Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics

The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

2021

EME

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 3

No. 2

Olomouc 2021

ISSN 2694-8133

Univerzita Palackého v Olomouci
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

ve spolupráci s

Jednotou českých matematiků a fyziků
pobočný spolek Olomouc

Elementary Mathematics Education Journal

ročník 3, číslo 2

2021

Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

in cooperation with

The Union of Czech Mathematicians and Physicists
Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 3, No. 2

2021

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Vydavatel: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika

Adresa a kontakty:
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Informace pro autory:
Časopis uveřejňuje články k aktuálním problémům z teorie elementární matematiky, o inovacích, trendech a výzkumech v primárním a preprimárním matematickém vzdělávání. Jednotlivé články jsou anonymně posuzovány dvěma odborníky v recenzním řízením typu „double-blind peer review". Další informace a podrobné pokyny pro autory jsou k dispozici na webu: http://emejournal.upol.cz.

Za kvalitu obrázků, jazykovou správnost, dodržení bibliografické normy a dodržování publikační etiky odpovídají autoři jednotlivých článků.

Časopis vychází dvakrát ročně.

Ročník 3, číslo 2

ISSN 2694-8133

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Publisher: Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Address and contacts:
Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic
emej@upol.cz

Information for authors:
The journal publishes articles on current issues in the theory of elementary mathematics, about innovation, trends and research in primary and pre-primary mathematics education. Each article is reviewed by two anonymous experts ("double-blind peer review"). More information and other instructions for authors are available at: http://emejournal.upol.cz.

The authors of the articles are responsible for the quality of the images, language accuracy, compliance with bibliographic standards and adherence to publication ethics.

The journal is published twice a year.

Vol. 3, No. 2

ISSN 2694-8133

ISSN 2694-8133

Obsah

Content

ISSN 2694-8133

DEVELOPING LOGICAL THINKING THROUGH TASKS IN MATHEMATICS TEXTBOOKS

Jiří BŘEHOVSKÝ, Jana PŘÍHONSKÁ
Technical University of Liberec, Faculty of Sciences, Humanities and Education (Czech Republic)
jiri.brehovsky@tul.cz, jana.prihonsky@tul.cz

Abstract

This paper presents an analysis of selected mathematics textbooks for the first level of primary schools. The aim of our study was to pinpoint tasks within these textbooks that contribute to the development of logical thinking in pupils. Based on a quantitative evaluation of these tasks, we proposed a task categorisation, which will serve as a basis for further research.

Keywords: logical thinking, tasks, mathematics textbooks, textbook analysis.

1. Introduction

This paper represents one of the outputs of the SGS 21374 Project: “Mathematics as an effective tool for developing logical thinking in primary school pupils”. The aims of this project are to develop a set of activating tasks that will stimulate the development of pupils’ logical thinking with the focus on formal logic, and to verify its use in practice. In order to achieve these aims, we carried out an analysis of selected mathematics textbooks for the first level of primary school. This analysis will then serve as a basis for selection and the development of tasks that are under-represented in the textbooks.

One of the goals of mathematics education at primary and secondary level is to develop pupils’ logical thinking. This and other goals are set out in the Framework educational program for basic education (FEP BE, 2007). Despite the commonly accepted belief that mathematics contributes to the development of logical thinking, achieving this goal in practice isn’t easy. This showed in the PIRLS & TIMSS international comparative studies of mathematics achievement among pupils in the Czech Republic (PIRLS & TIMSS, 2011).

Mathematics and mathematics education are based on a precise logical construction. However, passing this concept on to pupils in the classroom hasn’t been successful, in spite of logical thinking being absolutely essential to understand mathematics. Without the right approach towards the development of logical thinking, the pupils’ learned skills are only formal and short-term with no to little ability to make connections between knowledge. That is why we believe that the development of logical thinking is very important, particularly at the first level of primary school. Hence our analysis was focused on mathematics textbooks for the first level of primary schools.

The aim of our analysis was to determine the representation of tasks that stimulate the development of logical thinking. The selection of textbooks for the analysis was based on their use in teaching mathematics in Czech primary schools. In the next step we proposed a categorisation of these tasks.

2. Theoretical background

The concept of logical thinking has been studied and defined by a number of authors. To describe logical thinking, in his work Carroll (1972) used an example of a couple having a conversation. At the end of the conversation one of them said "That's quite logical." by which they meant that their statement irrevocably resulted from what had already been said and proven to be right. So, by Carroll definition, logic means a certain process of thinking, the ability to think correctly or, more precisely, the ability to reason, i.e., to draw conclusions from specific knowledge or thoughts (Carroll 1972).

According to Rice (2015), logical reasoning is all about being able to explain why something happens using facts and knowledge that we know to be true. Thinking logically enables us to effectively make decisions and predictions, and also to analyse and understand events that have already happened. In their studies, Artino (2008) and Widodo (2017) illustrated that the ability to think logically is a thinking process that uses mathematical reason and logic consistently so that an expected conclusion is obtained. This ability is needed not only to make good and just strategies but also in solving problems in daily life.

Piaget (1929, 1950) and his associates conducted systematic studies on the development of logical reasoning. In his theory, Piaget mentions that a person goes through several stages of cognitive development:

1. **The sensorimotor stage** occurs between 0-2 years of age, when they adapt to the surrounding environment and try to understand what they feel.
2. **The pre-operational stage** occurs between the ages of 2 and 7, when they can reason and practice their logical abilities. They use objects and symbols to represent something in a concrete form.
3. **The concrete operational stage** occurs between the ages of 7 and 11, when they use a logical reasoning process.
4. **The formal operational stage** is the last stage of the cognitive development and occurs from the age of 11 to adulthood, when their thinking is not only abstract but also becomes logical.

The ability to think logically is a characteristic of the last two stages of the cognitive developmental theory created by Piaget (1928). That is why our research focuses on the development of pupils' logical reasoning early at the first level of primary school education. Primary school is a stage of formal education that can determine how a child's characteristics develop. Pupils' skills start to develop at this stage, from their cognitive skills to their effective skills, and this affects their future thinking (Ristiana, 2019). If someone has good logical thinking skills, then they can resolve their problems well. This ability to solve problems ought to be developed early when they are in their "golden age", specifically at the primary school stage. However, it isn't easy to develop one's logical thinking skills. Many factors can influence the formation of one's logical thinking; the teacher being amongst the most influential (Purnami, 2018).

One of the goals of mathematics education is to develop the pupils' ability to solve simple practical tasks and problems by using logical thinking, rather than just applying common mathematical methods and algorithms. Solving logical problems that are in congruence with one's intellectual ability, can strengthen the pupils' ability to use logical thinking, even in those who usually don't excel at maths (RVP, 2007). Mathematics textbooks are an integral part of mathematics education that greatly contributes to the development of these key competencies (Molnar, 2007).

3. Logic at first level of primary school

The mathematics curriculum for the first level of primary school covers elements of logic that can be demonstrated in accurate expression, evaluation of judgements, and selecting the correct solution procedures. From the very start, pupils are taught how to make decisions about what is true and what is false. When teaching mathematics to pupils, we use the term "proposition" and decide on whether propositions are true or false. We also look at sentences as linguistic expressions of ideas. Thus, it is clear that logical thinking is closely associated with mother tongue and the ability to use sentences to express oneself (Melichar, 2007).

Teachers and pupils use logic operators, negations, quantifiers, and simple judgements in class; giving instructions and solving problems. Pupils tend to use the language of logic rather intuitively and often make mistakes when making judgements. This happens because they don't really understand the formality of logic. There are a number of studies that were dealing with the pupils' mistakes when using logic reasoning (Hoyles & Küchemann 2002, Stephanou & Pitta-Pantazi 2006).

There are two irreplaceable components in the development of pupils' logical thinking: the teacher and the textbook. Textbooks contain definitions, mathematical sentences and mathematical tasks/problems for pupils to solve. Practical experience shows that teachers use mathematics textbooks quite often as resources of both theoretical background and practical tasks.

4. Textbook analysis

The textbook analysis was focused on mathematics textbooks for the first level of primary school, and it was designed to detect the proportional representation of tasks that have a potential to stimulate the development of logical thinking. Our research focused solely on tasks that involved logic operators (conjunction, disjunction, implication, equivalence), negations, and quantifiers. We were interested in finding out how often these logic operators were involved in tasks and how often pupils come across their formal use. We believe that without a proper understanding of the basic principles of formal logic, the pupils' understanding of mathematics in general becomes distorted. Our analysis included textbooks from four different publishers. Considering the different stages of cognitive development (Piaget, 1928), we focused on textbooks for the 3rd and 5th year of primary school. Textbooks included in the analysis are shown in Table 1.

For each textbook, the total number of tasks was determined. Then, the number of tasks that involved logic operators, negations, and quantifiers was determined. From the data obtained, their proportional representation in each textbook was calculated.

Table 1. Textbooks used in this study

Title	Author	Publisher
Matematika 3: učebnice pro základní školy [Maths 3: Textbook for Primary Schools]	Hejný, M. et al.	Fraus
Matematika 5: učebnice pro základní školy [Maths 5: Textbook for Primary Schools]	Hejný, M. et al.	Fraus
Matematika: učebnice pro 3. ročník základní školy [Maths: Textbook for 3rd Year of Primary School]	Blažková, J. et al.	Didaktis
Matematika: učebnice pro 5. ročník základní školy [Maths: Textbook for 5th Year of Primary School]	Blažková, J. et al.	Didaktis
Matematika pro 3. ročník základních škol [Maths for 3rd Year of Primary School]	Blažková, R. et al.	Alter
Matematika pro 5. ročník základních škol [Maths for 5th Year of Primary School]	Justová, J.	Alter
Matematika pro 3. ročník základní školy [Maths for 3rd Year of Primary School]	Čížková, M.	SPN
Matematika pro 5. ročník základní školy [Maths for 5th Year of Primary School]	Vacková, I. et al.	SPN

Based on the analysis, for the purpose of our research we proposed defined categories of tasks that involved logic operators. The tasks were divided into 6 categories: L1 - L6, in regards to their appearance in the textbooks. When creating these categories, the following were taken into consideration: the context, type, and difficulty of a task. We also considered the way a task was presented, and the way pupils have to work with the given information. We believe that it is more difficult to correctly interpret tasks where logic operators are used, than to simply follow a set of instructions. The proposed categories of tasks are shown in Table 2. All types of these tasks involve some form of a logical operator, negation, or quantifiers and their proper understanding is crucial for the correct solution. When presented in this way, tasks can contribute to the formation of pupils' logical thinking and the development of the basic elements of formal logic. The examples of tasks are not their exact quotations, though they are inspired by real tasks in the textbooks.

Table 2. Categories of logical tasks in mathematics textbooks

Category Type	**Category Name**	**Category Description**
L1	Explicit	Tasks involving a conjunction in terms of formal logic, i.e. a conjunction of two various propositions. For example: • *"A chocolate bar costs 15 CZK and they are sold in two's. Write down the price of 2, 4, …, 20 bars."* • *"There were 6 stones in a pile. Jana and Katka took turns removing one or two stones. The person who removed the last stone won. Who's the winner?"* • *"Can you guess the number I'm thinking of? If I multiply my number by 8, I get 984."*
L2	Series Of Elements	Tasks involving a conjunction in terms of a series of elements that carry additional information. For example: • *"My aunt was making marmalade. She used 300g of cherries, 400g of peaches, and 500g of apples. How many kilograms of fruit did she use altogether?"* • *"A sports club bought 13 volleyballs for 550 CZK each, three nets for 3700 CZK each, and 25 handballs for 690 CZK each. How much money did they spend on the equipment?"* • *"Three friends had a race on their bicycles. Petr finished the race in 1 hour and 5 minutes. Honza took 54 minutes to finish the race, and Karel finished it in 3600 seconds. Who came in first/second/third?*"
L3	Instructions	Tasks involving a conjunction in terms of a series of instructions to follow. For example: • *"Calculate and put results in the correct order."* • *"Calculate and perform a test of results."* • *"Perform column addition and place results on the number line."* Technically, these are not propositions, but a proper understanding of these instructions promotes a proper understanding of the concept of conjunctions.
L4	Quantifier	Tasks involving any kind of a quantifier. For example: • *"There are 22 pieces of chocolate in the box. Each piece weighs 300g. How much does the whole box weigh?"* • *"Take the numbers in the box and reduce them all by 5."* • *"In your notebook, draw three concurrent lines and mark their points of intersection."*
L5	Composite Proposition	Tasks involving a conjunction in terms of a connection between two propositions. A proper understanding of the composite proposition is crucial in order to solve the problem. For example: • *"Jan brought 56 candies to birthday party. There were 8 children at the birthday party. How many candies did each one of them get, if all treats were given away and all children were given the same number of candies?"* • *"What is the dividend, if the divisor is 4 and the quotient equals 3497284?"*

L6	Logical Tasks	Tasks that can be regarded as "recreational mathematical tasks". Such tasks have a great potential to promote logical thinking. In order to solve them, it is essential to draw conclusions from given information by using both linguistic and mathematical knowledge. For example: • *"I'm thinking of a number. My friend is thinking of a number that is larger than mine by 6. Now take his number, add 3 and you will get 39. What number was I thinking of?"* • *"Carry on the number series: 102; 204; 306; 408; 510; …"* • *"Determine where the Novak, Becka, Soucek, Safranek, and Ptacek families live if you know, that:* *The Soucek family live 2 floors below the Novak family.* *The Becka family live neither on the bottom nor the top floor.* *The Novak family live on the second top floor.* *The Safranek family don't live on the top floor."* • *Tasks involving knights and knaves.*

5. Results and discussion

The representation of logical tasks in individual mathematics textbooks is illustrated in Graph 1. Looking at the graph, it is obvious that the number of logical tasks in a textbook differs from author to author. The mean proportional representation of studied tasks was 36% and the mean number of tasks in one textbook was 532. That means that, on average, there were 192 tasks involving logical operators, negations, and/or quantifiers in each textbook. These results seem promising.

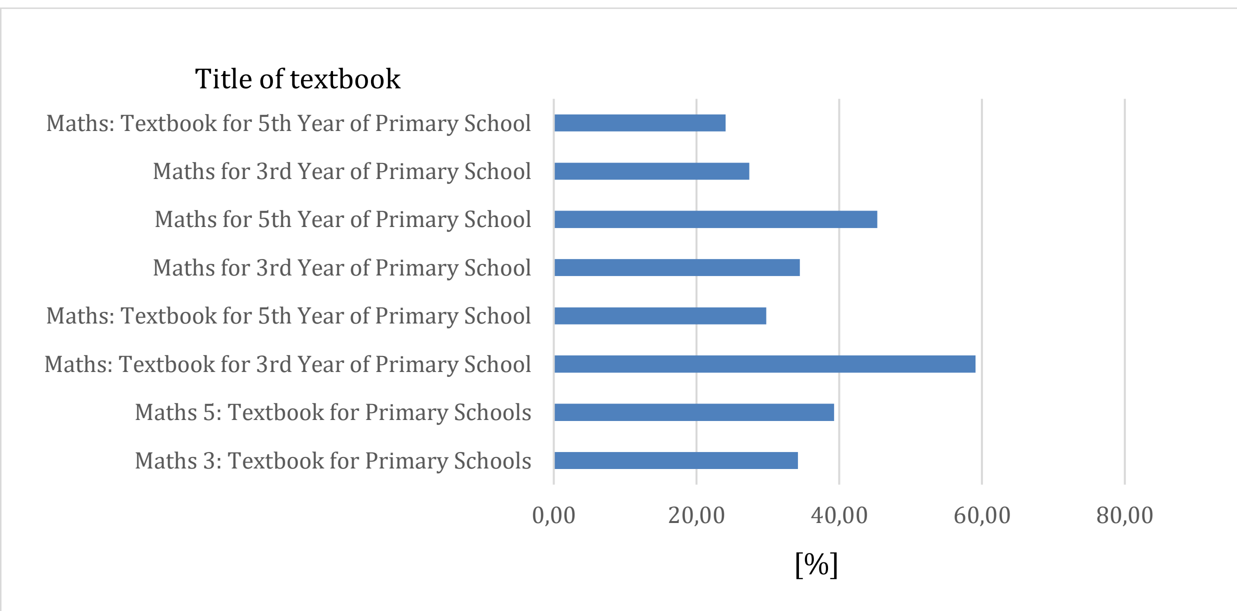


Chart 1. Proportional representation of studied tasks in mathematics textbooks for 3rd and 5th years of primary school

The proportional representation of logical tasks in mathematics textbooks is better illustrated in Graph 2. The graph shows proportional representation of the individual categories of tasks (L1-L6).

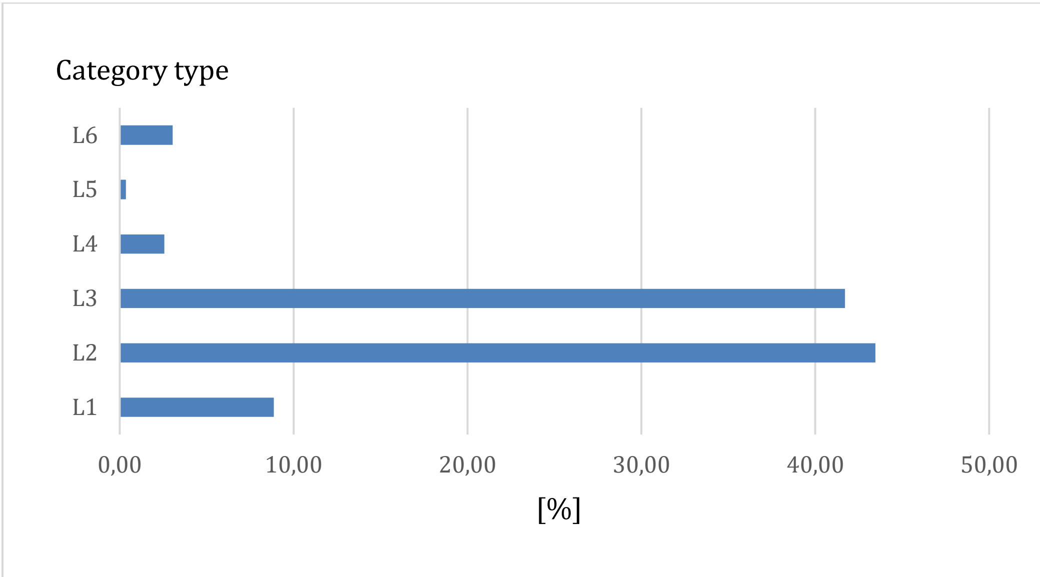


Chart 2. Proportional representation of categories of logical tasks in mathematics textbooks

The results clearly show that there were 2 categories of tasks with high proportional representation: L2 (Series of Elements) with 43% representation and L3 (Instructions) with 42% representation. With regard to 1st level mathematics, these results seem promising, however, we must realize that tasks in these categories involved nothing but conjunctions. Moreover, in the case of category L3, these conjunctions weren't even logic operators, they were simply a series of instructions, e.g. *"Calculate and put results in the correct order."*. In terms of logic, these instructions are not propositions, although they can promote a proper understanding of logic conjunctions. Category L1 (Explicit) had the third highest representation of nearly 9%. This category involved all logic operators, but mostly implications, e.g. *"How many litres of petrol were consumed if the average fuel consumption of a car was 7 litres per 100 kilometres?"*. Note that this example is a special case of implication with a true premise. Although it is okay to use this type of implication in this context, it raises a question of whether it might lead to misconception of the implication as it may be mistaken for equivalence. Besides the implications, there were only a few conjunctions and disjunctions involved in this category (L1), and no equivalence nor negations were involved whatsoever.

Category L6 (Logical Tasks) had a representation of 3%. This is a category that is worthy of note as it has a great potential in terms of the development of logical thinking. It included so-called "recreational mathematical tasks" and tasks involving explicit logic operators. In order to solve these tasks, one must come to conclusions by applying their prior knowledge, skills, and experience. For example, *"If x and y are even, then x + y is even. Is this statement true?"* (Maths 5:

Textbook for Primary Schools, Hejny et al., 2001). It is a shame that these tasks were included only in three of the studied mathematics textbooks: the two textbooks published by Fraus Publishing, and the textbook for 3rd year mathematics published by SPN.

This relatively small representation of tasks involving explicit logic operators that promote the development of logical thinking, might be one of the reasons why the success rate of Czech pupils in the 2011 TIMSS study was so low (PIRLS & TIMSS, 2011). The results of the 2011 TIMSS study showed that only a small minority of pupils got average scores in both mathematics and reading literacy (PIRLS & TIMSS, 2011).

6. Conclusion

This research involved an analysis of selected mathematics textbooks for the first level of primary school. The analysis was focused on tasks that had the potential to facilitate the development of logical thinking in pupils. We were particularly interested in tasks that involved logic operators (conjunctions, disjunctions, implications, equivalences), negations, and quantifiers. Based on this analysis, we proposed 6 categories of tasks (see Table 2) that involved logic operators of some sort. On average, tasks involving logic operators were represented in the textbooks by 34%. However, 85% of these were tasks in categories L2 and L3, which involved nothing but conjunctions. Furthermore, in half of these cases the conjunctions involved weren't even logic operators, but they were simply a series of instructions. Yet, we see the biggest problem in the very low representation of tasks from the remaining categories, as they were represented only by 15% altogether. That doesn't leave much space for neither the pupils nor the teachers to develop the pupils' logical thinking. With that being said, note that the teachers' role in the development of pupils' logical thinking is vital.

This analysis of mathematics textbooks created space for us in future research, to focus on creating activities that involve tasks, which are currently under-represented in the textbooks. We aim to focus on activities involving explicit use of logic operators, negations, and quantifiers.

Acknowledgements

This research was supported by the SGS Project 2020 at FP TUL (Faculty of Science, Humanities and Education, Technical University of Liberec).

References

Artino, A. (2008). Cognitive load theory and the role of learner experience: An abbreviated review for educational practitioners. *Assoc. Adv. Comput. Educ. Journal, 16*(4), 425-439.

Carroll, L. (1972). *Logika hrou*. 1. vyd. Praha: Pressfoto.

Hoyles, C., Küchemann, D. (2002). Student's understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics,* (51), 193-223.

Jeřábek, J. a kol. (2017). *Framework educational program for basic education (FEP BE)*. Praha: VÚP.

ISSN 2694-8133

Melichar, J. (2007). *Matematika a její aplikace – Utváření a rozvoj klíčových kompetencí.* Ústí nad Labem: UJEP.

Molnár, J. (2007). *Učebnice matematiky a klíčové kompetence*. Olomouc: UPOL.

Piaget, J. (1928). *Judgement and Reasoning in the Child.* London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (1929). *The Child's Conception of the World*. New York: Harcourt and Brace.

Piaget, J. (1950). *The Psychology of Intelligence*. London: Routledge and Kegan Paul.

Purnami, S., Widodo, S., Prahmana R. (2018). The Effect of Team Accelerated Instruction on Students' Mathematics Achievement and Learning Motivation. *J. Phys. Conf. Ser*. (948), 1-5.

Rice, S. (2015). *Logical Reasoning across the Primary Curriculum*. SWGfL 2015. Barefoot Project. https://swgfl.org.uk/magazine/logical-reasoning-across-the-primary-curriculum/.

Ristiana, M., G. (2019). Logical thinking skills of prospective elementary school teachers. In IOP Conf. Series: *Journal of Physics: Conf. Series,* 13-15.

Stephanou, L., Pitta-Pantazi, D. (2006). The Impact of the intuitive rule „If A then B, if not A then not B“, in perimeter and area tasks. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. *Vol. 5* (pp. 177-184). Prague: PME.

Widodo, S., Purnami, S., Prahmana, R. (2017). Team Accelerated Instruction, Initials, And Problem-Solves Ability. In *Junior High School Int. J. Emerg. Math. Educ*. (1), 193-204.

PIRLS 2011 & TIMSS 2011 vybraná zjištění. (2013). Praha: Česká školní inspekce.

