano	0	ano	0	N	x	x		01-18	0	ano	4.3., 4.4.	ano	x	x	x	x
01-09	0	ne		ne	x	x	x	x		01-19	0	ano	0	ano	0	N	x	x
01-10	3.2	ne	0	ne	x	x	x	x		01-20	0	ano	4.3., 4.4.	ano	0	N	x	x



Obrázek 5a: Využití symetrie v zadání



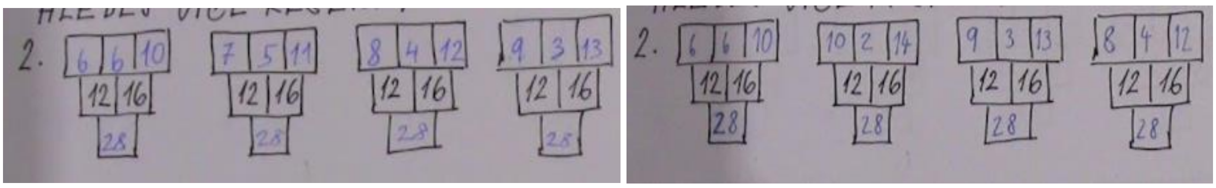
Obrázek 5b: Nevyužití symetrie v zadání

Dále jsme sledovali, zda žák bez výzvy učitele hledá další řešení úlohy. Více řešení měly úlohy 2 a 5.2. Úloha 2 dala nabídku čtyřmi nevyplněnými trojúhelníky pro čtyři řešení. Slovní zadání „Hledej více řešení“ mohlo někoho vybízet k hledání více než čtyř řešení. Těch je celkem třináct v množině přirozených čísel, z toho jsou tři symetrická. V množině celých čísel je řešení nekonečně mnoho. Žáci vyplnili předepsané čtyři trojúhelníky a nikdo nedoplnil další řešení. Pravděpodobně tak považovali úlohu za vyřešenou a neměli potřebu hledat další. Možná nevěděli, kam by měli tato další řešení zapsat. Úloha 5.2 má tři řešení (E = 8, F = 3 nebo E = 5, F = 6 nebo E = 4, F = 7), předepsaná struktura byla jedna a slovní zadání žádné. Nikdo z žáků nezapsal více než jedno řešení. Příčiny mohly být stejné, jako v úloze 2.

V úlohách s více řešeními mělo smysl sledovat, v jakém pořadí žák řešení nachází. Zda pracuje systematicky nebo hledá řešení náhodně. Vzhledem k tomu, že žáci našli více řešení jen v úloze 2, sledujeme strategie jen v této úloze (tabulka 6). U čtyř žáků (03, 11, 15, 20) jsme neidentifikovali žádný náznak systematického vyhledávání řešení – v tabulce uvádíme N (ne). U jedenácti žáků se objevilo využití symetrie, viz výše. Žáci nacházejí jako první symetrické rozklady čísla 12 na 6 a 6, příp. 16 na 8 a 8, jeden z nich (19) rozklady čísla 12 na 3, 9 a 9, 3 a jeden z nich (02) rozklady čísla 12 na 7, 5 a 5, 7. Další projev systematického vyhledávání řešení jsme u nich nenašli – v tabulce uvádíme S (symetrie). Zcela systematické řešení vidíme u tří žáků: 08 (12 na 6 a 6, 7 a 5, 8 a 4, 9 a 3), 09 (12 na 6 a 6, 10 a 2, 9 a 3, 8 a 4), 12 (12 na 6 a 6, 12 a 0, 10 a 2, 2 a 10) – v tabulce uvádíme A (ano), (obr. 6). Částečně systematické řešení jsme našli u žáků 10 (začíná systematicky rozkládat číslo 12 na 11 a 1, 10 a 2, pak nepokračuje), 18 (používá sudé rozklady čísla 12 na 6 a 6, 2 a 10, 8 a 4, 0 a 12) – v tabulce uvádíme D (dílčí).