ISSN 2694-8133

VNÍMÁNÍ CELKU A JEHO ČÁSTÍ DĚTMI V MATEŘSKÉ ŠKOLE

Magdaléna Anna HOFMANOVÁ[1], Šárka PĚCHOUČKOVÁ[2]
[1] Mateřská škola kardinála Berana v Plzni (Česká republika)
[2] Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická (Česká republika)
m.hofmanova.10@seznam.cz, pechouck@kmt.zcu.cz

Abstrakt

V mateřské škole proběhl experiment, který byl zaměřen na práci dětí s celkem a jeho částmi. Experimentu se zúčastnily děti tří věkových kategorií (věk 3-4 roky, věk 4-5 let, věk 5-6 let) a jeho cílem bylo zjistit úroveň dětí z uvedených kategorií v oblasti práce s celkem a jeho částmi. Byly vytvořeny 4 úkoly, přičemž každý byl rozdělen na tři části se vzrůstající obtížností. Úkoly byly zaměřeny na kompletaci, tedy dokončení neúplného celku, na rekonstrukci, při které se celek vytvářel na základě paměti a byly tedy povoleny drobné odchylky, na reprodukci, kdy byl celek tvořen podle vzoru, a na rekompozici. Děti při řešení úkolů využívaly manipulaci nebo grafické zpracování.

Klíčová slova: celek a jeho části, kompletace, rekonstrukce, reprodukce, rekompozice

PERCEPTION OF THE WHOLE AND ITS PARTS BY CHILDREN IN NURSERY SCHOOLS

Abstract

Nursery school were part of an experiment whose scope was children's manipulation with the whole and its parts. This experiment included children of three age groups (3 to 4-year-olds, 4 to 5-year-olds and 5 to 6-year-olds) and aimed at evaluating the skill level of children in given age groups when working with the whole and its parts. Four tasks with three subtasks of increasing complexity were created for this experiment. The tasks were focused on completion of the whole; on reconstruction where the whole had to be recreated from memory and small deviations were allowed; on reproduction where the whole was created based on a model; and on recomposition. Children solved the tasks using manipulation or graphical processing.

Keywords: whole and its parts, completion, reconstruction, reproduction, recomposition

1. Úvod

Základ matematiky vytvořily pojmy, které vyjadřují počet, velikost, tvar a rozmístění předmětů ve svém okolí. U dětí je důležité začít nejprve cílevědomým pozorováním okolních jevů a činností, které pravděpodobně v historii inspirovaly člověka k vytvoření celého matematického systému. V předškolní výchově jde pouze o utváření elementárních matematických představ, přesněji řečeno o „vybavení dětí schopností dívat se na svět na základě poznaných vztahů, souvislostí a zkušeností, a přitom využívat i zákonu myšlení.“ (Divíšek, 1989, s. 11) Dítě předškolního věku vnímá a zpracovává podněty a zkušenosti jinak než dospělý či starší dítě. „K procesu zobecnění je nutný proces porovnávání, hodnocení a třídění dosavadních zkušeností, hledání společných znaků, a to vše předpokládá dobrou paměť, vybavování představ, schopnost porovnávat zkušenosti získané v různém kontextu, čase, prostoru, schopnost některé situace vnímat nikoliv celostně, avšak analyticko-synteticky.“ (Kaslová, 2010, s. 5). V předškolním věku se tedy hovoří pouze o předmatematických představách nebo předmatematické výchově. Nováková, Novák (2019) používají termín matematická pregramotnost, která představuje „soubor postupně se rozvíjejících předpokladů pro matematiku u dětí v době před vstupem do školy; komplex schopností, dovedností, postojů a hodnot potřebných pro zahájení a úspěšné rozvíjení matematické gramotnosti i její užívání v různých individuálních a sociálních kontextech.“ (Nováková, Novák, 2019, s. 32-33). Součástí matematické pregramotnosti je i práce s celkem a jeho částmi.

2. Práce dětí s celkem a částmi

Dítě se s celkem a částí setkává při spontánní hře (aktivní setkávání), ale i pozorováním života kolem sebe (pasivní setkávání). Pozorovat může například maminku, která krájí chléb, ovoce nebo peče bábovku. Tatínka může sledovat například při sestavování skříňky.

Při pozorování objektu nejdříve dítě vnímá to, co je pro ně v tuto chvíli nejzásadnější, a toto také pro dítě představuje celek. Na obrázku 1 to tedy může být například červená střecha, na obrázku 2 například modré okno.

Obrázek 1. Dům (zdroj: vlastní)

Obrázek 2. Dům s oknem (zdroj: vlastní)

Dítě může rovněž celek vytrhávat z kontextu. Na obrázku 3 například dítě vnímá pouze fialovou kostku s písmenem „b“. Jakmile kostku vyndá, zboří celou stavbu.

Obrázek 3. Stavba z kostek (zdroj: vlastní)

První činností, kterou dítě provádí s celkem, je jeho rozkládání nebo rozbírání. Tímto si postupně uvědomuje, že se celek skládá z částí (Kaslová, 2010).

Při práci s celkem provádí dítě dvě základní aktivity. Jedná se o **dekompozici** a **kompozici**.

Dekompozice znamená rozklad celku a je většinou spojena s experimentováním. Cílem dítěte je vlastní činnost nebo zkoumání daného předmětu (dítě zaujme barva nebo pohyblivá část). K dekompozici může dojít i náhodně, kdy dítě si s něčím hraje a najednou se uvolní nějaká část (např. hraje si s autíčkem a upadne kolečko). Dekompozici lze rozdělit na dva specifické typy, na destrukci a rozklad na dvě části. **Destrukce** je způsob dekompozice, kdy je celek po rozložení zničený a nelze ho již složit zpět. Tato činnost slouží někdy pro uvolnění emocí dětí i dospělých, například pokud kreslíme obrázek a nepovede se, zmuchláme ho. **Rozklad na dvě části** souvisí s rozvojem třídění u dětí. Dítě si hraje například s autem a uvolní volant, odloží volant stranou a pokračuje ve zkoumání. Jedná se tedy o způsob, kdy dítě objevuje, z čeho se daná věc skládá.

O **kompozici** se jedná, pokud dítě spojuje určité části do celku. Kompozice může být volná a vázaná. **Volná kompozice** je spojena s estetickými a emocionálními prožitky (například dítě samo něco nakreslí nebo postaví) a je ovlivněna pouze vnitřními pravidly dítěte. **Kompozice vázaná** má vnější pravidla a je vázaná na realitu (nakresli strom, který vidíš), na kontext (nakresli, co bylo v pohádce), na představu (postav dům), na vzor (nakresli květinu podle obrázku), na podmínky (udělej z modelíny kočku). Mezi specifické typy kompozice patří kompletace, rekompozice, reprodukce a rekonstrukce. U **kompletace** máme vytvořenou pouze část celku a musíme celek dotvořit celý. Aby dítě kompletaci úspěšně zvládlo, musí dobře znát výsledný celek (úkol č. 1). Při **rekompozici** děti vycházejí z hotového celku a celek opakovaně rozkládají a skládají. Dítě tedy například dostane obrázek a jeho úkolem je ho roztrhnout a znovu spojit. Pokud to dítě udělá, vybere si jednu část obrázku a tu opět roztrhne a znovu vytvoří celý obrázek. Toto může několikrát opakovat. Jestliže provádíme **reprodukci**, vytváříme úplně stejný celek na základě vzoru, tedy postavíme stavbu z kostek, dítě tento vzor pozoruje a zároveň staví stejnou stavbu. **Rekonstrukce** znamená, že celek tvoříme na základě paměti, tedy chvíli pozorujeme nějakou stavbu, poté ji zakryjeme a pokusíme se postavit stavbu stejnou. Vzhledem k tomu, že je využívána paměť, jsou u nově vzniklé stavby povoleny drobné odchylky (Kaslová, 2010; Fuchs, Lišková, Zelendová, 2015).

3. Sonda v mateřské škole

V mateřské škole proběhla sonda, jejímž cílem bylo zjistit schopnosti dětí tří věkových kategorií

- vyřešit tři úrovně obtížnosti úkolů na kompletaci
- vyřešit tři úrovně obtížnosti úkolů na rekompozici
- vyřešit tři úrovně obtížnosti úkolů na rekonstrukci
- vyřešit tři úrovně obtížnosti úkolů na reprodukci

Součástí sondy bylo celkově 12 úkolů. Tyto úkoly plnilo 12 dětí ve třech věkových kategoriích (tři děti ve věku 3-4 roky, tři děti ve věku 4-5 let, tři děti ve věku 5-6 let), proto byly přizpůsobeny metodami, obsahem i pomůckami jak věku, tak schopnostem a individuálním zvláštnostem dětí. Aktivity probíhaly na základě pozorování. Každé dítě řešilo úkoly všech úrovní. Všechny činnosti probíhaly především formou hry.

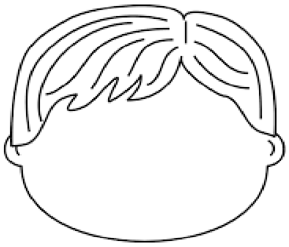
Úkoly byly rozloženy do čtyř dnů. Každý den se děti zapojily do plnění všech úrovní obtížnosti pouze jednoho úkolu z dané oblasti (tedy kompletace, rekompozice, rekonstrukce nebo reprodukce) proto, aby měly na jeho splnění dostatek času a mohly se mu dostatečně dlouho věnovat. Zaznamenaný průběh aktivit byl doplněn videozáznamem (byl pořízen písemný souhlas rodičů s pořizováním videonahrávky dětí) a po zhodnocení experimentu podle zadaných kritérií byly zjištěné skutečnosti zaznamenány do tabulky.

Vzhledem k rozsahu článku se v následujícím textu zaměříme podrobněji na kompletaci a na rekompozici. Všechny úkoly byly inspirovány výzkumy M. Kaslové (2010).

3.1. Úkol č. 1: Kompletace

- **Obtížnost 1**

Zadání: Dítě dostane předkreslený obličej a má za úkol dokreslit, co mu chybí (oči, pusa, nos).
Pomůcky: pracovní list s neúplným obrázkem (obr. 4)



Obrázek 4. Obličej (zdroj: www.detskestranky.cz)

Obrázek 5. Neúspěšné řešení (zdroj: vlastní)

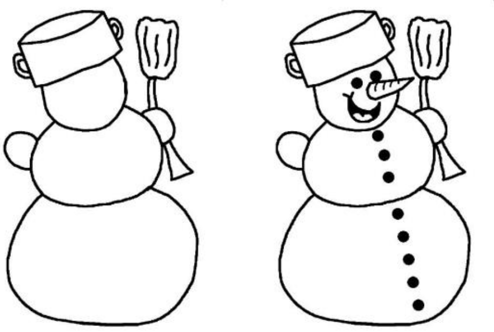
Reflexe: Kritériem pro splnění úkolu bylo samostatné doplnění všech chybějících částí obrázku. Úspěšnost řešení úrovně obtížnosti 1 kompletace byla 56 %. Dvě děti (Anna a Cyril) neřekly, co vidí na obrázku. Pět z devíti dětí na začátku řeklo, co budou kreslit, co obličeji chybí. Čtyři děti zapomněly doplnit nos, jinak oči a pusu doplnily všechny děti. Pouze Bedřich nesprávně rozvrhl části obličeje. Filip dokreslil obličeji ještě nohy a ruce a Anna nohy, ruce a tělo (obr. 5). Všechny děti si po nakreslení částí mohly obrázek vybarvit, pouze Anna si obrázek nejprve vybarvila a až poté do něj zakreslila části, co mu chybí (tab. 1). Všechny tabulky výsledků je rozděleny dle věku od nejmladšího po nejstarší, jména dětí neodpovídají skutečnosti. Děti ve věku 3-4 roky jsou označeny černě, děti ve věku 4-5 let červeně, děti ve věku 5-6 let zeleně.

Tabulka 1. Výsledek řešení úkolu č. 1, úrovně 1

jméno	doplnění očí	doplnění nosu	doplnění pusy	splnění úkolu
Anna	ano	ne	ano	ne
Bedřich	ano	ano	ano	ano
Cyril	ano	ne	ano	ne
Dan	ano	ano	ano	ano
Elena	ano	ano	ano	ano
Filip	ano	ne	ano	ne
Galina	ano	ne	ano	ne
Hana	ano	ano	ano	ano
Irena	ano	ano	ano	ano

- **Obtížnost 2**

Zadání: Dítě má obrázek nakresleného sněhuláka. Jeho úkolem je dokreslit do neúplného obrázku to, co mu chybí (nos, pusa, oči, knoflíky).
Pomůcky: pracovní list s úplným a neúplným obrázkem (obr. 6)



Obrázek 6. Sněhulák (zdroj: www.e-predskolaci.cz)

Reflexe: Za splněný úkol bylo považováno, pokud dítě samostatně doplnilo všechny chybějící části sněhuláka bez ohledu na počet knoflíků. Úspěšnost řešení úrovně 2 kompletace byla 67 %. Všechny děti začínaly doplňovat chybějící části u hlavy a postupovaly níže. Přestože v úrovni 1 kompletace některé děti nezakreslily nos, v této úrovni nos nezakreslila pouze Anna, ale dokreslila sněhulákovi nohy. Pět dětí nakreslilo mrkev (nos) jako čáru, ale Irena, Filip, Hana a Dan se snažili, aby jejich nos vypadal jako mrkev. Pusu nezakreslil pouze Dan, a to přesto, že v úrovni 1 ji zakreslil správně. Žádné dítě nezakreslilo stejný počet osmi knoflíků jako na původním obrázku. Hana počítala knoflíky na sněhulákovi, ale i tak zakreslila o jeden knoflík méně. Žádný knoflík nedoplnily dvě děti (tab. 2)

Tabulka 2. Výsledek řešení úkolu č. 1, úrovně 2

jméno	doplnění očí	doplnění nosu	doplnění pusy	doplnění knoflíků	splnění úkolu
Anna	ano	ne	ano	žádné	ne
Bedřich	ano	ano	ano	méně knoflíků	ano
Cyril	ano	ano	ano	žádné	ne
Dan	ano	ano	ne	více knoflíků	ne
Elena	ano	ano	ano	méně knoflíků	ano
Filip	ano	ano	ano	méně knoflíků	ano
Galina	ano	ano	ano	více knoflíků	ano
Hana	ano	ano	ano	méně knoflíků	ano
Irena	ano	ano	ano	méně knoflíků	ano

- **Obtížnost 3**

Zadání: Dítě má neúplný obrázek a má za úkol vybrat, jaké z připravených obrázků patří na prázdná místa.
Pomůcky: neúplný obrázek (obr. 7, na další straně)

Reflexe: Úspěšnost řešení kompletace úrovně 3 byla 78 %. Za splnění úkolu jsme považovali, pokud dítě samostatně a správně doplní chybějící části obrázku. Osm dětí se nejprve rozmýšlelo, na jaké místo obrázek patří, a až poté ho nalepilo. Pouze Dan si všechny části nejprve doplnil a až poté lepil. Osm dětí správně doplnilo všechny chybějící části. Anna a Bedřich doplnili správně pouze jednu část a ostatní již nevěděli, Oba správně nalepili motýla na fialovém plotě. Bylo to zřejmě z toho důvodu, že byl ze všech částí barevně nejvýraznější (tab. 3).

Tabulka 3. Výsledek řešení úkolu č. 1, úrovně 3

jméno	doplnění všech částí	doplnění jiného počtu částí	splnění úkolu
Anna	ne	jedna část	ne
Bedřich	ne	jedna část	ne
Cyril	ano		ano
Dan	ano		ano
Elena	ano		ano
Filip	ano		ano
Galina	ano		ano
Hana	ano		ano
Irena	ano		ano

Celková úspěšnost řešení úkolu č. 1 byla 67 %. Podle předpokladu ji nejlépe zvládly děti ve věku 5-6 let a nejnižší úspěšnost řešení měly děti ve věku 3-4 roky. Děti z uvedeného vzorku nejlépe provedly kompletaci obrázku, nejvíce problémů se objevilo při dokreslování obličeje.

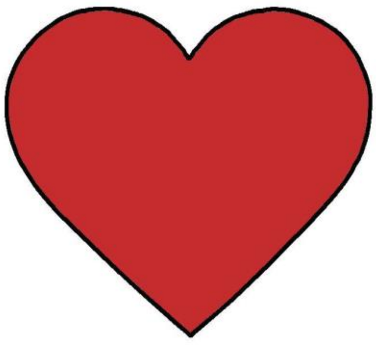
Bylo to zřejmě způsobeno tím, že děti pracovaly na základě představy. Při doplňování obrázku sněhuláka využívaly vzor, což bylo pro ně jednodušší.

Obrázek 7. Neúplný obrázek (zdroj: Kolektiv autorů, 2020, s. 10)

3.2. Úkol č. 2: Rekompozice

- **Obtížnost 1**

Zadání: Dítě dostane srdce z papíru. Má za úkol ho roztrhnout a znovu složit. Toto se bude opakovat dvakrát.
Pomůcky: papírové srdce (obr. 8)



Obrázek 8. Srdce (zdroj: vlastní)

Obrázek 9. Složené srdce (zdroj: vlastní)

Reflexe: Úspěšnost řešení rekompozice úrovně 1 byla 67 %. Děti ve věku 3-4 roky tento úkol správně nevyřešily, měly potíže obrázek i roztrhnout. Anna a Bedřich obrázek roztrhli a správně složili pouze jednou, poté ho opět roztrhli, ale již správně nesložili. Cyril správně roztrhl a složil srdce dvakrát, potřetí se mu to již nepodařilo. Děti ve věku 4-5 let a 5-6 let úkol splnily všechny, jen Filip (obr. 9) kvůli potížím s jemnou motorikou potřeboval na splnění úkolu více času než ostatní (tab. 4).

Tabulka 4. Výsledek řešení úkolu č. 2, úrovně 1

jméno	roztržení a složení obrázku třikrát	roztržení a složení obrázku dvakrát	roztržení a složení obrázku jednou	splnění úkolu
Anna			ano	ne
Bedřich			ano	ne
Cyril		ano		ne
Dan	ano			ano
Elena	ano			ano
Filip	ano			ano
Galina	ano			ano
Hana	ano			ano
Irena	ano			ano

- **Obtížnost 2**

Zadání: Dítěti předložíme komín ze tří kostek. Prohlédne si ho. Zbourá ho a znovu postaví, přidá jednu kostku. Toto se bude opakovat, dokud nebude mít komín z pěti kostek (obr. 10).
Pomůcky: dřevěné kostky

Obrázek 10. Postavené komíny (zdroj: vlastní)

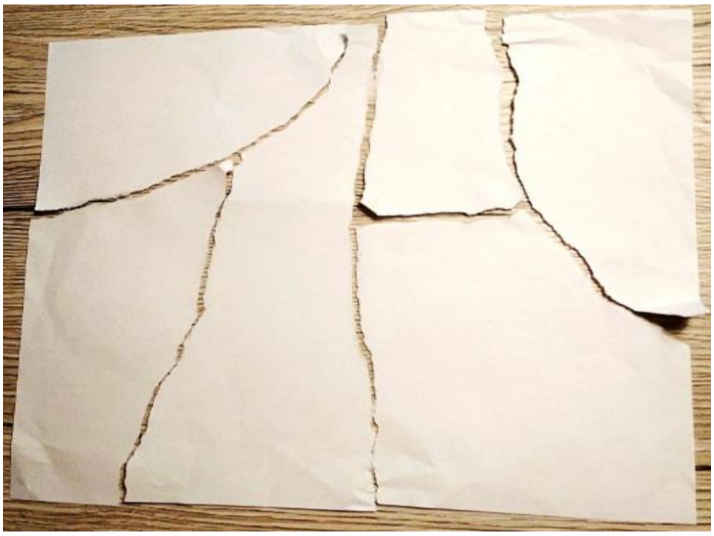
Reflexe: Úspěšnost řešení rekompozice úrovně 2 byla 78 %, úkol nesplnila Galina a Anna. Galina nepochopila zadání, zbourala původní komín, ale již nepostavila další. Po opakování zadání komín postavila, ale pouze o třech kostkách. Po upozornění a znovu vysvětlení zadání stále nedokázala úkol splnit správně. Nerozuměla zřejmě významu slovního spojení „přidej jednu kostku“. Anna zbourala původní komín, postavila nový, ale přidala pouze dvě kostky místo jedné. Pouze Elena zbourala komín a nový postavila ze stejných barev, a to i podle stejného pořadí. Bedřich byl z mladších dětí (3-4 let a 4-5 let) nejrychlejší, ihned rozuměl zadání, nemusel nad tím přemýšlet (tab. 5).

Tabulka 5. Výsledek řešení úkolu č. 2, úrovně 2

jméno	opakované boření komínu a přidání jedné kostky do pěti kostek	jiné řešení úkolu	splnění úkolu
Anna		ano	ne
Bedřich	ano		ano
Cyril	ano		ano
Dan	ano		ano
Elena	ano		ano
Filip	ano		ano
Galina		ano	ne
Hana	ano		ano
Irena	ano		ano

- **Obtížnost 3**

Zadání: Dítě dostane prázdný list papíru A4 nabarvený z jedné strany. Roztrhne ho a opět složí celý list. Vybere si nějakou část, opět ji roztrhne a složí. Toto se bude opakovat čtyřikrát. Papír nabarvený z jedné strany je vhodný pro lepší orientaci dítěte při skládání, aby lépe vidělo, jaké díly patří k sobě.
Pomůcky: papír A4 nabarvený z jedné strany



Obrázek 11. Úspěšné řešení Dana (zdroj: vlastní)

Reflexe: Úspěšnost řešení rekompozice úrovně 3 byla 56 %. Děti postupovaly velice systematicky, aby zadání co nejlépe zvládly. Dokonce i na mladších dětech bylo vidět, jak se na úkol soustředí a jak se snaží vymyslet, jak nejlépe zadání splnit. Děti vzaly vždy pouze jednu část papíru, roztrhly a vložily opět na její místo. Z dětí ve věku 3-4 let tento úkol splnil pouze Cyril. Anna a Bedřich papír roztrhli a složili, po dalším roztrhnutí se jim již úspěšně nepodařilo složit papír. Z dětí ve věku 4-5 let tento úkol splnil pouze Dan, který dokonce jako jediný ze všech dětí po pomíchání šesti útržků, které vždy nakonec u všech dětí provedli experimentátoři, opět složil papír správně (obr. 11). Všechny děti ve věku 5-6 let zadání systematickým způsobem úspěšně vyřešily, ale po pomíchání útržků již papír nedokázaly složit (tab. 6).

ISSN 2694-8133

Tabulka 6. Výsledek řešení úkolu č. 2, úrovně 3

jméno	**roztržení a složení papíru jednou**	**roztržení a složení papíru dvakrát**	**roztržení a složení papíru třikrát**	**roztržení a složení papíru pětkrát**	**splnění úkolu**
Anna	ano				ne
Bedřich	ano				ne
Cyril				ano	ano
Dan				ano	ano
Elena		ano			ne
Filip			ano		ne
Galina				ano	ano
Hana				ano	ano
Irena				ano	ano

Celková úspěšnost řešení úkolu č. 2 byla 67 %. Podle předpokladu ji nejlépe zvládly děti ve věku 5-6 let a nejnižší úspěšnost řešení měly děti ve věku 3-4 roky. Děti z uvedeného vzorku nejlépe provedly stavby komínů, nejobtížnějším úkolem pro ně bylo rozkládání a opětovné skládání čistého listu papíru, které vyžadovalo dobrou představivost a orientaci v rovině.

4. Závěr

Na základě zkušeností můžeme říci, že do práce dětí s celkem a jeho částmi je v mateřských školách v hojné míře zařazována kompletace. Jak ukázala výše popsaná sonda, je vhodné úspěšně využívat i činnosti na rekompozici.

Acknowledgements

Článek vznikl v rámci projektu BAMAPE2021 „Vnímání celku a jeho částí u dětí v mateřské škole“.

Literatura

Divíšek, J. (1989). *Metodika rozvíjení matematických představ v mateřské škole.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Fuchs, E., Lišková, H., & Zelendová, E. (2015). *Rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku.* Praha: JČMF.

Kaslová, M. (2010). *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání.* Praha: Raabe.

Kolektiv autorů (2020). *Kreativní úkoly.* Praha: O-press.

Kolektiv autorů (2020). *Dětské stránky.* http://www.detskestranky.cz.

Nováková, E., & Novák, B. (2019). *Matematická pregramotnost a učitelé mateřských škol.* Brno: Masarykova univerzita.

Rybáčková, L. (2020). *Pomůcky a pracovní listy pro děti v mateřské škole.* http://e-predskolaci.cz.

ISSN 2694-8133

VYUŽITÍ DĚTSKÝCH ČASOPISŮ VE VÝUCE MATEMATIKY

Jitka JACÍKOVÁ[1], Šárka PĚCHOUČKOVÁ[2], Václav KOHOUT[3]
[1] Základní škola a mateřská škola Žihobce (Česká republika)
[2] Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická (Česká republika)
[3] Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická (Česká republika)
skola@zihobce.eu, pechouck@kmt.zcu.cz, vkohout@kmt.zcu.cz

Abstrakt

Součástí Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání jsou průřezová témata, která prostupují jednotlivými vzdělávacími oblastmi, reflektují aktuální problémy současného světa a přispívají k všestrannému rozvoji žáků. Mezi průřezová témata patří také mediální výchova, při které můžeme žáky mimo jiné učit využívat potenciál médií jako zdroje informací. Mezi média lze zařadit i dětské časopisy.

V prvním a druhém ročníku malotřídní základní školy proběhla sonda, jejímž cílem byla analýza některých současných dětských časopisů z hlediska nalezení vhodných matematických činností, jejich zařazení do vyučování matematiky a reflexe žáků. Na základě vyhodnocení výsledků sondy bylo zjištěno, že pravidelné zařazování těchto aktivit zvýšilo motivaci žáků, jejich tempo a sebejistotu při výkonu různých matematických operací. Výhodou bylo i uplatňování individuálního přístupu k žákům se specifickými poruchami učení.

Klíčová slova: průřezová témata, mediální výchova, dětský časopis, vyučování matematiky

UTILITY OF MAGAZINES FOR CHILDREN IN MATHEMATICS EDUCATION

Abstract

The Czech curriculum framework for elementary education contains cross-disciplinary topics which link together the single areas of education. These topics deal with current global issues and contribute to a well-rounded education. Media education, which teaches students how to use the potential of media as source of information, is one of such cross-disciplinary topics.

Media education was the subject of a study that took place in the first and second year of a small elementary school with composite classes in Czechia. Its aim was to analyze several contemporary magazines for children for suitable mathematical activities. Furthermore, this study assessed the utility of these activities in mathematics education and children's feedback in their regard. We discovered that regular use of these activities in education increased pupils' motivation, speed and self-confidence when performing various mathematical operations. Enabling individual approach to children with learning disabilities was also an advantage.

Keywords: cross-disciplinary topics, media education, magazine for children, mathematics education

1. Úvod

Součástí Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání jsou průřezová témata. Ta prostupují vzdělávacími oblastmi a umožňují tak propojení vzdělávacích obsahů a oborů, čímž přispívají k celistvému a všestrannému vzdělávání žáků. Zároveň reflektují aktuální problémy současného světa a pomáhají žákům rozvíjet jejich osobnost jak v oblasti vědomostí, dovedností a schopností, tak i v oblasti postojů a hodnot (Jeřábek, 2017). Výběr témat a způsob jejich zpracování v učebních osnovách je v kompetenci školy.

Mezi průřezová témata patří také mediální výchova, která pomáhá rozvíjet osobnost žáka v mnoha směrech. Jedná se o přínos v oblasti vědomostí, dovedností a schopností. Pro potřeby tohoto článku lze za přínosné označit následující body:

- pomáhá úspěšnému a samostatnému zapojení žáka do mediální komunikace;
- umožňuje rozvíjet schopnost analytického přístupu k mediálním obsahům a kritického odstupu od nich;
- učí využívat potenciál médií jako zdroje informací, kvalitní zábavy i naplnění volného času;
- umožňuje pochopení cílů a strategií vybraných mediálních obsahů;
- rozvíjí komunikační schopnost (stylizace psaného a mluveného projevu);
- přispívá k využívání vlastních schopností v týmové práci. (Jeřábek, 2017)

V rámci mediální výchovy můžeme do vyučování matematiky zařadit i práci žáků s časopisy. Než se tímto tématem budeme zabývat podrobněji, pokusíme se vymezit základní pojmy, jako je médium, časopis a dětský časopis.

2. Základní pojmy

Pojem **médium** vychází z latinského slova *medius* a znamená prostředek, prostředník nebo zprostředkující činitel. Masová média (masmédia) jsou taková média, která slouží celospolečenské komunikaci, tudíž komunikaci mezi jedním výchozím bodem a vysokým počtem bodů cílových. V Praktické encyklopedii žurnalistiky (Osvaldová, Halada, 2002) jsou média dělena na tištěná a elektronická. Mezi tištěná média řadíme noviny, časopisy, knihy, mezi elektronická média rozhlas, televizi a internet. Mičienka a Jirák (2007) rozlišují dále média „stará“ a „nová“. Za „stará“ média považují noviny, časopisy, rozhlas, filmy a televizi. „Novými médii“ rozumí varianty „starých médií“ a nové komunikační možnosti v prostředí počítačových sítí – internet, digitální televize. Časopis tak může být médiem tištěným, starým a současně i novým, protože mnohé časopisy již vychází i v elektronické podobě.

Podle Praktické encyklopedie žurnalistiky je **časopis** „tiskovina, která vychází pravidelně, v určitém místě a má nejméně půlroční a nejvíce jednotýdenní periodicitu. Od deníku se liší menší aktuálností, větší podrobností probíraných témat a grafickou úpravou. Svou strukturou, stavbou textů i celkovým zaměřením je určena vyhraněnému okruhu čtenářů, který je již zpravodajsky informován a hledá detailnější nebo specializované údaje“. (Osvaldová, Halada, 2002, s. 38). Setkává-li se dítě u rodičů s možností hry s dětským časopisem a s jeho všestranným využitím, dostává dobrý základ pro budoucí čtení, psaní i počítání. Rozvíjí se jeho grafomotorické dovednosti, prohlubuje se úroveň jazykového projevu a budují se matematické představy a dovednosti. Dítě získává potřebný návyk v práci s textem a hlavně se učí, aniž o tom ví. Učí se hrou. Vztah dítěte ke knize či časopisu má značný význam pro jeho duševní rozvoj, estetické vnímání, celkovou kultivaci projevu a jeho socializaci. Naučí se také pohybovat v mediálním světě, vyhodnocovat přínosnou a kvalitativní stránku svého výběru.

Výhodou využití dětských časopisů ve výuce matematiky je podle našeho názoru možnost individuální práce žáků na různých úkolech. Tyto úkoly mohou být variabilní podle aktuálních schopností a dovedností žáka, a to s přihlédnutím i k inkluzivnímu vzdělávání.

Z hlediska matematiky mohou v tomto duchu rozvíjet své matematické dovednosti a schopnosti žáci nezávisle na sobě a každý svým vlastním tempem. Tato forma zaručuje prostor k motivovanému učení bez stresu a strachu z neúspěchu před ostatními. Žáci v tomto okamžiku sledují svůj vlastní úkol, aniž by byli mezi sebou srovnáváni a neobávají se zklamání. Každý přitom cítí důležitost svého úkolu. Takto zorganizovaná výuková jednotka zaručí učiteli dodržení potřebného výukového tempa v rámci jedné třídy. Mnohdy se podaří kontinuálně navázat od jednodušších úkolů k obtížnějším a podnítit tak přirozenou zvídavost žáků k novému učivu. Tímto způsobem může učitel také vyhovět nadanějším žákům, což je občas problém zejména v případě malotřídního vzdělávání. Kladný efekt nastává ve chvíli, kdy je vše organizačně zvládnuté, propojené, fungující a zároveň naplňující výchovně vzdělávací cíle výuky.

3. Experiment na základní škole

V prvním a druhém ročníku malotřídní základní školy proběhla sonda, jejímž cílem bylo:

- obsahová analýza vybraných současných dětských časopisů;
- nalezení vhodných matematických činností, jejich zařazení do vyučování matematiky a reflexe žáků.

3.1. Obsahová analýza vybraných dětských časopisů

Při obsahové analýze dětských časopisů pro mladší školní věk jsme vycházeli z témat splňujících rozsah základního vzdělávání na prvním stupni základní školy a zároveň jsme sledovali odbornou správnost jednotlivých úkolů nebo činností. Analyzovali jsme poslední dva ročníky u 30 časopisů, které v době, kdy se sonda uskutečnila, vycházely. Při vlastním šetření jsme zjistili, že nabídka všestranného jazykového rozvoje dětských čtenářů a zahlcení reklamními a líbivými tématy je v naprosté převaze nad nabídkou umožňující rozvoj matematických představ a dovedností u dětí. Následující přehled ukazuje sestupně podle počtu zastoupení matematické činnosti vyskytující se v analyzovaných časopisech:

- řešení bludišť nebo labyrintů;
- hledání rozdílů mezi dvěma obrázky;
- orientace v rovině prostřednictvím orientace na obrázku;
- spojování čísel v řadě (vznikne obrázek);
- úkoly na jednoduché početní operace nebo aplikační úlohy;
- práce s rovinnými útvary.

Z hlediska odborné správnosti jsme zaznamenali nejčastěji chybu, která se objevuje na obrázku 1. Uvedené znázornění operace odčítání přirozených čísel neodpovídá reálné situaci – ve skutečnosti máme např. celkem 9 kruhů, od kterých odebereme 4 kruhy, na obrázku 1 se však používá celkem 13 kruhů – a zároveň nesprávně „odečítáme množiny“ namísto odčítání čísel.

3.2. Využití vybraných činností ve výuce matematiky

Z původního souboru 30 časopisů bylo na základě obsahové analýzy vybráno 7 časopisů, jejichž stručnou charakteristiku se zaměřením na využití ve výuce matematiky uvádíme v následujícím textu.

Časopis ***Dráček*** je určen dětem předškolního a mladšího školního věku. Kombinuje jednoduchá encyklopedická fakta s pohádkami. Je ilustrován profesionálními ilustrátory a vzniká ve spolupráci s dětskými logopedy, psychology a pedagogy. Z hlediska matematiky lze využít křížovky, kvízy a luštění. Zakládá si na vzdělávání hrou, proto je redakcí doporučován i jako učební pomůcka. Podporuje analytické myšlení, rozvoj fantazie a logické uvažování. Na webových stránkách tohoto časopisu lze stáhnout různě tematicky zaměřené ukázky (https://casopis-dracek.cz).

Časopis ***Sluníčko*** se zaměřuje na předškolní a mladší školní věk do 7 let. Rozvíjí především estetické, jazykové, poznávací a praktické schopnosti dítěte. Pro využití v matematice zde najdeme hádanky, doplňovačky, hlavolamy, hledání rozdílů mezi obrázky a vystřihovánky (Sluníčko, letní speciál, léto 2016).

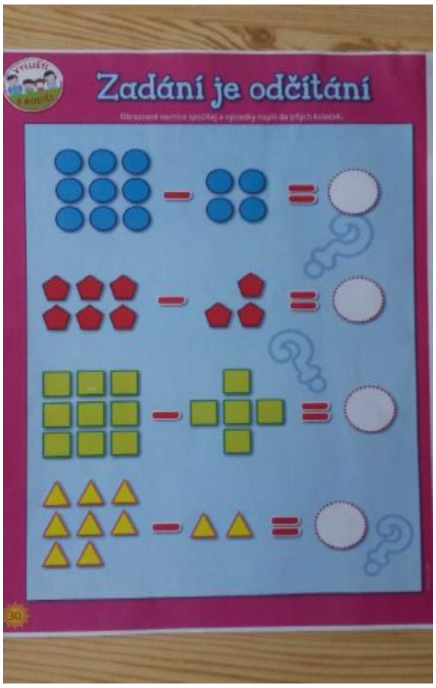
Mateřídouška určena pro děti od 7 do 12 let. V časopisu najdeme původní autorské ilustrace, zábavné i naučné články, hravé „úkolovky“, komiksy a čtení na pokračování. Ve výuce matematiky lze využít luštění, rébusy, křížovky, procvičování jemné motoriky (Mateřídouška, ročník 71, č. 1/2015).

Makovice je mezigenerační časopis pro děti, rodiče i prarodiče, nese podtitul „luštění pro chytré hlavičky od 8 do 108 let“. Zábavným způsobem procvičuje paměť, logické uvažování, kombinační schopnosti, rozšiřuje slovní zásobu a všeobecné znalosti. Časopis je přímo doporučen jako vhodný doplněk učiva žáků základních škol a také pro seniory při tréninku paměti. Osvědčil se i při výuce dyslektiků (Makovice, ročník 23, č. 183/2018).

Dětský luštitelský časopis ***Luštění pro kluky a holky*** je zaměřen na rozvoj logického myšlení dětí mladšího školního věku a jejich slovní zásoby. Do výuky matematiky můžeme zařadit vědomostní kvízy, obrázkové hádanky, křížovky, spojovačky, doplňovačky, bludiště a osmisměrky (Luštění pro kluky a holky, č. 1/2018).

V časopisu ***Luštění pro děti*** určeném pro děti od 4 do 8 let najdeme bludiště, osmisměrky, hledání rozdílů mezi obrázky, křížovky, číselné labyrinty, úkoly na sčítání a odčítání, dokreslování obrázků podle osy souměrnosti, číselné spojovačky, číselné omalovánky a číselné řady (Luštění pro děti, č. 1/2018).

Interaktivní občasník ***Klobouk na pařezu*** je určen všem věkovým kategoriím, zejména rodičům s dětmi, kteří zde mohou rozvíjet tvořivost a fantazii – dotvářet příběhy, vykreslovat, omalovávat, vyrábět, počítat na ručně malovaných stránkách připravených různými autory. Každé číslo je originál. Do výuky matematiky jsou vhodné zejména volně vložené přílohy koncipované jako deskové početní hry (https://kloboukanaparezu.cz).



Obrázek 1. Zadání je odčítání
(Luštění pro děti, 1/2018, s. 30)

Obrázek 2. Řešení pracovního listu č. 1

Cílovou skupinu tvořili žáci I. třídy malotřídní základní školy. Jednalo se o různorodou skupinu žáků prvního (5 žáků) a druhého ročníku (7 žáků) a jedné žákyně se speciálními vzdělávacími potřebami, která první ročník opakuje. Má diagnostikovanou lehkou mozkovou poruchu a vyžaduje přítomnost asistenta pedagoga. Z výše jmenovaných časopisů jsme vybrali úkoly a činnosti, které pomáhají rozvíjet matematické dovednosti žáků mladšího školního věku. Dvojice žáků měla k dispozici časopis Sluníčko, se kterým jsme pracovali společně. Využili jsme ho v rámci hlavní pracovní činnosti (výklad jednotek času) i k procvičování. Ostatní úkoly měli žáci připravené z dalších časopisů formou pracovních listů pro samostatnou práci. Každý žák měl vytvořený list podle svých aktuálních schopností a dovedností. Jelikož se jednalo o různorodou skupinu žáků, bylo tímto způsobem přihlédnuto k individuálním vzdělávacím potřebám daného žáka. Slabší žáci procvičovali problematickou část učiva, nadaným žákům byly zadávány nestandardní úlohy podporující rozvoj jejich matematických dovedností. Celkem jsme vytvořili 40 různých pracovních listů.

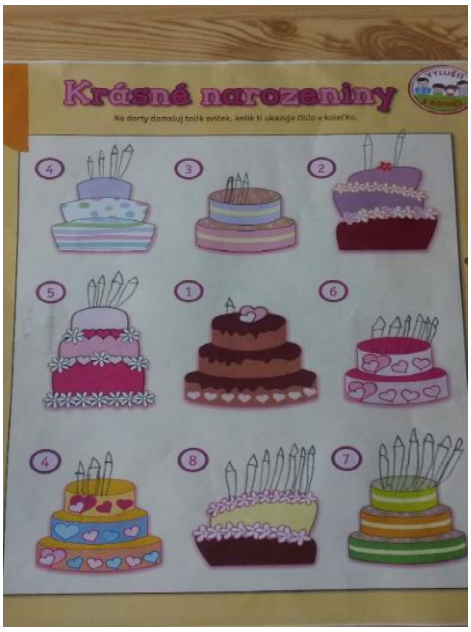
V následujícím textu uvedeme několik ukázek. Každá obsahuje cíl činnosti, způsob realizace a stručnou reflexi žáků. Nejdříve se zaměříme na práci žákyně s lehkou mozkovou poruchou (pracovní list č. 1, 2, 3), poté se budeme věnovat ostatním žákům (pracovní list č. 4, 5, 6, 7).

Žákyni se speciálními vzdělávacími potřebami pracovní listy zaujaly. Přijala je jako odměnu a zpestření ve výuce. Bohužel žádný z nich nebyla schopna vypracovat sama. Pokaždé očekávala alespoň nepřímý souhlas s každým svým krokem. Ve spolupráci s učitelkou či s asistentem ji činnost bavila, nicméně vyžadovala neustálou zpětnou vazbu. Samostatná činnost byla pro ni obtížná a dopouštěla se při ní chyb. I přes opakované vysvětlení byly některé činnosti nepochopeny, zejména ty, které vyžadovaly abstraktní myšlení.

Pracovní list č. 1
Číselný labyrint, Luštění pro děti, 1/2018, s. 31.
Cíl: Procvičit číselnou řadu 1-10.
Realizace: Úkolem žákyně bylo najít cestu opičky k jejímu kamarádovi. Cesta vedla přes správně určenou posloupnou řadu čísel od jedné do deseti. Nejprve jsme si zopakovaly celou číselnou řadu na prstech, poté na kartičkách s čísly (žákyně je seřadila od 1 do 10) a poté bylo úkolem žákyně samostatně označit cestu v pracovním listě. Ze začátku postupovala žákyně prstem, poté pastelkou.
Reflexe: Přestože byla žákyně schopna vyjmenovat správně číselnou řadu od 1 do 10, bylo pro ni obtížné najít tuto řadu čísel postupně za sebou. Mátla ji přítomnost mnoha stejných čísel. Pokud našla další číslo v řadě, přešla k němu bez dodržení přesné posloupnosti. Pro žákyni bylo obtížné soustředit se na dodržení více pravidel najednou: posloupnost po sobě jdoucích čísel, nepřeskakovat, propojit číselnou řadu jedním tahem. Při opětovném pomalém vedení byla schopna prstem označit chybu a najít nejbližší číslo bez nahodilého přeskakování (obr. 2).

Pracovní list č. 2
Krásné narozeniny, Luštění pro děti, 1/2018, s. 7.
Cíl: Procvičit přiřazování počtu objektů ke grafické podobě čísla.
Realizace: V rámci úvodní motivace jsme se zeptali, kolikáté narozeniny bude žákyně slavit a zda nám to může ukázat na prstech. Povídali jsme i o tom, zda bude mít dort se svíčkami, jak by měl dort vypadat a koho si pozve na oslavu. V návaznosti na vyprávění jsme se zeptali, zda by se jí nějaký dort na pracovním listu líbil. Poté jsme plynule přešli k tomu, co na dortech chybí, a vysvětlili si, že úkolem je domalovat počet svíček podle zadaného čísla (obr. 3).
Reflexe: Žákyně čtyřikrát chybovala. K číslům 4, 5, 7 a 8 nakreslila nesprávný počet svíček. Bylo zřejmé, že žákyně neměla ještě pevně zafixovanou grafickou podobu čísla a příslušného počtu.

Protože měla žákyně problém s jemnou motorikou, počítalo se jí špatně i na prstech. Bez konkrétního názoru však nebyla schopna bezpečně určit správný počet. Používali jsme tedy počitadlo nebo víčka od PET lahví.



Obrázek 3. Řešení pracovního listu č. 2

Obrázek 4. Řešení pracovního listu č. 3

Pracovní list č. 3
Barvičkové sudoku, Sluníčko, letní speciál 2016, s. 9
Cíl: Doplnit chybějící barvu v řádku a sloupci tak, aby se žádné barvy v řádku ani ve sloupci neopakovaly.
Realizace: Nejprve žákyně zkusila samostatně doplnit první řadu a levý sloupec, poté přešla na třetí řádek a podařilo se jí prázdné kroužky vybarvit správně. Podle sdělení asistenta pedagoga byla žákyně již nesoustředěná, zjevně dezorientovaná a bez motivace pokračovat v úkolu. Zadali jsme tedy úkol procvičit orientaci v rovině (určit, která barva je vlevo nahoře, vlevo dole, vpravo nahoře, vpravo dole, první jako při začátku čtení textu, která je poslední na konci). Na závěr měla vzít barevná PET víčka a položit je na pracovní list do všech čtyřech rohů na místa barevných kroužků a nahlas označit barvu a polohu (vlevo nahoře, vlevo dole, vpravo nahoře, vpravo dole). Takto přizpůsobený úkol udržel její pozornost a zároveň odlehčil obtížnost původního zadání.
Reflexe: Při tomto úkolu potřebovala žákyně plnou dopomoc a vedení s následnou zpětnou reflexí. Aby nehrozila ztráta motivace a soustředění, bylo třeba aktuálně změnit zadání a přizpůsobit ho momentálním možnostem žákyně (obr. 4).

Následující pracovní listy byly určeny pro ostatní žáky 1. nebo 2. ročníku.

Pracovní list č. 4
Ve spíži, Luštění pro děti, 1/2018, s. 28
Cíl: Procvičit určování počtu objektů dle zadaných kritérií.
Realizace: Úkol vypracovávali žáci 1. i 2. ročníku. Na úvod této činnosti jsme se žáků zeptali, zda doma zavařují ovoce a jaké druhy, jestli mají rádi jablečný džus, tedy mošt. Zajímali jsme se o to, zda někdy někdo chodil tajně ochutnávat džem k babičce do spíže.

ISSN 2694-8133

Takovou spíž babičky Zorky jsme našli i na pracovním listu č. 4. Úkolem žáků bylo spočítat, kolik různých druhů džemů a džusů má babička Zorka ve spíži.
Reflexe: Žákům nedělalo vypracování úkolu větší potíže, dokázali vizuálně odlišit příslušné objekty. Z 12 žáků se dopustila chyby pouze jedna žákyně, ale po upozornění vše spočítala správně (obr. 5).

Pracovní list č. 5
Týdeníček, Sluníčko, 1/2017, s. 25
Cíl: Seřadit dny v týdnu ve správném pořadí, procvičit operaci odčítání.
Realizace: Úkol vypracovávali pouze žáci 1. ročníku. Pro každého žáka jsme připravili do obálky kartičky s názvy dnů v týdnu vystřižené z pracovního listu (obr. 6). Žáci měli za úkol vyjmenovat dny v týdnu. Poté určili, kolik jich je celkem, které jsou pracovní dny a které dny volna. Každý žák samostatně sestavil celý týden. Po společné kontrole správného pořadí dní jsme se ptali, kolikátý den je sobota, pondělí, atd. Poté jsme kladli otázky typu, jaký den je třetí v pořadí, pátý, atd. Takto jsme procvičili řadové číslovky. Řekli jsme si rovněž, který den byl v okamžiku plnění úkolu a kolikátý den to byl v týdnu. Následovala slovní úloha se zadáním: *Týden má celkem 7 dní, z toho jsou 2 dny volna. Kolik je pracovních dní v týdnu?* Do sešitu jsme provedli zápis, znázornění, výpočet a napsali odpověď. Nakonec jsme si rozstříhané dny nalepili ve správném pořadí do sešitu a mezi pátkem a sobotou jsme nechali mezeru (názorné odlišení pracovních dnů a dnů volna).
Reflexe: Tato činnost žáky velmi bavila. Procvičili jsme a zafixovali správné pořadí dnů v týdnu, procvičili řadové číslovky a slovní úlohu na odčítání. Žádný z žáků neměl problémy se seřazením dnů ve správném pořadí.