Tabulka 6: Systém v hledání řešení, žákovská řešení

Úloha 2		**Úloha 2**		**Úloha 2**		**Úloha 2**	
01-01	S	01-06	S	01-11	N	01-16	S
01-02	S	01-07	S	01-12	A	01-17	S
01-03	N	01-08	A	01-13	S	01-18	D
01-04	S	01-09	A	01-14	S	01-19	S
01-05	S	01-10	D	01-15	N	01-20	N



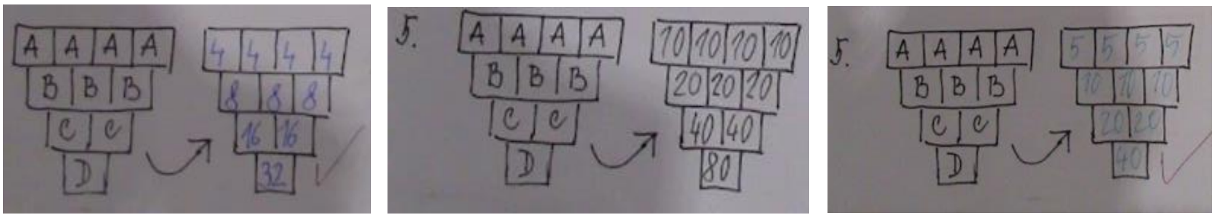
Obrázek 6: Systematické řešení

Algebrogram v úloze 5.1 vyřešilo správně třináct žáků (v tabulce uvádíme 0), tři žáci (09, 12, 18) nedoplnili žádné řešení (v tabulce uvádíme x), čtyři žáci (01, 04, 10, 16) mají řešení chybná – dosazují za písmeno dvouciferné číslo (v tabulce uvádíme popis chyby), obr. 7. Za povšimnutí stojí fakt, že učitel tuto chybu neidentifikuje (zatrhává řešení jako správné). Jedno řešení algebrogramu 5.2. našlo osm žáků (v tabulce uvádíme 0). Za pozornost stojí, že všichni mají identická řešení E = 5, F = 6 přesto, že existují další dvě řešení. Jeden žák má řešení chybně (19), dopustil se numerické chyby (v tabulce uvádíme 1). Jedenáct žáků nedoplnilo žádné řešení (v tabulce uvádíme x).

ISSN 2694-8133

Tabulka 7: Algebrogram, žákovská řešení

	Úloha 5.1	**Úloha 5.2.**		**Úloha 5.1**	**Úloha 5.2.**
	chyby	**chyby**		**chyby**	**chyby**
01-01	od třetí úrovně dvouciferná čísla	0	01-11	0	x
01-02	0	x	01-12	x	x
01-03	0	x	01-13	0	0
01-04	všechna pole dvouciferná čísla	x	01-14	0	0
01-05	0	0	01-15	0	0
01-06	0	0	01-16	od druhé úrovně dvouciferná čísla	0
01-07	0	0	01-17	0	x
01-08	0	x	01-18	x	x
01-09	x	x	01-19	0	1
01-10	od druhé úrovně dvouciferná čísla	x	01-20	0	x



Obrázek 7: Algebrogram – dosazení čísla namísto číslice

Měli jsme v úmyslu identifikovat proces zobecňování. Sledovat, zda má žák ke zobecňování tendenci, příp. na nějaké úrovni dokáže zobecnit. Nicméně v žákovských řešeních jsme nedokázali tento jev věrohodně odhalit. Zobecňování souvisí se systematickým nacházením řešení, avšak i když jsme se zaměřili na žáky, kteří systém v úlohách odhalili, nevíme, zda dokázali generický model popsat (nehledali všechna řešení). Proto jsme dále s tímto jevem nepracovali.

6. Závěr

Ve výzkumu jsme se soustředili na identifikaci žákovy chyby, na popis jejího charakteru a na odhalení její příčiny. Po ukončení diagnostického testu už jsme s žáky nevedli další rozhovory. Tedy diskuze o možných příčinách chyby není konfrontována s realitou a je tedy na spekulativní úrovni.