Obrázek 5. Řešení pracovního listu č. 4

Obrázek 6. Kartičky s názvy dnů v týdnu

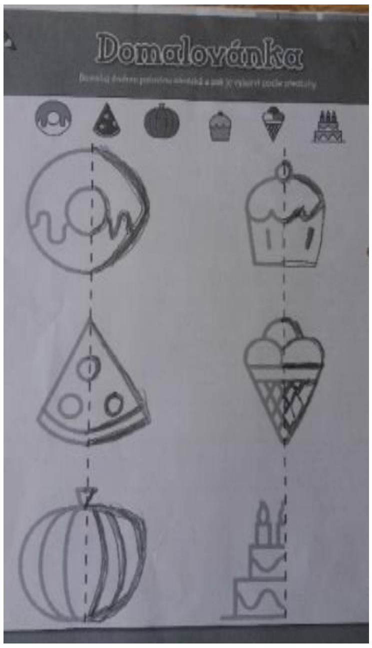
Pracovní list č. 6
Domalovánka, Luštění pro děti, 1/2018, s. 20
Cíl: Procvičit domalovávání objektů podle osy souměrnosti, procvičit grafomotorické dovednosti žáků.

ISSN 2694-8133

Realizace: Zařazení této činnosti jsme chtěli zjistit úroveň abstraktního myšlení a představivosti žáků. Úkol byl zařazen jako dobrovolný, plnili ho pouze tři žáci (jeden žák a dvě žákyně).
Reflexe: Výsledek této činnosti byl velmi zajímavý. Jeden žák se snažil splnit úkol správným zobrazením druhé poloviny objektu i jeho vymalováním (obr. 7). Jedna žákyně se úspěšně snažila dokreslit tři objekty jednoduššího tvaru, složitější objekty se jí nepodařilo dokreslit (obr. 8). Druhá žákyně důkladně dokreslila 5 objektů z 6 bez následného vybarvení. Poslední objekt nestihla dokreslit z časových důvodů, přesto lze její práci považovat za nejzdařilejší (obr. 9)

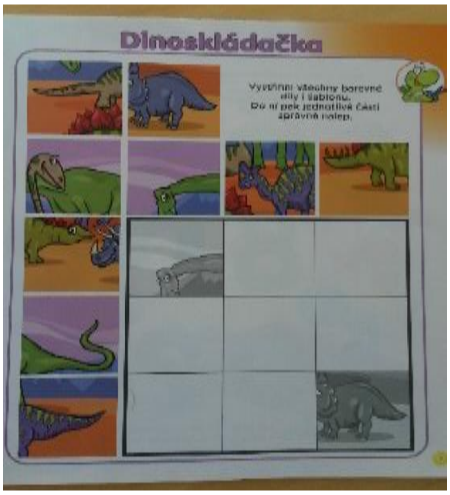
Obrázek 7. Řešení žáka

Obrázek 8. Řešení jedné žákyně



Obrázek 9. Řešení druhé žákyně

Pracovní list č. 7
Dinoskládačka, Sluníčko, letní speciál 2016, s. 7
Cíl: Procvičit orientaci v rovině.
Realizace: Úkol plnili žáci prvního i druhého ročníku. Nejprve vystřihli všechny barevné díly i šablonu. Do ní pak jednotlivé části správně nalepili.
Reflexe: Úkol žáci vypracovali bez jakýchkoliv problémů (obr. 10, obr. 11)



Obrázek 10. Zadání pracovního listu č. 7


Obrázek 11. Řešení pracovního listu č. 7

4. Závěr

V malotřídním vzdělávání je velmi důležité vhodně organizačně rozdělit výukovou jednotku. V jedné třídě jsou dva až tři sloučené ročníky. Přímá pedagogická činnost s žáky je tedy limitovaná v důsledku práce s dalším ročníkem. Vzniká tak větší prostor pro samostatnou práci žáků. Jak ukázala výše popsaná sonda, vhodným způsobem můžeme při malotřídním vzdělávání využít práci s dětským časopisem. Tato práce byla pro žáky přínosná. Nejenže se zvýšil zájem ze strany žáků o doplňkové procvičovací aktivity, ale také se žáci zlepšili ve svých výkonech. Pravidelné zařazování těchto činností zvýšilo jejich motivaci, tempo a sebejistotu při výkonu různých matematických operací.

Výhodou využití dětských časopisů ve výuce matematiky je zábavná forma procvičování, individuální přístup, respektování vlastního tempa, podpora vzájemné spolupráce a pomoci mezi žáky. Vhodným způsobem tak můžeme žáky seznámit s časopisem jako médiem nesoucím vedle zábavy také různé informace a využít je v mezipředmětových vztazích. Je však třeba dbát na odbornou správnost vybíraných úkolů.

Acknowledgements

Článek vznikl v rámci projektu GRAK2021 „Aktivizující metody ve výuce matematiky“.

Literatura

Dráček. Extra Publishing. http://casopis-dracek.cz.

Jeřábek, J., & Kolektiv (2017). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani/

Klobouk na pařezu. Dýně na pařezu. http://klobouknaparezu.cz/.

Luštění pro děti, č. 1/2018. Praha: Bauer Media v.o.s.

Luštění pro kluky a holky, č. 1/2018. Ostrava: Turpress, spol. s r. o.

Makovice, ročník 23, č. 183/2018. Praha: Společnost Makovice.

Mateřídouška, ročník 71, č. 1/2015. Praha: CN Invest a.s.

Mičienka, M. & Jirák, J. (2007). *Základy mediální výchovy.* Praha: Portál.

Osvaldová, B. & Halada, J. (2002). *Praktická encyklopedie žurnalistiky.* Praha: Libri.

Sluníčko, letní speciál, léto 2016. Praha: CN Invest a.s.

Sluníčko, č. 1/2017. Praha: CN Invest a.s.

KANGAROO ON THE CHESSBOARD AS A DIDACTIC TOOL

Karel PASTOR
Palacký University Olomouc, Faculty of Education (Czech Republic)
karel.pastor@upol.cz

Abstract

The level of mathematical literacy can be significantly increased by means of board games as for example chess. Solving mathematical chess problems can develop combinatorial skills of pupils aged 6-11. Mathematical chess problems use chessboard or chess pieces. We will focus on a special piece named kangaroo that was introduced in the competition Mathematical Kangaroo. We will deal, among the others, with the domination problem of kangaroo, the independence problem of kangaroo and the kangaroo tour problem. These problems have been already solved for 4×4 and 6×6 chessboards in the previous papers, so we will be interested in 5×5 chessboard. The reduced chessboard is used because a smaller chessboard seems to be more accessible to pupils aged 6 to 11.

Keywords: Mathematical chess problems, combinatorics, Mathematical Kangaroo

1. Introduction

We have already studied mathematical chess problems in our previous papers (Pastor, 2019), (Pastor, 2020a), (Pastor, 2020b).

Recall that a mathematical chess problem is a mathematical problem that is formulated using a chessboard and chess pieces ("Mathematical chess problems", Wikipedia). For more details, see (Gik, 2019), (Chybová, 2017), (Watkins, 2004).

In our paper, we will focus on a special piece named kangaroo that was introduced in the competition Mathematical Kangaroo ("Matematický klokan 2015"). We will deal, among the others, with the domination problem of kangaroo, the independence problem of kangaroo and the kangaroo tour problem. We will use a reduced chessboard 5×5 because this chessboard seems to be more appropriate for pupils aged 6 to 11. Moreover, we will illustrate on some examples that also chess diagrams can develop combinatorial skills.

A kangaroo moves one square horizontally then three squares vertically or three squares horizontally then one square vertically, see Figure 1.

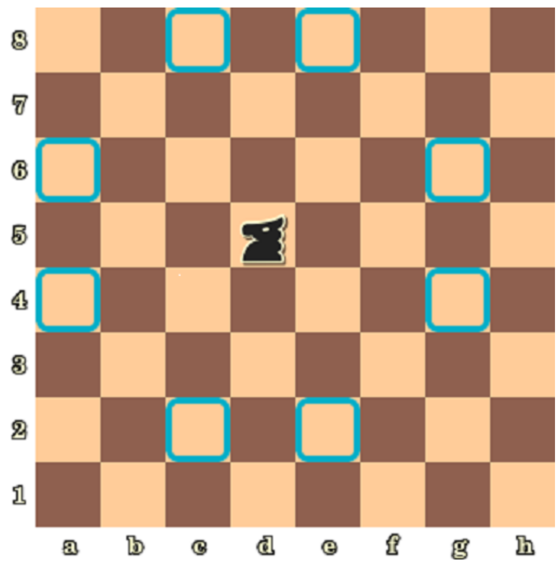


Figure 1. Moves of a kangaroo

2. Independence problem of kangaroo

Find the maximum number of kangaroos which can be placed on a chessboard so that none of the pieces attacks each other.

This problem has been already solved for the chessboard 6×6 (Pastor, 2019). It was shown that the maximum number is 18.

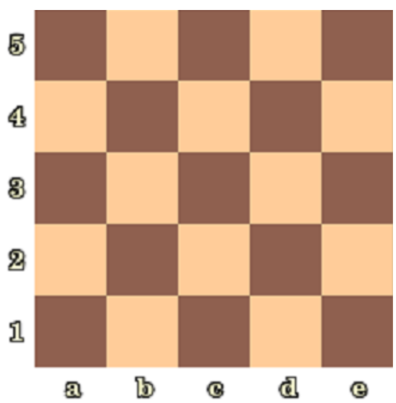


Figure 2. Chessboard 5×5

Now, let us consider the chessboard 5×5 (Figure 2). We can divide the board into two 2×5 rectangles, e.g. (a1, a2, a3, a4, a5, b1, b2, b3, b4, b5) + (c1, c2, c3, c4, c5, d1, d2, d3, d4, d5), and one 1×5 rectangle (e1, e2, e3, e4, e5). Since a kangaroo placed anywhere within one of these 2×5 rectangles can move exactly on one square of the considered rectangle, at most 5 kangaroos can be placed in each rectangle 2×5. Since there are two rectangles 2×5, at most 10 kangaroos can be placed on the considered two rectangles together. Considering the remaining 1×5 rectangle, we obtain that at most 15 kangaroos can be placed on the chessboard 5×5.

Figure 3 shows that it is actually possible to place 15 independent kangaroos on the chessboard 5×5.

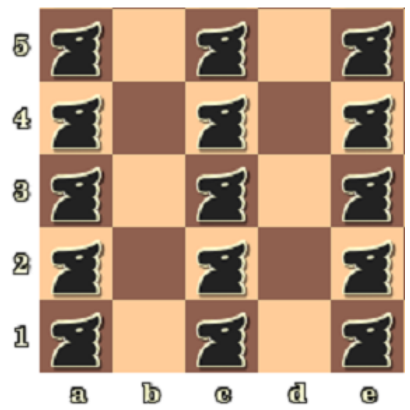


Figure 3. 15 kangaroos

3. Domination problem of kangaroo

Find a minimum number of kangaroos and place them on a chessboard in such a way, that all free squares of the board are attacked by at least one kangaroo.

This problem has been already solved for the chessboard 6×6 (Pastor, 2020a). It was shown that the minimum number is 8. Thus, for the chessboard 5×5, the minimum number is 8 or less, see Figure 4.

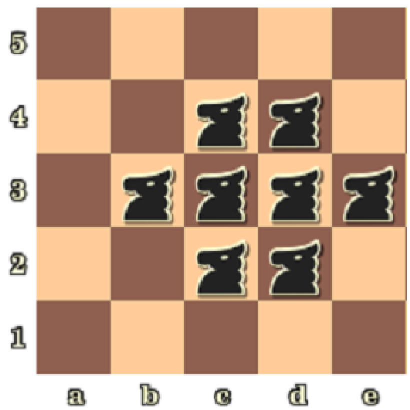


Figure 4. 8 kangaroos

It is an open question whether it is possible to place on the 5×5 chessboard less than 8 kangaroos in such a way, that all free squares of the board are attacked by at least one kangaroo.

4. Kangaroo tour problem

Find a tour for the kangaroo on the chessboard to visit all squares of the chessboard just once.

Because the kangaroo is only able to reach squares of one colour, the problem is reduced in terms of whether the kangaroo can visit all 13 black squares or all white 12 squares on the 5×5 chessboard.

Starting with the black variant, it is necessary to visit all corners of the 5×5 chessboard but, in this way, not all black squares could be visited, see e.g., Figure 5.

In contrast, the kangaroo can visit all the white squares on the 5×5 chessboard as shown in Figure 6.

7				3
	4		8	
				5
	6		2	
1				9

Figure 5. Black squares

	5		3	
8		10		12
	1		7	
6		4		2
	9		11	

Figure 6. White squares

5. Chess diagrams with kangaroo

Finishing my lecture, I would like to show some examples of chess diagrams with kangaroo.

Task 1. On the Figure 7, black to move and mate in one move. Notice that there are two kangaroos on the squares a5, e4, a white king on the square a8 and a black king on the square b6. You can use e.g. ("Rules of chess", Wikipedia) to recall the movements of chess pieces.

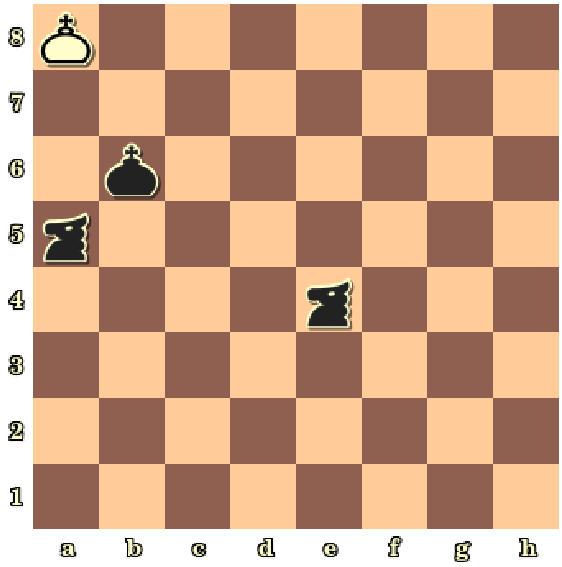


Figure 7. Task 1

Solution. See Figure 8.

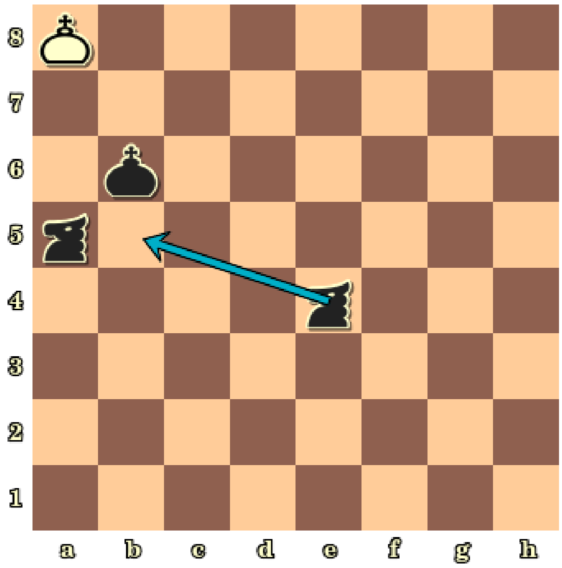


Figure 8. Solution of Task 1

Task 2. On the Figure 9, black to move and mate in one move. Notice that there are five white pawns on the squares a2, b2, c2, f2 and g3, two white rooks on the squares d1 and h1, a white queen on the square e7, a white king on the square b1, five black pawns on the squares a7, b7, c7, f5, g4, a black kangaroo on the square c5, a black queen on the square b6 and a black king on the square b8.

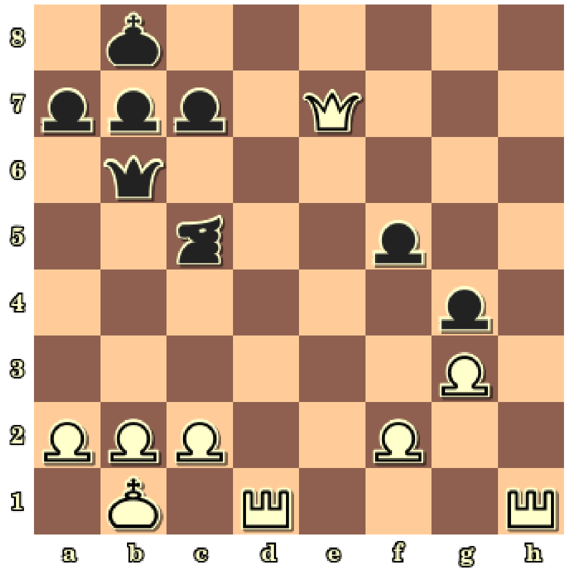


Figure 9. Task 2

Solution. See Figure 10.

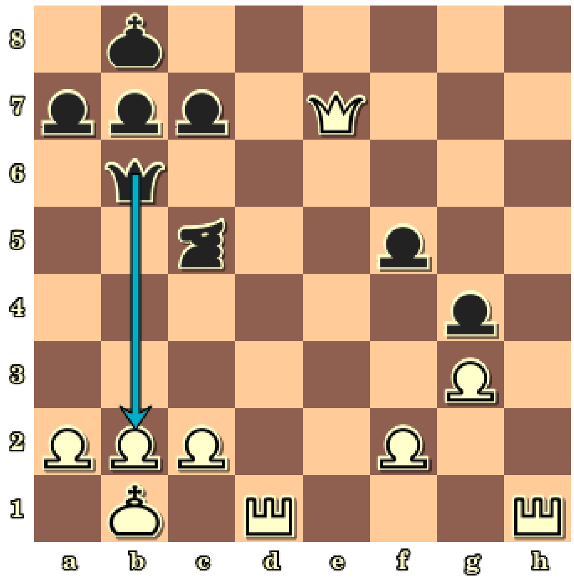


Figure 10. Solution of Task 2

6. Conclusion

We were interested in some chess mathematical problems with a special piece named kangaroo. We mainly used the 5×5 chessboard to make problems more accessible to children aged 6 to 11. To solve the previous problems pupils can use, for example, some computer application, see e.g. ("Chess Diagram Setup"). In our paper we have stated an open domination problem.

References

Chybová, L. (2017). *Šachové úlohy v kombinatorice.* [Diplomová práce]. Univerzita Karlova. http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/lucie_chybova_dp/sachove-ulohy.pdf.

Gik, E. (2019). *Šachmaty i matematika*. Retrieved 18-05-2021, http://golovolomka.hobby.ru/books/gik/index.shtml.

Pastor, K. (2019). Chess independence problems. *Elementary Mathematics Education Journal 1 (2).* Retrieved 18-05-2021, http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol1No2/Pastor_2019_Vol1No2.pdf.

Pastor, K. (2020a). Chess domination problems. *Elementary Mathematics Education Journal 2 (1).* Retrieved 18-05-2021, http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol2No1/Pastor_2020_Vol2No1.pdf.

Pastor, K. (2020b). Chess piece tour problems. *Elementary Mathematics Education Journal 2 (2).* Retrieved 18-05-2021, http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol2No2/Vol2No2_Pastor2.pdf.

Watkins, J. (2004). *Across the Board: The Mathematics of Chessboard Problems*. Princeton University Press.

(n.d.). *Mathematical chess problems*. (Wikipedia). Retrieved 26-06-2019, https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_chess_problem.

(n.d.). *Rules of chess*. (Wikipedia). Retrieved 26-06-2019, https://en.wikipedia.org/wiki/Rules_of_chess

(n.d). *Matematický klokan 2015*. Retrieved 26-06-2019, http://www.matematickyklokan.net/phocadownload/sborniky/sbornik_klokan_2015.pdf.

(n.d.). *Chess Diagram Setup*. Retrieved 26-06-2019, https://www.jinchess.com/chessboard/composer/.

Elementary Mathematics Education Journal *2021, Vol. 3, No. 2*
ISSN 2694-8133

TVORBA MATEMATICKÝCH TEXTŮ POMOCÍ LIBREOFFICE MATH

Tomáš TALÁŠEK, Jiří VAŠKO
Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)
tomas.talasek@upol.cz, jiri.vasko01@upol.cz

Abstrakt

Článek popisuje, jak je možné psát matematický text s pomocí kancelářského balíku LibreOffice a jeho nástroje Math. Nejprve jsou představeny nejběžnější způsoby psaní matematických vzorců na počítači, tj. s pomocí editoru rovnic v Microsoft Wordu a s pomocí systému LaTeX určeného pro sazbu odborných textů. Oba způsoby jsou vzájemně porovnány a je upozorněno jak na jejich přednosti, tak na jejich úskalí. Následně je představen nástroj LibreOffice Math a jeho použití v textovém editoru Writer, který vhodně kombinuje vlastnosti obou výše zmíněných přístupů. Je představena základní syntaxe pro psaní matematických vzorců v LibreOffice Math a tato syntaxe je srovnána se syntaxí používanou při tvorbě matematických vzorců v LaTeXu.

Klíčová slova: matematický text, vzorce, LibreOffice Math, LaTeX

HOW TO TYPESET MATHEMATICAL TEXT USING LIBREOFFICE MATH

Abstract

The paper focuses on the typesetting of mathematical text using productivity software suite LibreOffice and its application Math. Firstly, the most common ways of typesetting mathematical text on computer are presented (i.e. Microsoft Word Equation and LaTeX). Both approaches are compared and their pros and cons are mentioned. Subsequently, the LibreOffice application Math and its use in word processor Writer are described. Combination of Writer and Math results into a suitable combination of both previous approaches. Finally, the basic syntax for writing mathematical formulas in Math is presented and compared with syntax used in LaTeX.

Keywords: mathematical text, formulas, LibreOffice Math, LaTeX

1. Úvod

V současné době je při výuce matematiky velmi důležité umět matematický text zapsat na počítači. Toto je potřeba zejména pro tvorbu studijních materiálu (tištěných či elektronických), ale může to být použito i při tvorbě písemek a testů. Potřeba tvorby matematických textů na počítači byla navíc zesílena pandemií COVID-19, která v mnoha státech po celém světě vedla k velmi rychlému přechodu na on-line výuku. Obzvlášť při výuce matematických předmětů to vedlo k tomu, že vyučující museli rychle najít cestu, jak předávat studentům na počítači psané texty, které obsahovaly velké množství matematických vzorců a textů. Někteří vyučující volili cestu skenování ručně psaných poznámek, jiní raději volili textové editory, které umožňují zápis matematických vzorců.

Stejně tak se tato problematika týká i studentů. Někteří mohou chtít vytvářet úkoly/seminární práce na počítači, jiní si mohou chtít zapisovat přednášky na počítači místo do sešitu. Obdobně jako v případě vyučujících pandemie COVID-19 zesílila u studentů potřebu umět zapisovat matematický text na počítači.

Cílem článku je představení alternativního přístupu k tvorbě matematických textů pomocí kancelářského balíku LibreOffice. Nejprve se zaměříme na dva nejpoužívanější nástroje, které se pro tvorbu matematických vzorců používají, tj. textový editor *Microsoft Word* a typografického nástroje *LaTeX*. U těchto nástrojů porovnáme jejich výhody a nevýhody a to jak z hlediska uživatelské přívětivosti, tak z hlediska efektivnosti (rychlosti tvorby). Následně představíme nástroj Math z kancelářského balíku LibreOffice, který vhodně kombinuje oba výše zmíněné nástroje. Z Microsoft Wordu si bere intuitivní způsob editace textu (tzv. WYSIWYG – z anglického What you see is what you get) a pro tvorbu matematických vzorců používá vlastní syntaxi, která vychází ze syntaxe pro tvorbu matematických vzorců v systému LaTeX, ovšem je výrazně zjednodušená. Na závěr článku si na příkladech srovnáme syntaxi používanou v LibreOffice Math a LaTeXu při tvorbě matematických vzorců.

2. Srovnání nejčastěji používaných nástrojů pro tvorbu matematických textů

V této kapitole si srovnáme dva základní nástroje pro tvorbu matematických textů na počítači. Microsoft Word a LaTeX. Oba nástroje nejprve krátce představíme a následně srovnáme jejich výhody a nevýhody.

2.1. Microsoft Word

Microsoft Word je nejčastěji používaným textovým editorem na světě. Nelze se proto divit, že když uživatel potřebuje zapsat nějaký matematický vzorec, zpravidla se o to pokusí přímo v tomto textovém editoru. Pro tyto potřeby zde slouží nástroj *Editor rovnic*, ve kterém lze vzorce zadávat intuitivním způsobem, kdy se kombinuje psaní na klávesnici (převážně čísla a proměnné) spolu s výběrem částí rovnice z menu pomocí myši (například pokud je třeba vložit do vzorce zlomek, je třeba nejprve vybrat typ zlomku, který se do rovnice vloží). Tento způsob je vhodný převážně pro začátečníky a uživatele, kteří potřebují pouze občas zapsat vzorec nebo rovnici, protože je pro ně snadné se zorientovat a zapsat potřebný text.

Možnosti psaní matematických textů v Microsoft Office je dále možné rozšířit pomocí programu *MathType* (Mathype (n.d.)), který obsahuje rozšíření *MathType for Microsoft Office* (který ovšem není zdarma). Toto rozšíření umožňuje pokročilejší formátování při tvorbě matematických textů a navíc umožňuje využívat přímo syntaxi LaTeXu. Je vhodné zmínit, že v nejnovějších verzích Microsoft Wordu již lze také využívat syntaxi LaTeXu při psaní matematiky, nicméně zatím tento přístup není zcela uživatelsky komfortní.

2.2. Systém LaTeX

Oblíbenou alternativou k Microsoft Word je systém LaTeX (LaTeX (n.d.)). Jedná se o balík maker pro sázecí program TeX (TeX (n.d.)), který slouží k tvorbě (nejen) odborných textů a zaměřuje se na typografii. Tento nástroj se od Microsoft Wordu liší hlavně tím, že není WYSIWYG, tj. autor při tvorbě textu nevidí ihned výslednou podobu dokumentu. Toto může být velkou výhodou, protože při tvorbě se autor zaměřuje na samotný text a výslednou úpravou se zabývá až následně. Jako hlavní překážku pro začínající uživatele je nutnost pamatovat si jednotlivé příkazy, které jsou potřebné při tvorbě samotného textu. Rovněž je třeba se naučit proces překladu dokumentu. Zvláště na začátku může LaTeX působit velmi složitě a nepřívětivě, protože uživatel je nucený vyhledávat spoustu příkazů, aby mohl provést základní formátování textu. Z tohoto důvodu je vhodné na začátku najít vhodnou literaturu, která začátky usnadní (Oetiker, 1996; Rybička, 2003)

Obzvlášť užitečným se LaTeX ukazuje při tvorbě matematických textů, protože obsahuje speciální syntaxi, která umožňuje přímo zapisovat vzorce a rovnice. Jednotlivé příkazy vycházejí z angličtiny a jsou vždy uvozeny zpětným lomítkem. Uživatel pouze potřebuje trochu praxe, aby se naučil příkazy volně kombinovat. Pomocí může být i vhodná volba editačního programu, ve kterém bude uživatel LaTeXovský dokument psát.

2.3. Srovnání Microsoft Wordu a LaTeXu z hlediska tvorby matematických textů

Již z popisu obou nástrojů je zřejmé, že každý je zaměřen na jiný typ uživatele. Uživatelé, kteří potřebují zapisovat matematiku na počítači spíše výjimečně, budou jistě preferovat prostředí Microsoft Wordu, na které jsou zvyklí a které jim tvorbu rovnic usnadní pomocí různých nabídek. Navíc se nebudou muset učit pracovat s novým textovým editorem, který ani není WYSIWYG a je tedy podstatně méně uživatelsky přívětivý.

Naopak uživatelé, kteří pracují s matematickými texty častěji, budou spíše preferovat LaTeX. Nejen, že tvorba rovnic je v tomto nástroji podstatně rychlejší (není třeba neustále přecházet od klávesnice k myši a zpět), ale uživatel má podstatně rozsáhlejší možnosti v tom, jaké symboly může použít. Za velkou výhodu lze považovat i to, že takto vytvořené vzorce jsou podstatně snáze editovatelné než v případě Microsoft Office (toto platí například u složených zlomků). Bohužel, pokročilé možnosti editace matematických textů jsou vykoupeny nároky na znalosti příkazů pro formátování textu i matematiky samotné. Je vhodné zmínit, že v současné době existují on-line editory pro LaTeX, které práci s tímto systémem výrazně usnadňují a to obzvláště začínajícím uživatelům, kteří se díky tomu mimo jiné vyhnout i složité instalaci samotného LaTeXu. Jako zástupce uvedeme Overleaf (n.d.), který navíc umožňuje spolupráci více autorů. Základní výhody a nevýhody obou nástrojů jsou pro přehlednost uvedeny v Tabulce 1.

Tabulka 1. Výhody a nevýhody nástrojů Microsoft Word a LaTeX pro tvorbu matematických textů.

Microsoft Word		**LaTeX**	
Výhody	*Nevýhody*	*Výhody*	*Nevýhody*
Editor je WYSIWYG	Je potřeba používat často myš	K psaní matematiky stačí klávesnice	Editor není WYSIWYG
Běžně používaný editor	Je třeba znát dopředu tvar výsledné rovnice	Poradí si s jakkoli složitou rovnicí	Je nutné se naučit spoustu příkazů
Není třeba si pamatovat jména příkazů	Balík Microsoft Office je placený	Rovnici lze psát, aniž bychom znali její výslednou podobu	Je třeba si zvyknout na odlišný styl tvorby textů
		Je zdarma	

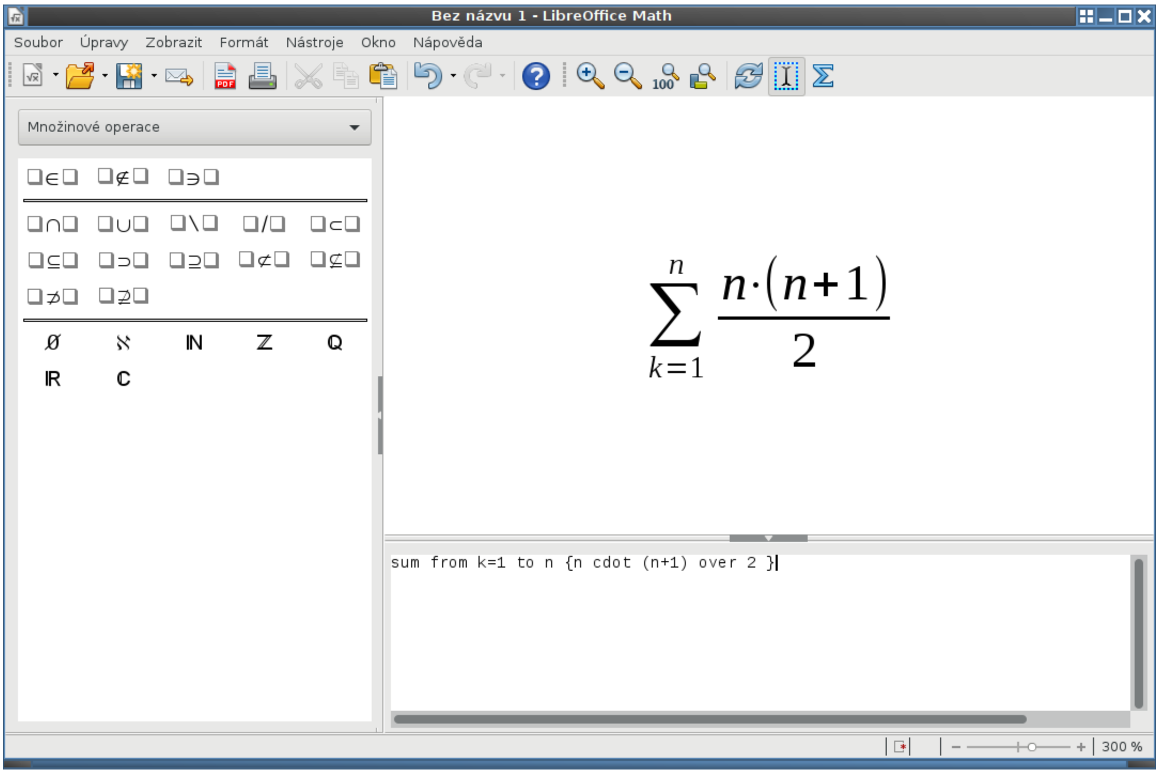
3. LibreOffice a jeho nástroj Math

V předchozí kapitole byly představeny základní výhody a nevýhody Microsoft Wordu a LaTeXu z hlediska tvorby matematických textů. Nabízí se tedy otázka, zda neexistuje program, který by vhodně kombinoval výhody obou nástrojů a pokud možno se vyhnul jejich nevýhodám. Hledáme tedy program, který splňuje následující vlastnosti:

- je jednoduchý na používání (ideálně kopíruje vzhled Microsoft Wordu),
- je WYSIWYG,
- matematické vzorce lze psát pomocí obdobné syntaxe jako v případě LaTeXu (v ideálním případě ať je syntaxe zjednodušená)
- je zachována možnost si vzorec „naklikat" stejně jako v případě Microsoft Wordu.

Požadované vlastnosti splňuje open source kancelářský balík LibreOffice (n.d), který je alternativou k Microsoft Office. Kromě samotného textového editoru Writer (který je obdobou Microsoft Wordu) je v tomto kancelářském balíku obsažen nástroj Math, který je určen pro samotnou tvorbu matematických rovnic. Math pro vzorce používá obdobnou syntaxi jako LaTeX, která je ale zjednodušená a je tedy snazší na zapamatování. Jednotlivé příkazy vycházejí z angličtiny, ale není třeba je uvozovat zpětným lomítkem.

Na Obrázku 1 je vidět prostředí nástroje Math spolu s ukázkou zápisu vzorce pro výpočet součtu první n přirozených čísel. Výsledný vzorec je zobrazen v největším okně, pod ním se nachází samotné pole pro zápis výrazu. Je vidět, že syntaxe je velmi přirozená, a od LaTeXu se mírně odlišuje. Při zápisu sumy není třeba používat symboly „_“ „^“, místo toho se používá „from“ a „to“, což činí zápis čitelnější. Obdobně jako v LaTeXu se používají složené závorky pro seskupení částí vzorce. V levém okně je možné, obdobně jako v Microsoft Wordu, vybrat jednotlivé symboly, které jsou pro snazší vyhledávání seskupeny podle druhu. Jsou zde i příklady často používaných vzorců, což lze využít obzvlášť při učení se syntaxe.

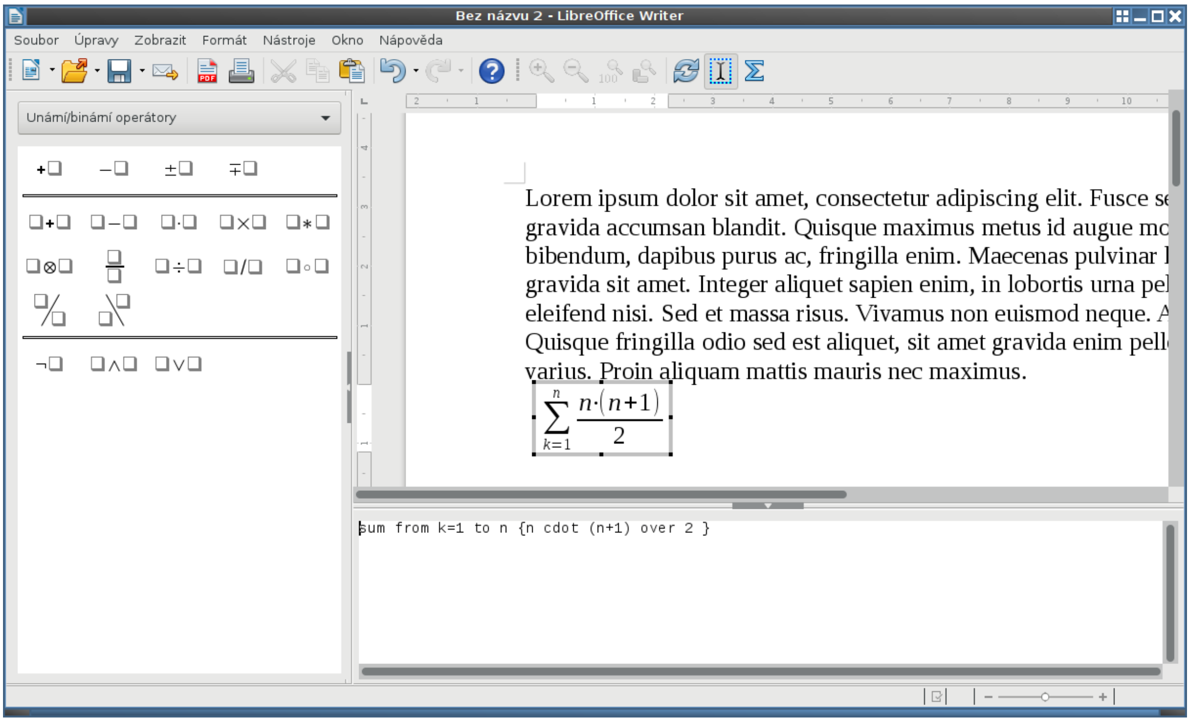


Obrázek 1. Ukázka prostředí nástroje LibreOffice Math.

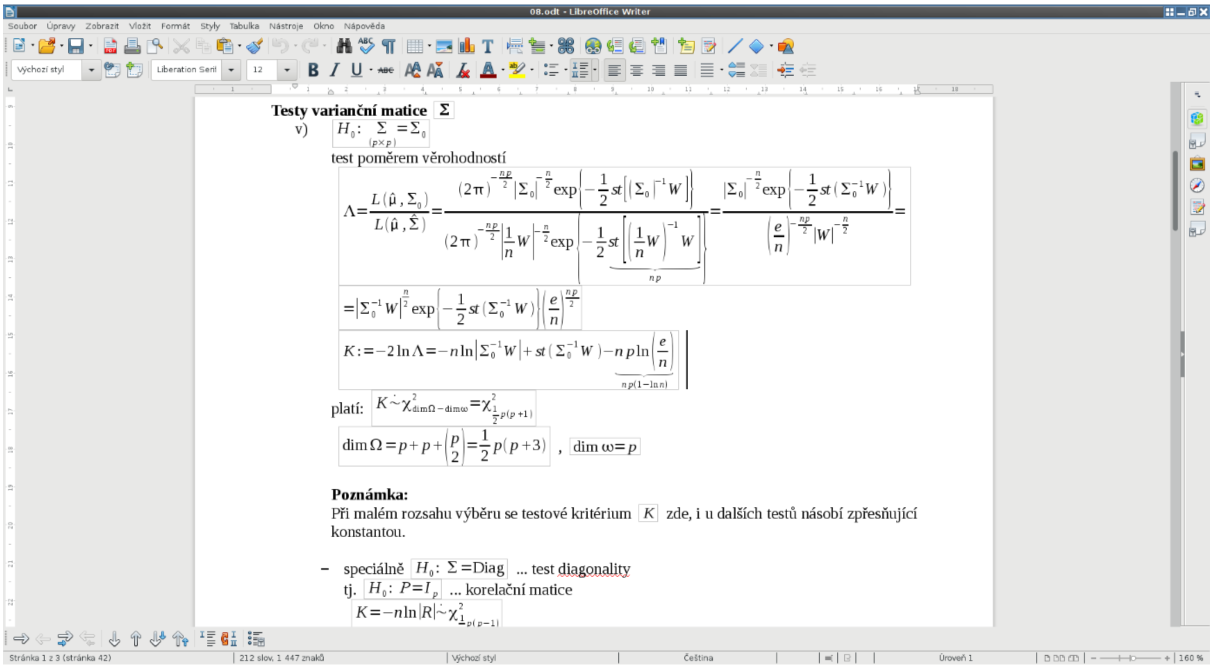
Nástroj je možné používat jak samostatně, tak jej lze spustit uvnitř textového editoru Writer a přímo vkládat jednotlivé vzorce do textu, jak je vidět na Obrázku 2. Toto je velkou výhodou pro začínající uživatele, protože je vše podobné postupu, který znají z Microsoft Wordu doplněného o textové pole pro přímý zápis matematiky.

Je vhodné si vkládání vzorců namapovat na nějakou klávesovou zkratku, což významně usnadní vkládání matematiky do textu. Na rozdíl od Microsoft Wordu jsou všechny vložené vzorce v editoru zvýrazněny pomocí šedého obdélníku. Je tedy jednoduché rozeznat, zda je všechen matematický text vložen pomocí Math nebo jsou některé části napsány v samotném textovém editoru bez použití matematiky. Toto je častou chybou při použití Microsoft Wordu, kdy autoři často kratší matematický text (např. jednu proměnnou nebo číslo) nevysází pomocí matematiky, což následně v textu působí rušivě.

Příklad toho, jak vypadá matematický text zapsaný v LibreOffice, je na Obrázku 3.



Obrázek 2. Ukázka propojení Writeru a nástroje Math.



Obrázek 3. Ukázka matematického textu zapsaného v LibreOffice Writer. Vzorce zapsané pomocí Math jsou zvýrazněny šedým obdélníkem.

Jak bylo ukázáno, při použití LibreOffice Writeru v kombinaci s aplikací Math dostává uživatel nástroj, který se velmi blíží tomu, na co byl zvyklý z Microsoft Wordu, ale má zde možnost psát matematické vzorce intuitivním způsobem bez nutnosti neustále používat myš.

4. Srovnání syntaxe LibreOffice Math a LaTeXu

Jak již bylo řečeno, syntaxe pro psaní matematiky v aplikaci Math je obdobná jako syntaxe používá v LaTeXu. V této kapitole se zaměříme na základní rozdíly v syntaxi. Z jednotlivých příkladů bude zřejmé, že nástroj Math je vhodnější pro začátečníky, protože na ně neklade tolik požadavků.

Základní srovnání lze shrnout takto:

- Syntaxe obou programů vychází z anglického jazyka. Pokud se uživatel orientuje v základních anglických matematických pojmech, nebude mít problém si jednotlivé příkazy zapamatovat a zápis vzorců pro něj bude snadno čitelný.
- Všechny příkazy v LaTeXu jsou uvozeny zpětným lomítkem. U Math se nic takového nepoužívá (s výjimkou řeckých písmen, kde se používá symbol procenta) a příkazy se rovnou píší. Ve většině případů se tedy příkazy liší pouze zpětným lomítkem, ale není to podmínkou. Příklady lze nalézt v Tabulce 2.
- Pokud v LibreOffice Math chybí nějaký symbol, je možné jej do seznamu symbolů doplnit a pojmenovat dle libosti. V případě LaTeXu již daný symbol zpravidla existuje, případně je třeba jej doplnit z nějaké knihovny (package).

Tabulka 2. Srovnání několika základních příkazů v LibreOffice Math a LaTeXu

	$\sum$	$\subset$	sin	$\in$	$\mathbb{R}$	α
Math	`sum`	`subset`	`sin`	`in`	`setR`	`%ialpha`
LaTeX	`\sum`	`\subset`	`\sin`	`\in`	`\mathbbR}`	`\alpha`

Nyní si zápis rovnic ukážeme na konkrétních příkladech:

1. $\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt{x^2} = |x|$
   Math: `forall x in setR: sqrt x^2 = abs x`
   LaTeX: `\forall x\in\mathbb{R}: \sqrt{x^2} = |x|`

Vidíme, že příkazy jsou si poměrně podobné, kromě zápisu symbolu pro reálná čísla. Výrazným rozdílem je nutnost použít v případě LaTeXu složené závorky u odmocniny. Toto je dáno rozdílným chápáním toho, jak na sebe jednotlivé části vzorce navazují. V případě Math program předpokládá, že druhá mocnina patří k x a proto je pod odmocninou x^2. V LaTeXu ovšem předpokládá, že k odmocnině patří pouze první objekt (samotné x) a všechno ostatní je až za symbolem odmocniny. Proto je třeba použít složené závorky, které v obou programech slouží pro seskupení objektů. Pokud bychom v LaTeXu závorku vynechali, vypadal by výsledek následovně: $\sqrt{x}^2$.

2. $a - \frac{x}{y} - x$
   Math: `a - x over y -x`
   LaTeX: `a-{x \over y} - x`

Opět je syntaxe podobná, ovšem je zde rozdíl v tom, jak oba programy používají příkaz `over`. Math tento příkaz automaticky vztahuje k předcházejícímu a následujícímu objektu a vzorec lze tedy napsat přirozeně. Oproti tomu LaTeX v takovém případě předpokládá, že všechno před příkazem `\over` je v čitateli a vše za ním je ve jmenovateli. Proto je třeba použít složené závorky, aby LaTeX věděl, že do výsledného zlomku patří pouze proměnné x a y. Jak by se situace změnila, pokud by měli jmenovatel a čitatel více členů, si ukážeme na následujícím příkladu.

3. $\frac{a-x}{y-x}$

   Math: `{a - x} over {x -y}`
   LaTeX: `a - x over x -y`

Nyní se situace změnila a v případě Math bylo třeba použít závorky, abychom určili čitatele a jmenovatele. V LaTeXu toto nebylo třeba, protože ten předpokládá, že vše před `\over` je v čitateli a vše za `\over` ve jmenovateli.

4. $\{4-[2-2\cdot(2+3)]\}$

   Math: `lbrace 4-[2-2 cdot (2+3)] rbrace`
   LaTeX: `\lbrace 4-[2-2 \cdot (2+3)] \rbrace`

V tomto případě je zápis téměř totožný (kromě zpětných lomítek). Povšimněte si, že pro složené závorky se používají speciální příkazy, protože symbol samotný slouží k seskupování objektů.

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$

   Math: `A= left ( matrix {1 # 2 # 3## 4# 5#6} right )`
   LaTeX:
```
A=\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3\\
4 & 5 & 6
\end{pmatrix}
```

Tvorba matic je v obou případech dosti odlišná. Zatímco v případě Math je možné vše přehledně zapsat na jeden řádek, v případě LaTeXu je nutné použít prostředí `pmatrix` a bývá zvykem jednotlivé řádky matice psát na nové řádky. Způsob oddělování sloupců je ovšem obdobný.

Jak je vidět, přestože je syntaxe v obou nástrojích poměrně podobná, jsou zde patrné jisté rozdíly, které ovlivňují přívětivost obou přístupů. Z uvedených důvodů bychom začínajícím uživatelům doporučili začít spíše s LibreOffice Math, jehož syntaxe je jednodušší na pochopení. Používání LibreOffice Math může navíc sloužit jako příprava na kompletní přechod na LaTeX, který vyžaduje naučení se podstatně většího množství příkazů.

5. Závěr

Článek představuje alternativu pro psaní matematických textů, kterou tvoří nástroj Math v kombinace s textovým editorem Writer z kancelářského balíku LibreOffice. Článek se nejprve věnuje klasickým přístupům psaní matematických textů pomocí Microsoft Word a LaTeXu. Oba tyto přístupy jsou porovnány mezi sebou a na základě srovnání jsou vyvozeny požadavky na software, který by kombinoval výhody obou přístupů a zároveň eliminoval jejich nedostatky. Těmto požadavkům vyhovuje právě LibreOffice Math, který je představen jak samostatně, tak v integraci do Writeru. Vzhledem k tomu, že navržená alternativa představuje rozšíření způsobu tvorby matematických textů známé z Microsoft Wordu o zápis vzorců pomocí syntaxe podobné LaTeXu, je v závěru článku srovnána syntaxe obou nástrojů včetně popisu rozdílného chování při zápisu běžných vzorců.

ISSN 2694-8133

Ze srovnání plyne, že LibreOffice Math je vhodným nástrojem pro tvorbu matematických textů, který vychází z textového editoru Microsoft Word a rozšiřuje jej o zápis matematických vzorců způsobem známým z LaTeXu. Použitá syntaxe je jednodušší než v případě LaTeXu, a je tak vhodná pro začínající uživatele, kteří se nechtějí učit všem zákonitostem LaTeXu, ale potřebují psát větší množství matematického textu na počítači. LibreOffice Math může navíc sloužit jako vhodný mezistupeň, který uživatelům umožní přechod mezi Microsoft Wordem a LaTeXem.