Jako vzdělavatelé učitelů a budoucích učitelů shledáváme, že tento materiál má velký potenciál pro využití v jejich didakticko-matematické přípravě na práci se žáky. Studiem materiálu poznají, jak je důležité pracovat se sériemi úloh gradovaných podle zvolených parametrů pro diagnostiku žákových obtíží, ale i jeho schopností. Na základě diagnostikovaných jevů je pak potřeba nastavit další úlohy tak, aby žák obtíže překonal (reedukační úlohy), nebo aby se posunul o krok dál. V další práci mohou studenti daný materiál sami ověřit v praxi, a nakonec obdobný materiál samostatně tvořit v dalších kontextech.

Komparace žákovských řešení v rámci třídy a v rámci jednotlivých souborů úloh přinesla třídnímu učiteli cenné poznatky. V následném rozhovoru s ním jsme v diskuzi porovnávali naše závěry a jeho zkušenosti. Projednali jsme příčiny obtíží některých žáků a možnosti reedukačních kroků Dalším tématem našeho rozhovoru byla podoba diagnostického testu, analýza gradačních parametrů, návrhy na alterace testu. Stejným způsobem je možné pracovat i s budoucími učiteli.

Výsledky experimentu mohou být zdrojem informací i pro autory výukových materiálů pro žáky. Potvrzuje se potenciál zvoleného didaktického prostředí jak v rozsahu významných obecnějších obsahů (symetrie, izomorfismy, metakognice), tak v bohatosti matematické náplně (porozumění principu poziční číselné soustavy, aditivní triády *(a,b,c)*, kde $a + b = c$ s neznámým počátečním stavem, procesu zobecňování) a také v možnostech rozvoje matematické gramotnosti (potřeba nalezení všech řešení úlohy, schopnost systematického řešení).

Problematika zobecňování v prostředí součtových trojúhelníků může být námětem dalších výzkumů. Bude potřeba sestavit vhodné gradované série úloh s cílem spuštění procesu zobecnění, jeho popisu žákem a jeho identifikace výzkumníkem. Zobecňování je obtížně uchopitelným tématem i v přípravě budoucích učitelů a práce s tímto aspektem posune jejich schopnosti na kvalitativně vyšší úroveň ve všech oblastech matematiky.

Acknowledgement

Článek využívá materiálů projektu Inovace ŠVP ve školních družinách a diferenciace výuky matematiky na 1. stupni ZŠ, 2020–2022, řešeném v H-mat, o.p.s. v rámci OP Výzkum, vývoj a vzdělávání.

Literatura

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Holt.

Eisenmann, P., Novotná, J., Přibyl, J. & Břehovský, J. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 27, 534-562.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Hejný, M., & Hejná, M. (1998). *Součtové trojúhelníky.* Praha: Raabe.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: UK.

Hoth, J., Döhrmann, M., Kaiser, G. et al. (2016). Diagnostic competence of primary school mathematics teachers during classroom situations. *ZDM Mathematics Education*, 48, 41-53.

Keller-Schneider, M. (2020). Teaching is More than Applying Knowledge: Developmental tasks od pre-primary and primary teachers effects on teacher education. *Pedagogika* (4), 569-591.

Petty, G. (2009). *Evidence-Based Teaching. A Practical Approach.* Nelson Thornes Ltd.

Piaget, J., & Inhelder, B. (2010). *Psychologie dítěte*. Praha: Portál.

Vygotskij, L. S. (1970). *Myšlení a řeč.* Praha: SPN.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational studies in Mathematics Education,* (48), 1-20.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen.* Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart: Klett.

Žáková, K. (2009). *Výukové a diagnostické možnosti prostředí Sčítací trojúhelníky u žáků na 1. stupni.* [Diplomová práce]. Univerzita Karlova.