Acknowledgements

Článek byl připraven v rámci realizace projektu *Počítačem podporovaná výuka matematiky – Computer-Based Mathematics Teaching (IGA_PdF_2021_002).*

Literatura

LaTeX (n.d.). *LaTeX – A document preparation system*. Retrived October 12, 2021, https://www.latex-project.org.

LibreOffice (n.d.). *LibreOffice: Svobodný kancelářský balík tvořený komunitou*. Retrived October 12, 2021, https://www.cs.libreoffice.org.

MathType (n.d.). *MathType – Easily write math equations from anywhere!* Retrieved October 12, 2021, https://www.wiris.com/en/mathtype/.

Oetiker, T., (1996). *Ne příliš stručný úvod do systému LaTeX 2ε – Neboli LaTeX2e v 73 minutách*.

Overleaf (n.d.). *LaTeX pro budoucnost. Online LaTeX editor snadný k použití s možností spolupráce více autorů.* Retrieved October 12, 2021, https://www.cs.overleaf.com/.

Rybička, J., (2003). *LaTeX pro začátečníky*. Brno: Konvoj.

TeX (n.d.). *The TeX Users Group (TUG)*. Retrieved October 12, 2021, https://www.tug.org.

WOLFRAMALPHA JAKO POMOCNÝ NÁSTROJ UČITELE A ŽÁKA

Jiří VAŠKO, Karel PASTOR, Květoslav BÁRTEK
Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)
jiri.vasko01@upol.cz, karel.pastor@upol.cz, kvetoslav.bartek@upol.cz

Abstrakt

Mnoho učitelů a žáků má problém si ověřit správnost svých výpočtů. Může se jednat o výpočty jednoduché, ale také o komplexnější a složitější. Matematika je proces, který bychom mohli rozdělit na čtyři kroky:

1. „umění“ správně položit otázky mající původ v reálném světe kolem nás,
2. tyto pak transformovat do jednoznačně definovaných (matematických) formulí,
3. následně je na axiomatickém základě vyřešit a
4. konečně toto formální řešení transformovat zpět do reálného světa a tady jej verifikovat. (Wolfram, 2020).

V České republice se většina škol zaměřuje na počítání, ale ne na matematiku. Soustředí se tedy na bod třetí výše popsaného procesu. Přitom daný bod můžeme ponechat na počítači a jen zvolit vhodný nástroj. Tomuto přístupu se říká „Computer-based mathematics teaching“. Nutné je umět problém převést z reálného světa do matematických formulí, ty následně ponechat spočítat počítačem, a poté správně data interpretovat a pochopit, co daný výsledek znamená. Jedním z těchto nástrojů může být například bezplatný software WolframAlpha, který funguje jako webová stránka bez nutnosti instalace aplikace na stanici uživatele.

Klíčová slova: computer-based mathematics teaching, WolframAlpha, digitální technologie, matematický software

WOLFRAMALPHA AS AN ASSISTANT TOOL FOR TEACHERS AND PUPILS

Abstract

Many teachers and students have trouble verifying their calculations. These calculations can be simple, but also more complex. Mathematics is a process that could be divided into four steps:

1. the "art" of properly asking questions originating from the real world around us,
2. then transform these into unambiguously defined (mathematical) formulas,
3. subsequently solve them on an axiomatic basis and
4. finally, transform this formal solution back into the real world and verify it here. (Wolfram, 2020).

In the Czech Republic, most schools focus on counting, but not on mathematics. It therefore focuses on the third point of the process described above. We can leave this point on the computer and just choose the appropriate tool. This approach is called "Computer-based mathematics teaching". It is necessary to be able to convert the problem from the real world into mathematical formulas, then have them calculated by a computer and then correctly interpret the data and understand what the result means. One of these tools can be, for example, the free WolframAlpha software, which works as a website without the need to install the application on the user's station.

Keywords: computer-based mathematics teaching, WolframAlpha, digital technology, mathematical software

1. Úvod

Každý určitě zažil stav, kdy naprosto přesně věděl, jak má výpočet vypadat, jak má vypadat výsledek, ale numerickou chybu v postupu odhalit nedokázal. A může se jednat o zkušeného profesionála v podobě pedagoga, nebo také o žáka, který se daný postup teprve učí. A nemusí se také jednat o chybu numerickou, ale může to být pouze snaha dotyčného ověřit správnost výsledku.

Jednou z možností, jak si ověřit správnost, je využít matematický software, který výpočet provede za nás. Na trhu je mnoho softwaru, který by šel použít. Většina softwaru na trhu je plně nebo z části placená. Existuje ale program WolframAlpha, který má základní funkce zdarma.

2. Wolfram Research

Wolfram Research je firma založena v roce 1987 Stephenem Wolframem ve Velké Británii. Mezi jejich produkty patří Wolfram Mathematica, Wolfram Cloud a WolframAlpha.

2.1. Wolfram Mathematica

Wolfram Mathematica je desktopová aplikace pro počítače nejen pro výpočty, ale také pro práci s daty, pro tvorbu aplikací a také pro programování. Aplikace využívá svůj interní jazyk nazvaný Wolfram Language. Díky tomuto jazyku je zajištěno, že veškeré příkazy a funkce jsou specializované pro Wolfram Mathematicu. Využití tohoto softwaru nalezneme ve školství, ale také v soukromém sektoru, či ve vědeckých centrech a pracovištích. Není určen jen matematikům, ale také všem, kteří potřebují zpracovávat data a využít tak funkcí, které tento software nabízí. Jedná se o robustní nástroj, který může najít uplatnění téměř kdekoliv. První vydání tohoto software bylo v roce 1988 a od té doby prošel mnoha proměnami až do podoby, v jaké se nachází nyní. Jedná se o placený software a k jeho provozování je potřeba mít zakoupenu licenci.

2.2. Wolfram Cloud

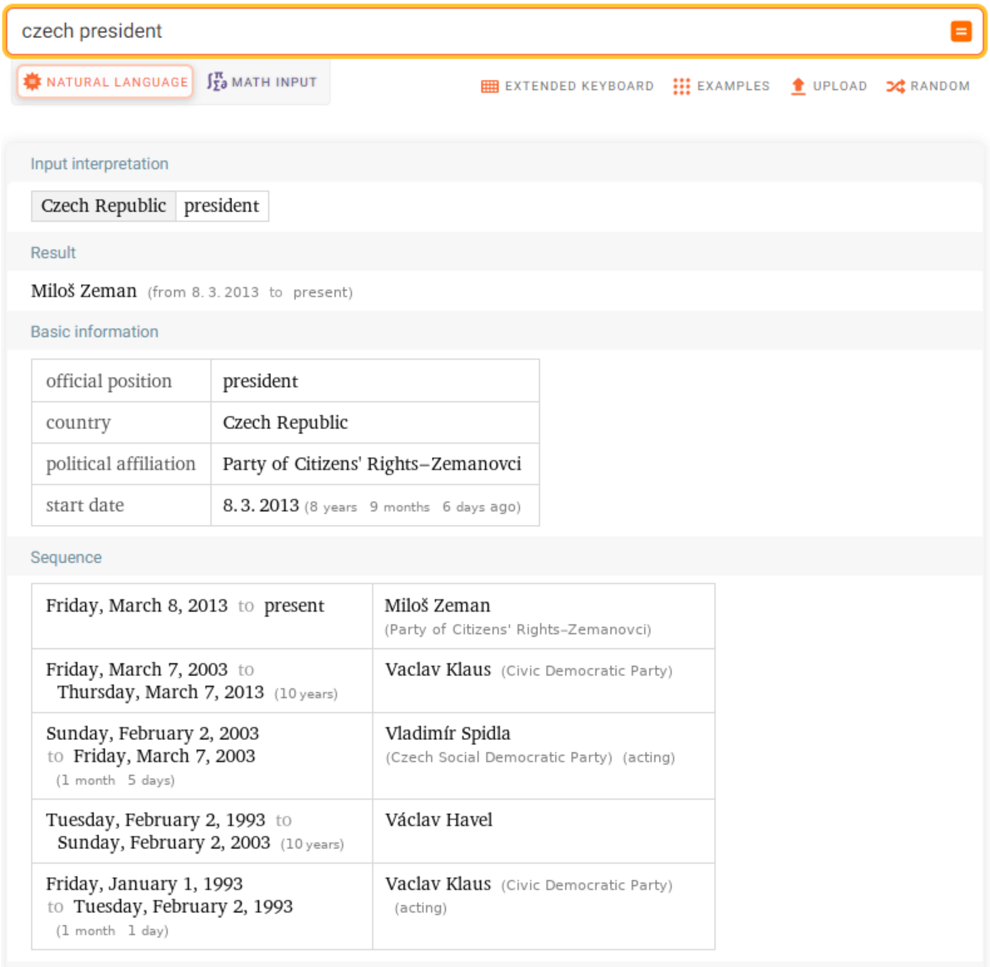
Wolfram Cloud je cloudová verze programu Wolfram Mathematica. Systém běží na cloudu společnosti Wolfram Research a využívá jejich výpočetních center. Nejedná se o přesnou kopii desktopové verze, tato verze má určitá omezení v tom, co umí. Pro využívání je potřeba provést registraci a vybrat plán, díky kterému budete mít přístupné různé funkce. Základní plán, který je nabídnut automaticky, je zdarma a obsahuje základní věci. Také má časově omezen výpočet jednoho příkazu na 60 sekund, maximální obsazení paměti na 1024 MB a cloudové soubory, které si uživatel vytvoří, jsou přístupné pouze po dobu 60 dní. Ale uživatel si tyto soubory může uložit do svého uložiště. Bohužel v základním plánu je nelze nahrát zpět do Cloudu. Uživatel si také může vybrat nějaký vyšší placený plán, kde cena se odvíjí od toho, zda uživatel je student či organizace, např. škola. Na tom také závisí, jaké podmínky a cenu daného plánu uživatel dostane.

2.3. WolframAlpha

WolframAlpha je webovou aplikací, který vznikla v roce 2009. Nachází se na stránce www.wolframalpha.com. Nejedná se o vyhledávač indexovaných informací, ale je to výpočetní stroj, který hledá odpověď na dotaz ve svých znalostních databázích, které si sám pomocí strojového učení vytváří. Při každém dotazu na konci ukáže zdroje pod tlačítkem Source, pokud se jedná o data, které program zpracoval.

Také se zde nachází základní plán, který je pro většinu požadavků více než dostačující. Pokud by uživatel přeci jen chtěl více možnost, jako například řešení krok po kroku, tak je mu nabídnuto měsíční předplatné, díky kterému získá přístup ke všem funkcí WolframAlphy.

Znalostní databáze obsahuje mnoho dat z různých oborů a je potřeba jen zadat správně položenou otázku. Otázku je potřeba zadat v anglickém jazyce. Můžeme se například zeptat, kdo je českým prezidentem a dostaneme následující odpověď.

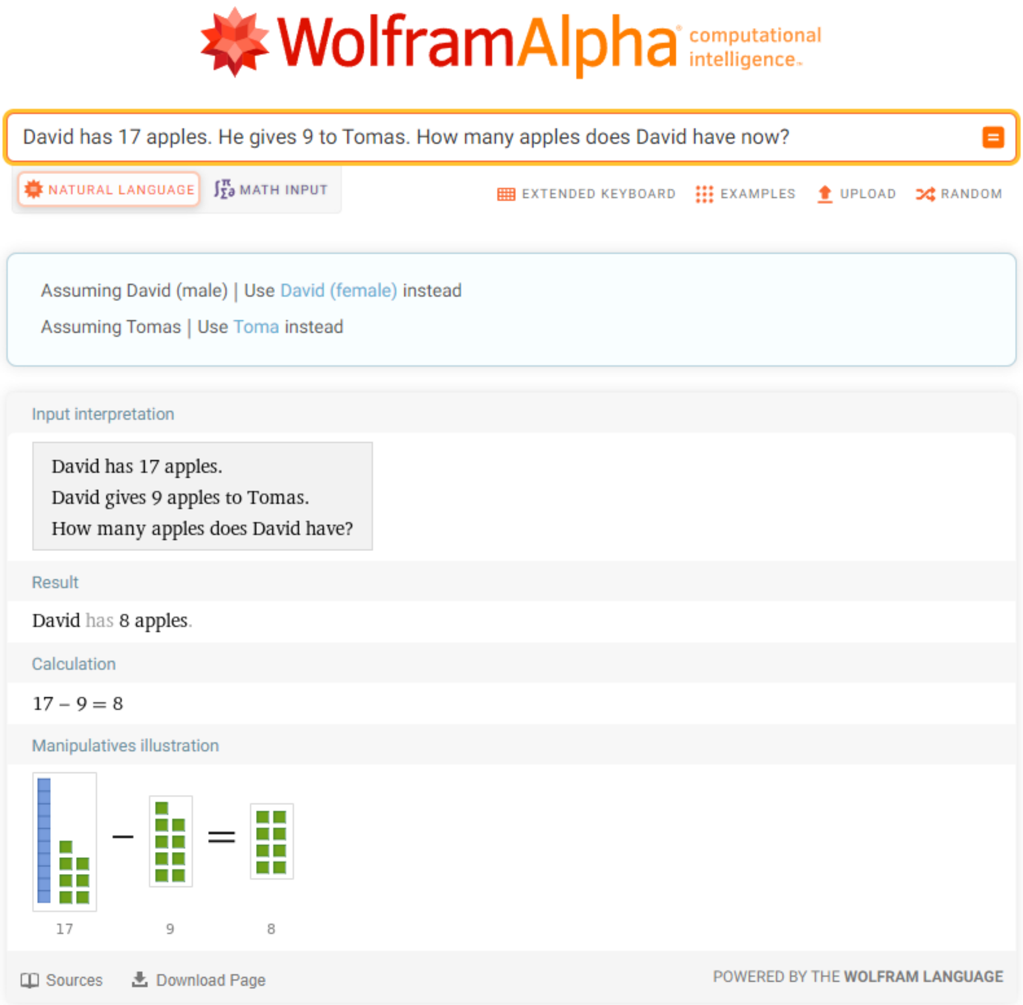


Obrázek 1. Výsledek hledání pojmu „czech president"

Jak lze z obrázku 1 vidět, není potřeba vůbec otázku specifikovat slovy „who is". Program si sám zjistí, na co se ho uživatel nejpravděpodobněji ptal a tento výsledek mu zobrazí jako první. Ale dále mu zobrazí související informace. Na obrázku 1 lze například vidět jakou politickou příslušnost má český prezident, od kdy zastává danou funkci a například, kdo byli jeho předchůdci. Ve výsledcích bylo více dat, které souvisely s dotazem.

3. WolframAlpha a matematika

WolframAlpha je výborným výpočetním nástrojem i pro matematiku. Jeho využití nalezneme od první třídy až po vysokou školu. Není potřeba pro řešení úloh využívat žádného specializovaného jazyka. Stačí opět do pole pro vstup napsat zadání dané úlohy. WolframAlpha umí řešit mnoho typů matematických úloh. Lze řešit úlohy z aritmetiky, algebry, geometrie, statistiky apod. Také lze řešit slovní úlohy. Slovní úlohu je zapotřebí zadat v anglickém jazyce. Zkusíme například slovní úlohu v následujícím znění: „David měl 17 jablek. Devět jablek dal Tomášovi. Kolik jablek má David nyní?".



Obrázek 2. Výsledek hledání řešení slovní úlohy

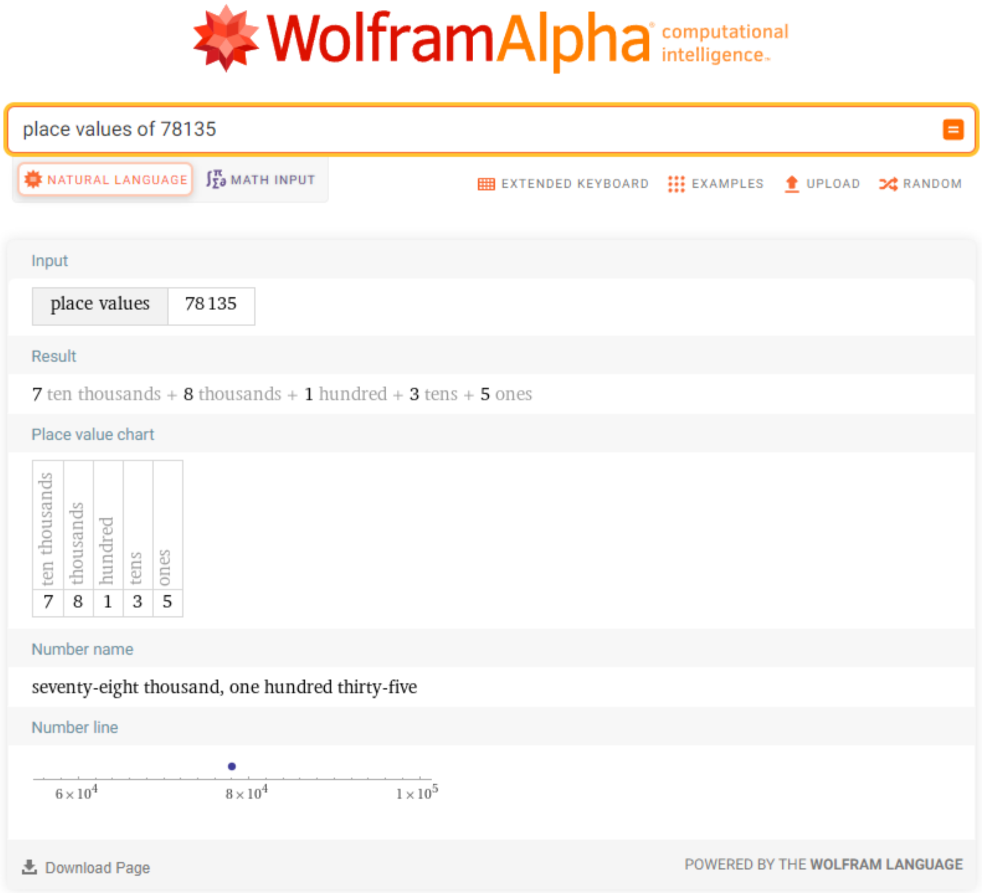
Jak lze na obrázku 2 vidět, slovní úlohu WolframAlpha vyřeší, a i názorně graficky zobrazí. Tento výsledek hledání může pomoci žákovi lépe pochopit, jak se odečítají přirozená čísla. Stejně tak to graficky znázorňuje pedagog na prvním stupni (Uvedená ilustrace předpokládá znalost řádů, souvislost mezi jednotkami, desítkami, popř. rozklady).

Můžeme využít WolframAlphu také na naučení dekadického zápisu čísla (viz obrázek 3).

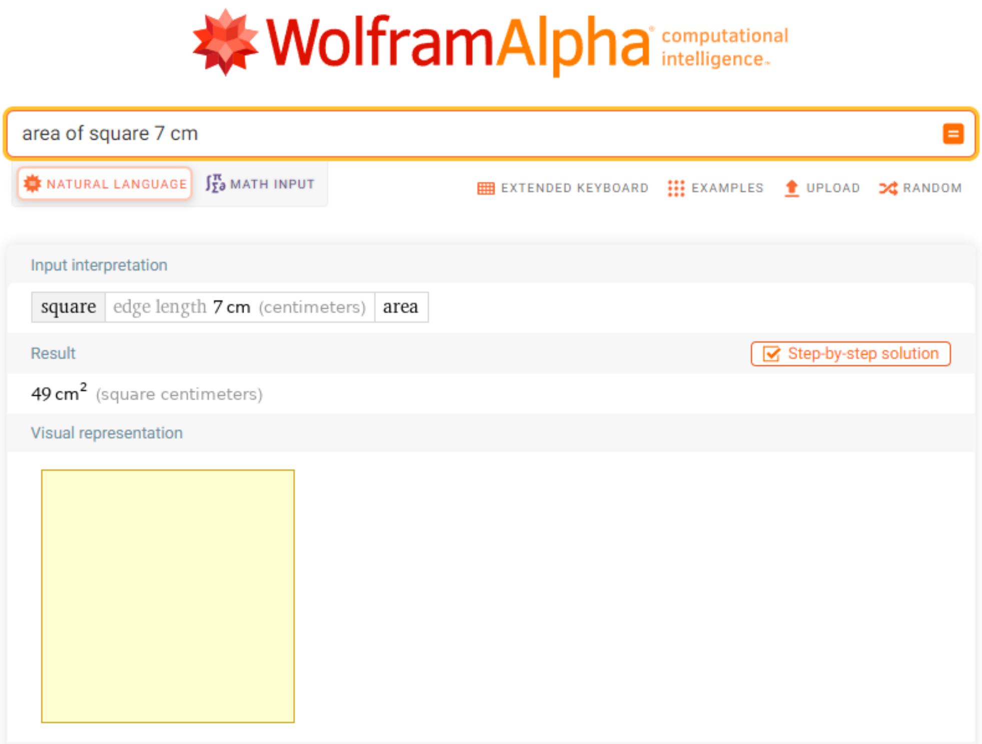
Tento nástroj lze využít pro geometrické úlohy. Například v úloze zjištění obsahu čtverce o délce strany 7 cm. Výsledek lze vidět na obrázku 4. Tento výsledek hledání je zkrácený. WolframAlpha dále nabízel vlastnosti daného čtverce a převody jednotek.

Obecně lze konstatovat, že pokud WolframAlpha alespoň částečně pochopí, co po něm chcete, tak požadovanou odpověď naleznete mezi výsledky, které vrátil v rámci svého výpočtu. Samozřejmě umí i mnohem složitější věci, jako například infinitezimální počet, diferenciální rovnice, topologii, algebru, teorii čísel a další. Díky propracování programu, tak na webu lze nalézt mnoho příkladů, díky kterým může uživatel pochopit, jak specifikovat svůj dotaz, aby dostal kýženou odpověď.

Co se týče dotazování, tak samozřejmě lze použít jazyk Wolfram Language, který využívá výše zmíněný WolframCloud a Wolfram Mathematica. A díky tomu své specifikace dotazů mnohem lépe upravovat. Wolfram Cloud má také výborně zpracovaný online manuál i s konkrétními příklady, takže pro specifické dotazy je mnohdy lepší využít jazyka Wolfram Language.



Obrázek 3. Dekadický zápis čísla 78135



Obrázek 4. Obsah čtverce o délce strany 7 cm

ISSN 2694-8133

4. Závěr

WolframAlpha je výborný nástroj, kterého mohou využívat jak pedagogové, tak žáci. Nevýhodou se může zdát to, že je v anglickém jazyce. Ale díky tomu, že anglický jazyk se již vyučuje na prvním stupni, tak využití angličtiny ve výuce matematiky je také vhodné pro aplikaci metody CLIL v rámci mezipředmětových vztahů. Pokud se žáci naučí v raném věku využívat matematický software, usnadní jim to studium v budoucnu, protože dokážou ověřit, že jejich výpočty jsou správné. Případně v prémiové verzi lze určitě využít ukázky řešení krok po kroku, které může žákům pomoci při pochopení postupu výpočtu.

Acknowledgements

Článek byl připraven v rámci realizace projektu *Počítačem podporovaná výuka matematiky – Computer-Based Mathematics Teaching* (IGA_PdF_2021_002).

Literatura

WolframAlpha (n.d.). *Examples for Mathematics*. WOLFRAM. Retrived October 12, 2021, https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/.

WolframAlpha (n.d.). *Frequently asked questions*. WOLFRAM. Retrived October 12, 2021, http://www.wolframalpha.com/faqs.html.

WOLFRAM, C. (2020). *The Math(s) Fix: An Education Blueprint for the AI Age*. Wolfram Media, Inc.

DIAGNOSTICKÝ POTENCIÁL GRADOVANÝCH ÚLOH

Renáta ZEMANOVÁ[1], Darina JIROTKOVÁ[2]
[1] Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
[2] Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta (Česká republika)
renata.zemanova@osu.cz, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz

Abstrakt

V článku je představen nástroj, jehož diagnostický potenciál byl využit ke zkoumání aritmetických kognitivních i metakognitivních schopností žáků 4. roč. ZŠ při online výuce v r. 2020/2021. Nástrojem je série gradovaných úloh z prostředí Sčítací trojúhelníky. Podrobně jsou popsány parametry gradace úloh a vzhledem k nim byla provedena analýza žákovských řešení. Pozornost byla věnována žákovským chybám, popisu jejich charakteru a na spekulativní úrovni byla odhalována jejich příčina.

Výsledky analýz v rámci třídy i v rámci různých souborů úloh byly komparovány. Jednotlivá zjištění jsou podkladem pro následnou práci s daným žákem tak, aby se efektivně rozvíjel, překonal příčiny chyby, miskoncepce, epistemologické překážky. Je poukázáno na možnosti využití získaného materiálu i v pregraduální přípravě budoucích učitelů elementaristů.

Klíčová slova: sčítací trojúhelníky, online výuka, gradační parametry úloh, analýza žákovských řešení, práce s chybou, sčítání, odčítání, symetrie, algebrogram, zobecňování

DIAGNOSTIC POTENTIAL OF TASKS OF ENVIRONMENTS OF ADDITION TRIANGLES IN ONLINE EDUCATION

Abstract

The article presents a tool whose diagnostic potential was used to investigate the arithmetic cognitive and metacognitive abilities of 4 grade pupils in online teaching in 2020/2021. The tool is a series of graded tasks from the didactical environment Additive Triangles. The parameters of task gradation are described in detail. Due to them an analysis of pupils´ solutions was done. Attention was paid to the pupil's mistakes, the description of its character and its cause was revealed on a speculative level.

The results of the analyses were compared. The findings enabled to set tasks for follow up work with the pupil so that he/she can develop effectively or helped to formulate a re-education process to overcome the cause of mistake, misconception, epistemological obstacles. The possibilities of how to use the acquired material in the undergraduate training of prospective elementarists are pointed out.

Keywords: additive triangles, online teaching, parameters of graded tasks, analysis of pupils' solutions, work with mistake, addition, subtraction, symmetry, algebrogram, generalization

ISSN 2694-8133

1. Úvod

Učitel, který usiluje o rozvoj každého jednoho žáka do jeho maximální úrovně v různých směrech – kognitivních, metakognitivních, osobnostních, pečlivě plánuje své výukové hodiny, formuluje cíle, strukturu, obsah, formy atd. Pro kvalitní výuku je klíčové, aby si učitel stanovil cíle, a to jak krátkodobé, tak i dlouhodobé a vzhledem k nim naplánoval, jaké důkazy o učení jednotlivých žáků v průběhu hodiny může očekávat. Mluvíme o vyučování založeném na důkazech (evidence based teaching). Pro učitele je tento koncept detailně rozpracován a teorií argumentován např. v publikaci Pettyho (2009). Učitel při výuce žáky průběžně diagnostikuje, diagnostikuje jak jejich myšlenkové procesy, tak jejich procesy učení. Tím se práce učitele nikdy nestane pouhou rutinou, každý žák je jedinečný, s individuálními potřebami i způsobem učení se. Požadavek na respektování různosti žáků, jejich individuálních potřeb a jejich práva na to být vzděláváni v příznivém klimatu (Keller-Schneider, 2020) je silný zejména na učitele primárního i preprimárního vzdělávání. Proto je průběžná diagnostika žáků pro učitele vždy velkou výzvou. J. Hoth et al. (Hoth et al., 2016) poukazují na značnou různost v tom, jak učitelé pracují s diagnostickými úlohami a jak na diagnostiku nahlížejí. V souladu s autory Hoth, et al. (2016) budeme učitelovy schopnosti diagnostikovat své žáky vnímat jako schopnost odhalit a popsat jevy učení, odhalit žákovy prekoncepty, odhalit a popsat jeho obtíže, odhadnout příčiny obtíží, popsat dosaženou kognitivní úroveň žáka v daném čase a v dané oblasti a schopnost navrhnout následný edukační či reedukační proces v zóně žákova nejbližšího vývoje (Vygotskij, 1970). V prezenční výuce do procesu diagnostiky vstupuje žákovo chování, jak matematické, tak sociální. Diagnostika žáků v online výuce je ochuzena o mnoho parametrů žákova chování, učitel nevidí žákovu hru těla, gesta a mimiku a komunikaci se spolužákem, třídou apod. a diagnostika je tedy mnohem náročnější.

V našem výzkumu jsme ověřili, že série obtížnostně gradovaných úloh může být pro učitele dobrý nástroj diagnostiky zejména při online výuce. Využili jsme naše znalosti a zkušenosti s jedním didaktickým matematickým prostředím, sčítací trojúhelníky, a rozpracovali zde sérii obtížnostně gradovaných úloh. Podrobně jsme popsali gradační parametry.

Pojem didaktické matematické prostředí, nebo též v českém didaktickém prostředí používaný termín podnětné výukové prostředí (substantial learning environment) přinesl do didaktiky matematiky německý badatel E. Wittmann (2001), který navázal na myšlenky o procesu učení Deweye (1938), Piageta (2010), Freudenthala (1991). Wittmann zejména požadoval, aby žáci měli možnost řešením úloh v daném prostředí odhalovat zákonitosti a klíčové matematické pojmy.

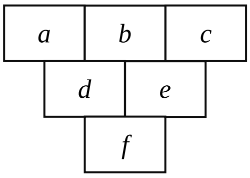
M. Hejný pojem didaktické matematické prostředí precizoval a formuloval 4 kritéria (Hejný, 2014, s. 13). Z nich zmíníme tři, která jsou důležitá pro naše cíle: úlohy v daném prostředí lze formulovat tak, aby byly přiměřené daným žákům, mají nastavitelnou obtížnost a byly využitelné dlouhodobě. Tedy aby bylo možné nastavit obtížnost úloh od velice jednoduchých pro nejmladší žáky, či nejméně zdatné žáky, až po značně náročné pro žáky starší či matematicky zdatné. Tedy lze formulovat například do jedné vyučovací hodiny úlohy tak, aby na ně dosáhli žáci sice jedné třídy, ale širokého spektra kognitivních schopností.

2. Sčítací trojúhelníky

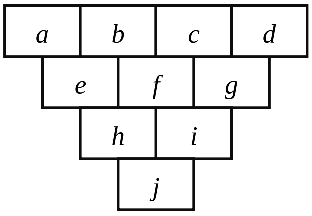
Úlohy, které jsou rozpracovány do podoby celého didaktického matematického prostředí Sčítací trojúhelníky, jsou inspirovány úlohami typu číselná zeď (number wall) z publikace (Wittmann & Müller, 1990). Pro svou grafickou podobu jsou též často na různých místech používány[1] s názvem pyramidy či hrozny.

[1] https://sites.google.com/site/funproblemsolving/mathclub-problems/number-wall
https://www.youtube.com/watch?v=-kyV0ai_oGU

Sčítacím trojúhelníkem rozumíme číselnou strukturu zapsanou v grafice uvedené na obrázcích 1. a 2. Podle počtu oken v horní řádce budeme mluvit o trojúhelnících 3., 4., … n-tého řádu, nebo též trojúhelnících tříúrovňových, resp. čytřúrovňových.



Obrázek 1. Trojúhelník 3. řádu



Obrázek 2. Trojúhelník 4. řádu

Pro naši další potřebu označíme čísla v jednotlivých oknech obecně pomocí 6 písmen a, b, c, d, e, f pro trojúhelník 3. řádu, případně pomocí 10 písmen $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ pro trojúhelník 4. řádu. Strukturu čísel vytváří tyto základní vztahy: součet dvou čísel umístěných do polí vedle sebe je zapsán pod nimi, např. na obrázku 1. je $a + b = d$. Takové trojice jsou v trojúhelníku na obrázku 1. tři a na obrázku 2. jich najdeme šest. O dalších vazbách v této struktuře se zmíníme níže.

Při didaktickém využití sčítacích trojúhelníků v matematice je samozřejmě vhodné s nejmenšími žáky začínat s trojúhelníky 2. řádu. V našem experimentu jsme pracovali s trojúhelníky 3. a 4. řádu.

Vhodný způsob, jak tvořit konkrétní úlohy, je začít doplněným trojúhelníkem a z něj vymazat čísla z některých políček. Řešit úlohu pak znamená do prázdných políček doplnit čísla tak, aby platily dané základní vazby. Je zřejmé, že úloha je jednoznačně řešitelná, pokud budou prázdná 1–3 políčka u trojúhelníku 3. řádu, 1–n políček u trojúhelníku n-tého řádu.

Dále se budeme věnovat trojúhelníkům 3. řádu. Pro úlohy budeme rozlišovat čtyři odlišné situace: je zadána skupina čísel, která

- nejsou na sobě závislá (tj. nelze některé z nich dopočítat z ostatních, např. čísla a, b, d jsou na sobě závislá, neboť $a + b = d$) a jejich počet je takový, že úloha je jednoznačně řešitelná. Taková skupina se nazývá bazí trojúhelníka (Hejný, Hejná, 1998; Žáková, 2009). Didakticky se jedná o základní typ úloh.
- nejsou na sobě závislá (tj. nelze některé dopočítat z jiných dosazením do trojúhelníka) a jejich počet je menší, než je počet prvků baze a úloha má tak více nebo nekonečně mnoho řešení. Didakticky se jedná o náročnější situaci, kdy žák hledá parametrický systém řešení, tedy úlohy mohou vést ke zobecnění nějakého vztahu mezi čísly ve struktuře, případně pracuje s doplňujícími podmínkami.
- jsou na sobě závislá, ale lze z nich vybrat různé baze, tzn. počet zadaných prvků je větší než počet prvků baze. Didakticky se jedná zejména o úlohy, kdy se žák může sám ujistit o správnosti výpočtu, tedy je lze využít i v reedukačních postupech.
- jsou na sobě závislá, ale nelze z nich vybrat bazi (např. trojice a, b, d). Taková úloha má pak nekonečně mnoho řešení. Patří tak do náročnějších úloh. Nabízí prostor pro další práci se zadáním úlohy, např. zvolit čtvrtý prvek tak, aby řešení úlohy splnilo jistou zadanou podmínku.

Gradačními parametry úloh jsou: A. počet zadaných čísel (viz výše), B. pozice zadaných čísel, C. číselný obor zadaných čísel.

3. Gradační parametry úloh s jednoznačným řešením

Dále se budeme věnovat jen úlohám, kdy je zadaná baze trojúhelníka 3. řádu a budeme uvažovat gradační parametr B. Uvedeme jednotlivé případy v takovém pořadí, které podle našich kritérií stupňuje obtížnost. Ale o tom, jak je daná úloha pro konkrétního žáka obtížná, rozhoduje sám daný žák. U každého to může být nastaveno jinak.

1. Nejjednodušší úlohou je zadání baze a, b, c . Zde je možno snadno dopočítat $d = a + b$, $e = b + c$, $f = d + e$. Při řešení je potřeba použít třikrát operaci sčítání a řešení probíhá jedním směrem v trojúhelníku.
2. Obtížnější úlohou je zadání baze a, b, e (resp. symetrické baze b, c, d). Zde je možné dopočítat $c = e – b$, $d = a + b$, $f = d + e$. Obdobnou úroveň gradace má zadání baze a, c, d, resp. symetricky a, c, e, kdy stejným způsobem počítáme b a další neznámá čísla. Při řešení je potřeba použít dvakrát operaci sčítání a jednou operaci odčítání. Řešení tedy neprobíhá jedním směrem v trojúhelníku.
3. Náročnější variantou je zadání baze a, d, e (resp. symetrická baze c, d, e). Zde je potřeba provést jednou sčítání a dvakrát odčítání ($f = d + e$, $b = d – a$, $c = e – b$).
4. Další je zadání baze a, d, f případně dalších kombinací, kdy je potřeba provést třikrát operaci odčítání ($b = d – a$, $e = f – d$, $c = e – b$).
5. Zajímavé je ještě zadání baze a, c, f. Zde není ihned patrné, jaký výpočet je potřeba provést. Žák, který nezná vazbu mezi těmito zadanými čísly trojúhelníku ($f = a + 2b + c$), bude nejspíše řešit metodou pokus - ověření - korekce (Eisenmann a kol., 2015, s. 540).

Kromě základních vazeb, kterých se využívá v bodech 1-4, Hejný v (Hejný, Hejná, 1998) uvádí i vazby odvozené, např. tu v bodě 5. nebo vazbu $a + e = c + d$, $a + e = f – b$. Prostředí tak kromě rozvoje kalkulativních dovedností nabízí též příležitost k rozvoji schopností zobecňovat a odhalovat zákonitosti dané struktury čísel.

4. Metodologie

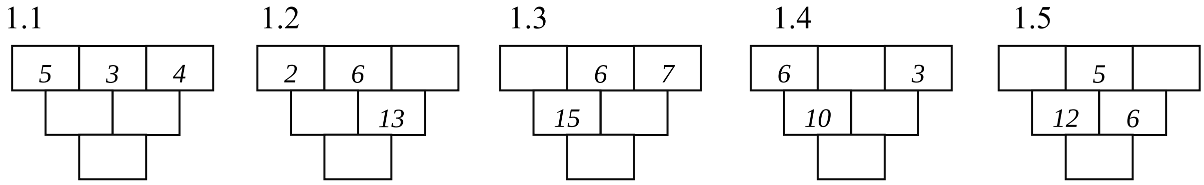
Subjekty našeho výzkumu byli žáci a jejich třídní učitel jedné třídy 4. ročníku na ZŠ Zdeňka Škarvady v Ostravě – Porubě. Počet žáků, kteří se výzkumu účastnili, byl 20. Výzkumná data byla sbírána v prvním pololetí školního roku 2020/21. Výzkum je součástí projektu *Inovace ŠVP ve školních družinách a diferenciace výuky matematiky na 1. stupni ZŠ* v operačním programu *Výzkum, vývoj a vzdělávání*. Řešitelem projektu je společnost H-mat, o.p.s. a první autorka článku je členkou řešitelského týmu. Doba řešení projektu je r. 2020-2022.

Nástrojem našeho výzkumu byl jeden z úkolů řešených v projektu: Třídní učitel naší třídy obdržel podrobný popis didaktického prostředí *Sčítací trojúhelníky* s typovými úlohami uspořádanými do gradovaných sérií a doplněnými didaktickými komentáři, které průběžně využíval ve výuce. Na základě vlastních zkušeností se žáky sestavil sérii gradovaných úloh tak, aby očekávaná doba řešení nepřesáhla 40 minut. Toto byl první materiál naší výzkumné databáze. Tuto sérii úloh zadal žákům k řešení při online výuce. Žákovská řešení a řešitelské strategie pak analyzoval. Na základě výsledků analýz, odhalených problémů a chyb navrhnul následné úlohy, které plnily reedukační roli. Žáci řešili úlohy samostatně, učitel se ujal role experimentátora, žáky jen pozoroval, ale nevstupoval do průběhu jejich řešení. Výsledná řešení žáci online předali učiteli.

Databázi našeho výzkumu tvoří již zmíněná učitelem sestavená série úloh pěti typů s jeho písemnými komentáři a žákovská řešení série úloh. Komentáře uvádíme pro každou následující úlohu.

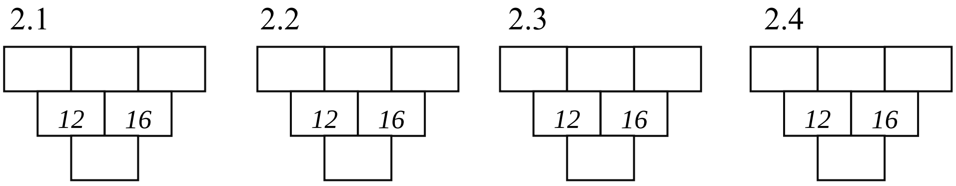
ISSN 2694-8133

Úloha 1: Doplň scházející čísla.



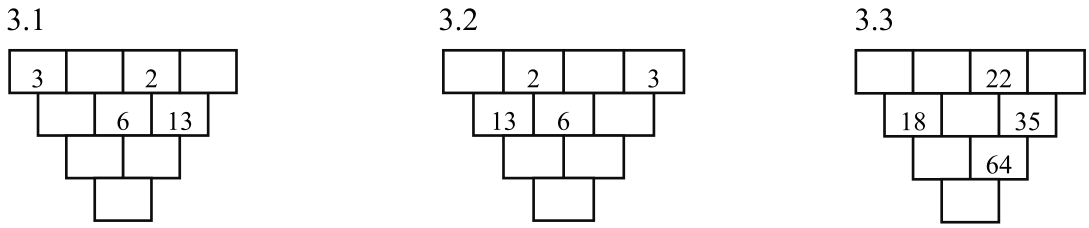
Podle učitele je gradačním parametrem pozice zadaných čísel, která určuje, jakou operaci je nutno provést a popřípadě určuje i pořadí operací. V úloze 1.1 je zadána nejjednodušší baze *a, b, c* a je potřeba provést třikrát operaci sčítání. Úlohy 1.2 a 1.3 mají symetrické baze *a, b, e – b, c, d* a provádíme jednou odčítání a dvakrát sčítání. Úlohu 1.3 považuje pan učitel za obtížnější vzhledem k neznámé hodnotě čísla *a*. Úloha 1.4. obsahuje bazi *a, c, d* a počtem a druhem operací v řešení odpovídá zadání úloh 1.2 a 1.3. Je považována za obtížnější, neboť jako první je nutno provést operaci odčítání a teprve pak dvakrát operaci sčítání. Úloha 1.5 je považována za nejobtížnější, neboť je nutné dvakrát odčítat a jednou sčítat. Pořadí operací si může řešitel volit.

Úloha 2: Doplň scházející čísla.



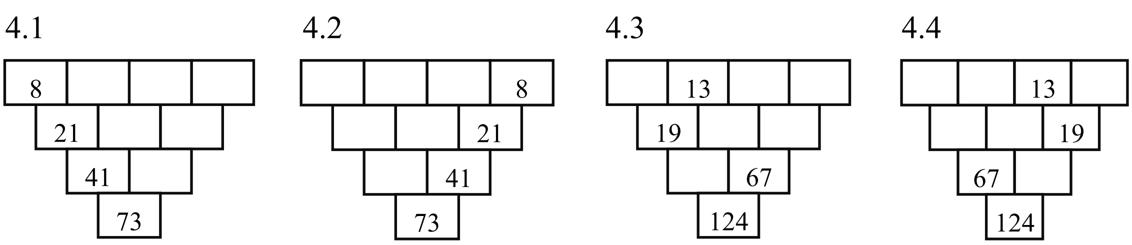
Učitel tuto úlohu zařadil s cílem diagnostikovat žákovo porozumění rozkladu čísel, žákovu schopnost systematičnosti řešení, schopnost zobecňování řešení a objevování vztahu mezi prvky trojúhelníku. Přesto, že existuje více řešení (v oboru celých čísel nekonečně mnoho), nabídl jen čtyři trojúhelníky s cílem diagnostikovat potřebu žáka nacházet další, případně všechny řešení, i když k tomu není vyzván.

Úloha 3: Doplň scházející čísla.



Učitel zadal trojúhelníky 3.1 a 3.2 symetricky. To mu umožnilo diagnostikovat metakognitivní schopnost žáka využívat symetrického zadání pro symetrické řešení. Přidal další gradační parametr – použil trojúhelníky 4. řádu. Trojúhelník 3.3 je podle něj nejobtížnější vzhledem k pozici zadaných čísel i jejich hodnotě. V této úloze se tedy objevují všechny typy gradačních parametrů, které jsme popsali v teoretickém úvodu.

Úloha 4: Doplň scházející čísla.

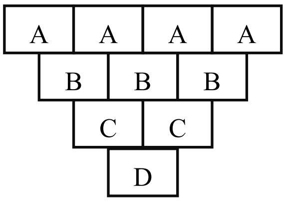


ISSN 2694-8133

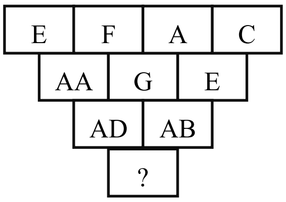
Učitel opět zadal úlohy 4.1 a 4.2 symetricky, aby porovnal diagnostiku z úloh 3.1 a 3.2. Úlohy jsou obtížnější umístěním prvků baze i jejich hodnotou. Totéž provedl s úlohami 4.3 a 4.4. Tyto považuje za obtížnější umístěním prvků baze i jejich hodnotou.

Úloha 5: Vyřeš algebrogramy.

5.1



5.2



V učitelově zadání úloh jsme identifikovali diagnostické jevy, které v odstavci 5 detailně analyzujeme. Jevy jsme rozdělili do dvou tříd: 1. jevy související se zadáním úlohy, 2. jevy související s žákovským řešením.

1. Úroveň trojúhelníků, Hodnota čísel, Více řešení, Symetrie, Algebrogram
2. Strategie řešení úlohy $a + b = c$, Symetrie, Systematičnost, Zobecňování

Vzhledem k těmto jevům byla vedena jevová a následně komparativní analýza žákovských řešení. V rámci každého jevu jsme sledovali:

1) zda žák chybuje a pokud ano, co je příčinou,

2) řešitelskou strategii.

Pro analýzu jsme použili tabulky, pro každý jev samostatnou tabulku. Tabulka 1 ilustruje evidenci jevu systematičnost v žákovských řešeních. V prvním sloupci uvádíme kód experimentu a žáka (01-03 znamená experiment 01, žák 03). V následujících sloupcích uvádíme čísla úloh, ve kterých se jev vyskytl (zde úlohy 2 a 5.2). Tyto sloupce jsou pro jednotlivé úlohy rozděleny na několik sloupců podle potřeby. Zde obě úlohy se dělí na dva sloupce: „chyby“ (chybuje – popis chyby, nechybuje 0) a „strategie“ (popis strategie buď konkrétně, nebo ano/ne ve vztahu ke sledovanému jevu ve smyslu „používá“/„nepoužívá“, nebo N – nelze zjistit). Pokud žák úlohu neřešil, uvádíme x. V úloze 5.2 jsme sledovali strategie nalezení dalších řešení, tedy pokud žák našel jen 1 nebo žádné řešení, není strategie dále popisována.

Tabulka 1: Ilustrace záznamu dat

	Úloha 2		Úloha 5.2	
	chyby	strategie	chyby	strategie
01-01	0	začíná rozkladem čísla 12 na 6 a 6, dále nemá žádný viditelný systém	0	jen 1 řešení
01-02	0	ANO – začíná rozkladem čísla 12 na 6 a 6, pak použije symetrické rozklady 7 a 5, 5 a 7	nenašel žádné řešení	0 řešení
01-03	0	začíná rozkladem čísla 12 na 3 a 9, nemá žádný viditelný systém	nenašel žádné řešení	0 řešení
01-04	0	rozklad čísla na 6 a 6 má až druhý, jinak viditelný systém není	nenašel žádné řešení	0 řešení
01-05	0	začíná rozkladem 16 na 8 a 8 (tedy zprava), pokračuje 9 a 7, ale dále nemá viditelný systém (očekávali bychom 10, 6 atd.)	0	jen 1 řešení
01-06 atd.	0	používá oba možné rozklady: 12 na 6 a 6, 16 na 8 a 8 (všiml si toho od 2. úlohy), další viditelný systém nemá	0	jen 1 řešení

ISSN 2694-8133

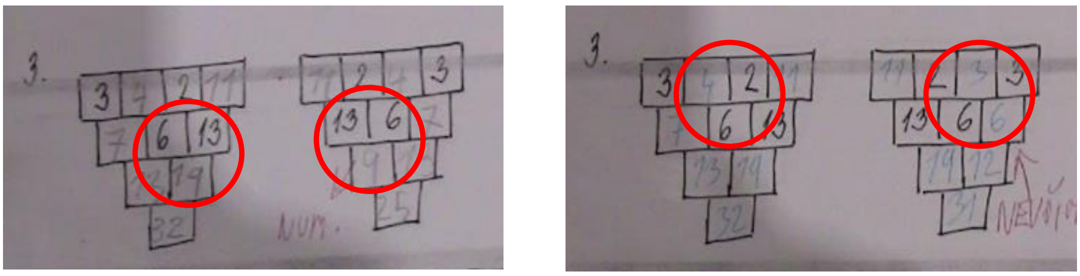
5. Výsledky

Žákovská řešení jsme analyzovali podle jednotlivých diagnostických jevů popsaných v Metodologii. Zpracováváme slovně, tabelárně a tam, kde to má smysl, ilustrujeme ukázkou žákovských prací (autorem dopisovaných poznámek k řešení je učitel).

Úroveň trojúhelníků se na úspěšnosti řešení projevila (tabulka 2). V tříúrovňových trojúhelnících (úlohy 1–2) nechyboval nikdo, ve čtyřúrovňových trojúhelnících (úlohy 3–5) 10 žáků, tj. 50 %. Chyby se vyskytly ve všech úlohách 3–5 s výjimkou úloh 3.1, 4.1 a 4.2. Z toho lze usoudit, že čtyřúrovňový trojúhelník nižší obtížnosti (umístění čísel 4.1 a 4.2) problém není. Chybovost se zvyšuje u čtyřúrovňového trojúhelníku s vyšší obtížností (umístění čísel 3.3, 4.3 a 4.4.). Dva žáci chybovali v úloze 3.2 přesto, že symetrickou úlohu 3.1 měli bez chyby (obr. 2). Zde za příčinu chyby považujeme neznámou pozici levého horního čísla v 3.2 na rozdíl od známé pozice téhož čísla v 3.1. Výsledky ukazují, že čtyřem žákům vyšší úroveň trojúhelníku potíže činí (žáci 11, 12, 18, 20), deseti žákům nečiní (01–08, 17, 19) a u šesti žáků nelze určit (9, 10, 13–16), protože se u nich vyskytují jak správné, tak chybné výsledky úloh srovnatelné obtížnosti.

Tabulka 2: Úroveň trojúhelníků, výsledky žáků

	Úlohy 1, 2	**Úlohy 3 - 5**	**potíže**		**Úlohy 1, 2**	**Úlohy 3 - 5**	**potíže**
žák	**chyby**	**chyby**		**žák**	**chyby**	**chyby**	
01-01	0	0	ne	01-11	0	4.2	ano
01-02	0	0	ne	01-12	0	3.3., 4.3., 4.4.	ano
01-03	0	0	ne	01-13	0	3.2, 3.3	?
01-04	0	0	ne	01-14	0	3.3.	?
01-05	0	0	ne	01-15	0	3.3.	?
01-06	0	0	ne	01-16	0	3.2	?
01-07	0	0	ne	01-17	0	0	ne
01-08	0	0	ne	01-18	0	3.3, 4.3., 4.4.	ano
01-09	0	3.3, 3.4	?	01-19	0	0	ne
01-10	0	3.2.	?	01-20	0	3.3., 4.3., 4.4.	ano



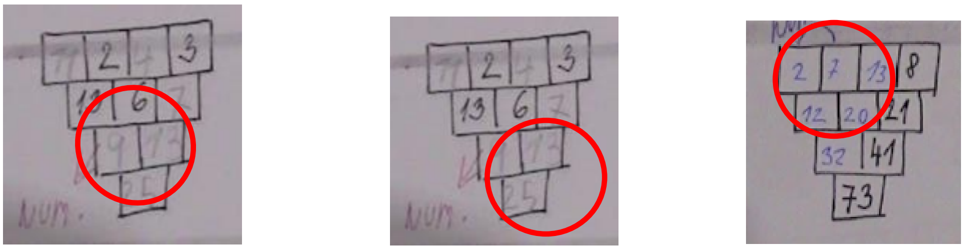
Obrázek 2: Chybná řešení symetrického trojúhelníka 3.2

Hodnota čísel se na úspěšnosti řešení projevila (tabulka 3). Žáci 01–08, 17 a 19 nechybují vůbec, žák 16 sice ano, ale chyba nesouvisí s hodnotou čísel. Žáci 09, 12, 14, 15, 20 s vyššími hodnotami čísel chybují, a to z různých příčin. Čtyři žáci chybují při sčítání (vidíme chyby, přepisování čísel), jeden žák (12) v dopočítávání. U dvou žáků (10, 11) nelze zjistit, zda je chyba způsobena hodnotou čísel, neboť chybují i u čísel nižších hodnot. Příčinou chyby může být problém v oblasti poruchy pozornosti, příp. dysgrafie (žák 10 namísto 19 píše 9, namísto 22 píše 25 (obr. 3), žák 11 chybuje jen v nízkých hodnotách, např. 2 + 7 = 12, 7 + 6 = 11, 15 + 3 = 18, ale ve vyšších hodnotách kalkulativní chyby nedělá).

ISSN 2694-8133

Tabulka 3: Hodnota čísel, výsledky žáků

	chyby			chyby	
01-01	0	ne	01-11	1.3., 3.1. a 4.2.	?
01-02	0	ne	01-12	3.2, 4.3, 4.4	ano
01-03	0	ne	01-13	3.1, 3.2., 3.3	ano
01-04	0	ne	01-14	3.3	ano
01-05	0	ne	01-15	3.3.	ano
01-06	0	ne	01-16	3.2.	ne
01-07	0	ne	01-17	0	ne
01-08	0	ne	01-18	3.3., 4.3., 4.4.	ano
01-09	?	ano	01-19	0	ne
01-10	3.2.	N	01-20	3.3., 4.3., 4.4.	ano



Obrázek 3: Dysgrafie jako možná příčina chyby

Dále nás zajímala strategie, kterou žáci použili při řešení úlohy $a + b = c$, kde jsou známy jeden sčítanec a součet (a, c, nebo b, c) a druhý sčítanec se hledá. Zajímalo nás, jakou operaci zde žáci použijí, zda dopočítávání, nebo zda použijí odčítání jako inverzní operaci ke sčítání ($b = c - a$, resp. $a = c - b$). Tento jev jsme sledovali v úlohách 1, 3, 4. Použitou strategii u jednotlivých žáků nám sdělil třídní učitel, který ji identifikoval v přímém pozorování žáka, případně dotazováním. Dopočítávání značíme v tabulce 4 písmenem D, odčítání O. Vidíme, že žáci používají konzistentně jednu strategii ve všech úlohách, tedy že jejich volba strategie není závislá na tom, který sčítanec je neznámý, ani na hodnotě čísel. Odečítá 15 žáků (01 – 07, 10, 13 – 17, 19 – 20), tj. 75 %. Zbytek žáků dopočítává. Učitel vnímá dopočítávání jako neefektivní strategii ve 4. ročníku a po celou dobu výuky vede žáky k odčítání. Vazba mezi chybovostí a volbou strategie se v experimentu neprojevuje.

Tabulka 4: Strategie řešení úloh $a + b = c$, výsledky žáků, O – odečítá, D – dopočítává

	Úloha 1		Úloha 3		Úloha 4	
	chyby	strategie	chyby	strategie	chyby	strategie
01-01	0	O	0	O	0	O
01-02	0	O	0	O	0	O
01-03	0	O	0	O	0	O
01-04	0	O	0	O	0	O
01-05	0	O	0	O	0	O
01-06	0	O	0	O	0	O
01-07	0	O	0	O	0	O
01-08	0	D	0	D	0	D
01-09	0	D	0	D		D
01-10	0	O	3.2.	O	0	O

	Úloha 1		Úloha 3		Úloha 4	
	chyby	strategie	chyby	strategie	chyby	strategie
01-11	1.3.	D	3.1.	D	4.2.	D
01-12	0	D	3.3.	D	4.3., 4.4.	D
01-13	0	O	3.1., 3.2., 3.3	O	0	O
01-14	0	O	3.3.	O	0	O
01-15	0	O	3.3.	O	0	O
01-16	0	O	3.2.	O	0	O
01-17	0	O	0	O	0	O
01-18	0	D	3.3.	D	4.3., 4.4.	D
01-19	0	O	0	O	0	O
01-21	0	O	3.3.	O	4.3., 4.4.	O

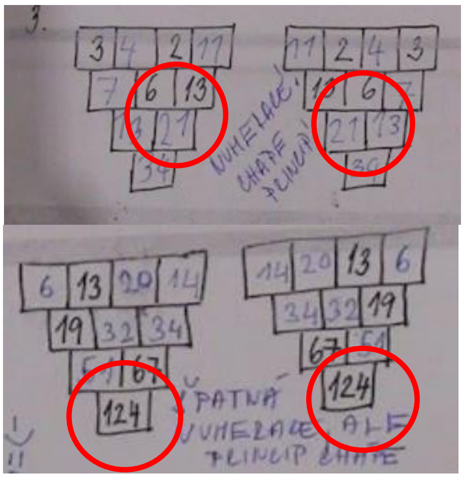
Při analýze jevu symetrie jsme rozlišovali, zda se jedná o symetrii v zadání (zadání je symetrické) nebo o symetrii v řešení úlohy (žák ji nějakým způsobem využil ve vlastním řešení). Symetrická zadání mají úlohy 3.1 a 3.2, 4.1 a 4.2, 4.3 a 4.4, 5.1.

Zda žák symetrie využívá jsme zjišťovali pozorováním žáků při řešení, dotazováním učitele nebo porovnáním řešení symetrických úloh. Pokud jsou žákovy chyby v řešení symetrických trojúhelníků rovněž symetrické, pak pravděpodobně symetrii zadání využívá (obr. 5a), pokud nejsou, pak pravděpodobně symetrii nevyužívá (obr. 5b). Pouze z písemného záznamu to však nelze jednoznačně určit, neboť žák může mít chybně uložen aritmetický spoj. V tabulce 5 jsou pro větší rozsah dat použity zkratky: ch – chyby, s – strategie. Sledujeme, že symetrii v zadání využívá 16 žáků, a to ve všech úlohách, kde je to možné. Symetrie v úloze 5.1 byla obtížně rozpoznatelná, za vyhovující považujeme její využití v úlohách 3 a 4. Symetrii nevyužívají žáci 09, 10, 11, 16, tedy 80 % žáků. Učitel chápe využívání symetrií jako efektivní metastrategii a po celou dobu výuky vede žáky k jejímu používání. Vazba mezi chybovostí a strategií se v experimentu neprojevuje.

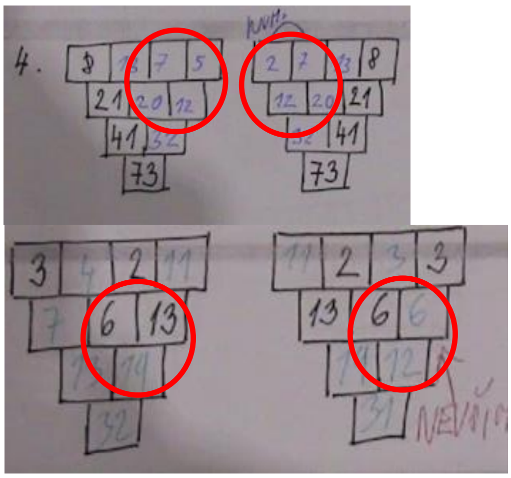
Symetrii v řešení jsme měli v úmyslu identifikovat v úloze 5.2. při nalezení dalších řešení. Nicméně žáci se spokojili s 1 řešením, tedy symetrii nevyužívali ani ti, kteří ji využívali v zadání.

Tabulka 5: Využití symetrie, žákovská řešení

	Úloha 3		Úloha 4		Úloha 5.1.		Úloha 5.2.				Úloha 3		Úloha 4		Úloha 5.1.		Úloha 5.2.	
	ch	s	ch	s	ch	s	ch	s			ch	s	ch	s	ch	s	ch	s
01-01	0	ano	0	ano	1	N	0	x		01-11	3.1.	ne	4.2	ne	0	N	x	x
01-02	0	ano	0	ano	0	N	x	x		01-12	3.3.	ano	4.3., 4.4.	ano	x	x	x	x
01-03	0	ano	0	ano	0	N	x	x		01-13	3.1., 3.2., 3.3	ano	0	ano	0	N	0	x
01-04	0	ano	0	ano	1	N	x	x		01-14	3.3.	ano	0	ano	0	N	0	x
01-05	0	ano	0	ano	0	N	0	x		01-15	3.3.	ano	0	ano	0	N	0	x
01-06	0	ano	0	ano	0	N	0	x		01-16	3.2.	ne	0	ne	0	N	0	x
01-07	0	ano	0	ano	0	N	0	x		01-17	0	ano	0	ano	0	N	x	x
01-08	0	ano	0	ano	0	N	x	x		01-18	0	ano	4.3., 4.4.	ano	x	x	x	x
01-09	0	ne		ne	x	x	x	x		01-19	0	ano	0	ano	0	N	x	x
01-10	3.2	ne	0	ne	x	x	x	x		01-20	0	ano	4.3., 4.4.	ano	0	N	x	x



Obrázek 5a: Využití symetrie v zadání



Obrázek 5b: Nevyužití symetrie v zadání

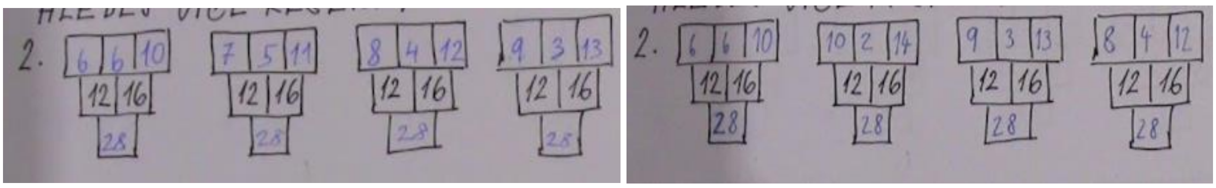
ISSN 2694-8133

Dále jsme sledovali, zda žák bez výzvy učitele hledá další řešení úlohy. Více řešení měly úlohy 2 a 5.2. Úloha 2 dala nabídku čtyřmi nevyplněnými trojúhelníky pro čtyři řešení. Slovní zadání „Hledej více řešení“ mohlo někoho vybízet k hledání více než čtyř řešení. Těch je celkem třináct v množině přirozených čísel, z toho jsou tři symetrická. V množině celých čísel je řešení nekonečně mnoho. Žáci vyplnili předepsané čtyři trojúhelníky a nikdo nedoplnil další řešení. Pravděpodobně tak považovali úlohu za vyřešenou a neměli potřebu hledat další. Možná nevěděli, kam by měli tato další řešení zapsat. Úloha 5.2 má tři řešení (E = 8, F = 3 nebo E = 5, F = 6 nebo E = 4, F = 7), předepsaná struktura byla jedna a slovní zadání žádné. Nikdo z žáků nezapsal více než jedno řešení. Příčiny mohly být stejné, jako v úloze 2.

V úlohách s více řešeními mělo smysl sledovat, v jakém pořadí žák řešení nachází. Zda pracuje systematicky nebo hledá řešení náhodně. Vzhledem k tomu, že žáci našli více řešení jen v úloze 2, sledujeme strategie jen v této úloze (tabulka 6). U čtyř žáků (03, 11, 15, 20) jsme neidentifikovali žádný náznak systematického vyhledávání řešení – v tabulce uvádíme N (ne). U jedenácti žáků se objevilo využití symetrie, viz výše. Žáci nacházejí jako první symetrické rozklady čísla 12 na 6 a 6, příp. 16 na 8 a 8, jeden z nich (19) rozklady čísla 12 na 3, 9 a 9, 3 a jeden z nich (02) rozklady čísla 12 na 7, 5 a 5, 7. Další projev systematického vyhledávání řešení jsme u nich nenašli – v tabulce uvádíme S (symetrie). Zcela systematické řešení vidíme u tří žáků: 08 (12 na 6 a 6, 7 a 5, 8 a 4, 9 a 3), 09 (12 na 6 a 6, 10 a 2, 9 a 3, 8 a 4), 12 (12 na 6 a 6, 12 a 0, 10 a 2, 2 a 10) – v tabulce uvádíme A (ano), (obr. 6). Částečně systematické řešení jsme našli u žáků 10 (začíná systematicky rozkládat číslo 12 na 11 a 1, 10 a 2, pak nepokračuje), 18 (používá sudé rozklady čísla 12 na 6 a 6, 2 a 10, 8 a 4, 0 a 12) – v tabulce uvádíme D (dílčí).

Tabulka 6: Systém v hledání řešení, žákovská řešení

Úloha 2		**Úloha 2**		**Úloha 2**		**Úloha 2**	
01-01	S	01-06	S	01-11	N	01-16	S
01-02	S	01-07	S	01-12	A	01-17	S
01-03	N	01-08	A	01-13	S	01-18	D
01-04	S	01-09	A	01-14	S	01-19	S
01-05	S	01-10	D	01-15	N	01-20	N



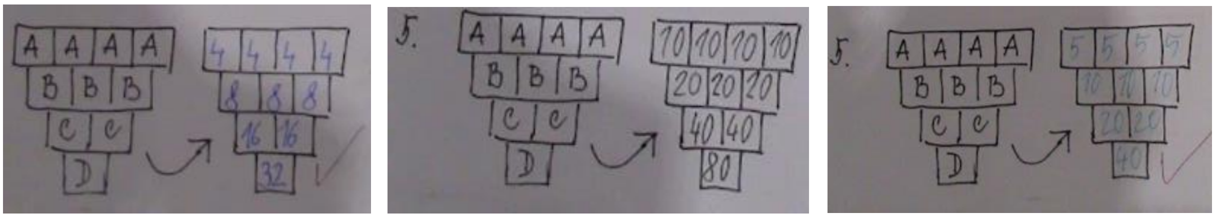
Obrázek 6: Systematické řešení

Algebrogram v úloze 5.1 vyřešilo správně třináct žáků (v tabulce uvádíme 0), tři žáci (09, 12, 18) nedoplnili žádné řešení (v tabulce uvádíme x), čtyři žáci (01, 04, 10, 16) mají řešení chybná – dosazují za písmeno dvouciferné číslo (v tabulce uvádíme popis chyby), obr. 7. Za povšimnutí stojí fakt, že učitel tuto chybu neidentifikuje (zatrhává řešení jako správné). Jedno řešení algebrogramu 5.2. našlo osm žáků (v tabulce uvádíme 0). Za pozornost stojí, že všichni mají identická řešení E = 5, F = 6 přesto, že existují další dvě řešení. Jeden žák má řešení chybně (19), dopustil se numerické chyby (v tabulce uvádíme 1). Jedenáct žáků nedoplnilo žádné řešení (v tabulce uvádíme x).

ISSN 2694-8133

Tabulka 7: Algebrogram, žákovská řešení

	Úloha 5.1	**Úloha 5.2.**		**Úloha 5.1**	**Úloha 5.2.**
	chyby	**chyby**		**chyby**	**chyby**
01-01	od třetí úrovně dvouciferná čísla	0	01-11	0	x
01-02	0	x	01-12	x	x
01-03	0	x	01-13	0	0
01-04	všechna pole dvouciferná čísla	x	01-14	0	0
01-05	0	0	01-15	0	0
01-06	0	0	01-16	od druhé úrovně dvouciferná čísla	0
01-07	0	0	01-17	0	x
01-08	0	x	01-18	x	x
01-09	x	x	01-19	0	1
01-10	od druhé úrovně dvouciferná čísla	x	01-20	0	x



Obrázek 7: Algebrogram – dosazení čísla namísto číslice

Měli jsme v úmyslu identifikovat proces zobecňování. Sledovat, zda má žák ke zobecňování tendenci, příp. na nějaké úrovni dokáže zobecnit. Nicméně v žákovských řešeních jsme nedokázali tento jev věrohodně odhalit. Zobecňování souvisí se systematickým nacházením řešení, avšak i když jsme se zaměřili na žáky, kteří systém v úlohách odhalili, nevíme, zda dokázali generický model popsat (nehledali všechna řešení). Proto jsme dále s tímto jevem nepracovali.

6. Závěr

Ve výzkumu jsme se soustředili na identifikaci žákovy chyby, na popis jejího charakteru a na odhalení její příčiny. Po ukončení diagnostického testu už jsme s žáky nevedli další rozhovory. Tedy diskuze o možných příčinách chyby není konfrontována s realitou a je tedy na spekulativní úrovni.

Jako vzdělavatelé učitelů a budoucích učitelů shledáváme, že tento materiál má velký potenciál pro využití v jejich didakticko-matematické přípravě na práci se žáky. Studiem materiálu poznají, jak je důležité pracovat se sériemi úloh gradovaných podle zvolených parametrů pro diagnostiku žákových obtíží, ale i jeho schopností. Na základě diagnostikovaných jevů je pak potřeba nastavit další úlohy tak, aby žák obtíže překonal (reedukační úlohy), nebo aby se posunul o krok dál. V další práci mohou studenti daný materiál sami ověřit v praxi, a nakonec obdobný materiál samostatně tvořit v dalších kontextech.

Komparace žákovských řešení v rámci třídy a v rámci jednotlivých souborů úloh přinesla třídnímu učiteli cenné poznatky. V následném rozhovoru s ním jsme v diskuzi porovnávali naše závěry a jeho zkušenosti. Projednali jsme příčiny obtíží některých žáků a možnosti reedukačních kroků Dalším tématem našeho rozhovoru byla podoba diagnostického testu, analýza gradačních parametrů, návrhy na alterace testu. Stejným způsobem je možné pracovat i s budoucími učiteli.

Výsledky experimentu mohou být zdrojem informací i pro autory výukových materiálů pro žáky. Potvrzuje se potenciál zvoleného didaktického prostředí jak v rozsahu významných obecnějších obsahů (symetrie, izomorfismy, metakognice), tak v bohatosti matematické náplně (porozumění principu poziční číselné soustavy, aditivní triády (a,b,c), kde $a + b = c$ s neznámým počátečním stavem, procesu zobecňování) a také v možnostech rozvoje matematické gramotnosti (potřeba nalezení všech řešení úlohy, schopnost systematického řešení).

Problematika zobecňování v prostředí součtových trojúhelníků může být námětem dalších výzkumů. Bude potřeba sestavit vhodné gradované série úloh s cílem spuštění procesu zobecnění, jeho popisu žákem a jeho identifikace výzkumníkem. Zobecňování je obtížně uchopitelným tématem i v přípravě budoucích učitelů a práce s tímto aspektem posune jejich schopnosti na kvalitativně vyšší úroveň ve všech oblastech matematiky.

Acknowledgement

Článek využívá materiálů projektu Inovace ŠVP ve školních družinách a diferenciace výuky matematiky na 1. stupni ZŠ, 2020–2022, řešeném v H-mat, o.p.s. v rámci OP Výzkum, vývoj a vzdělávání.

Literatura

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Holt.

Eisenmann, P., Novotná, J., Přibyl, J. & Břehovský, J. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 27, 534-562.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Hejný, M., & Hejná, M. (1998). *Součtové trojúhelníky.* Praha: Raabe.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: UK.

Hoth, J., Döhrmann, M., Kaiser, G. et al. (2016). Diagnostic competence of primary school mathematics teachers during classroom situations. *ZDM Mathematics Education*, 48, 41-53.

Keller-Schneider, M. (2020). Teaching is More than Applying Knowledge: Developmental tasks od pre-primary and primary teachers effects on teacher education. *Pedagogika* (4), 569-591.

Petty, G. (2009). *Evidence-Based Teaching. A Practical Approach.* Nelson Thornes Ltd.

Piaget, J., & Inhelder, B. (2010). *Psychologie dítěte*. Praha: Portál.

Vygotskij, L. S. (1970). *Myšlení a řeč.* Praha: SPN.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational studies in Mathematics Education*, (48), 1-20.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen.* Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart: Klett.

Žáková, K. (2009). *Výukové a diagnostické možnosti prostředí Sčítací trojúhelníky u žáků na 1. stupni.* [Diplomová práce]. Univerzita Karlova.

ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL

Editorial Office: Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

Address: Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Phone: +420 58 563 5709

E-mail: emej@upol.cz

Electronic edition: http://emejournal.upol.cz/issues

2021

Vol. 3, No. 2

ISSN 2694-8133