

## MODELY SYMETRIE S PRVKAMI HUDBY V MATEMATICKEJ EDUKÁCI

Alena PRÍDAVKOVÁ

Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)  
alena.pridavkova@unipo.sk

### Abstrakt

V matematike a hudobnej výchove je možné identifikovať mnoho spoločných elementov. Obe oblasti poznania využívajú jazyk, kde sú koncepty a vzťahy medzi nimi prezentované pomocou špecifických symbolov. Výskumy ukazujú na pozitívny vplyv realizácie činností hudobného charakteru na rozvoj matematických schopností (Kolodziejski, 2012, Luczak, 2015), ale aj naopak – matematické schopnosti sú prediktorom porozumenia hudobných konceptov. Edukačné aktivity integrujúce matematiku a hudobnú výchovu podporujú proces porozumenia rôznych matematických pojmov. Východiskom pre kreovanie návrhov aktivít uvedeného charakteru je analýza obsahu vzdelávania oboch vyučovacích predmetov. V príspevku budú prezentované možnosti využitia elementov matematiky a hudobnej výchovy pri porozumení pojmov z geometrie. Hudobné modely konceptu symetria môžu byť prostriedkom pre lepšie pochopenie pojmu osová súmernosť.

**Kľúčové slová:** matematika, hudobná výchova, symetria, osová súmernosť

## THE MODELS OF SYMMETRY WITH MUSIC ELEMENTS IN MATHEMATICS EDUCATION

### Abstract

Many common elements can be identified in mathematics and music education. Both areas of knowledge use language, where the concepts and the relations between them are presented using specific symbols. Results of research show to the positive impact of application musical activities to developing mathematical abilities, and vice versa – mathematical abilities are predictors of musical concepts understanding (Kolodziejski, 2012, Luczak, 2015). Educational activities integrating mathematics and music support the process of understanding various mathematical concepts. The analysis of the education content of both areas/subjects is a key starting point for creating the mentioned proposals for activities. The possibilities of using mathematical and musical elements within the process of understanding the geometrical concepts are presented in the paper. Musical models of the concept of symmetry can be a means of better understanding the notion of axial symmetry.

**Keywords:** mathematics, music, symmetry, axial symmetry

### 1. Úvod

Pre zhodné zobrazenia platí, že pri zobrazovaní útvarov sa ich tvar a veľkosť zachováva, zatiaľ čo ich pozícia sa môže meniť. V prípadoch, kedy je útvar rotovaný (rotácia), zrkadlovo zobrazený (osová súmernosť) alebo posunutý (translácia) hovoríme o zhodnom zobrazení. Tieto zobrazenia sú často referované s preklopením, posunutím, otočením útvaru, objektu

(Jorgensen & Dole, 2011). V texte budú pojmy symetria a súmernosť (útvary symetrické, súmerné) používané v ekvivalentom význame.

Spolu s predstavami o rôznych útvaroch sa v myslení detí rozvíjajú aj poznatky o symetrii a zhodnosti (Clements & Sarama, 2014). Vnímajú symetriu objektov vyskytujúcich sa v ich okolí, akými sú napríklad listy stromov, motýle, kvetiny, lienka a pod., ktorých modely sú buď reálne objekty alebo sú znázornené v rovine vo forme obrázkov či fotografií. Postupne deti pracujú aj so symbolmi, ikonami, ktoré sú symetrické – srdce, kvet, smeľko, číslice, písmená, rôzne značky, logá, piktogramy atď. Prezentovaná môže byť aj súmernosť podľa zvislej roviny, ktorá je spojená s udržiavaním rovnováhy tela (Nováková & Novák, 2019).

Existuje pomerne veľké množstvo manipulatívnych prostriedkov, prostredníctvom ktorých majú žiaci možnosť nadobúdať skúsenosti s konceptom symetria (Žilková, 2010, Nováková & Novák, 2019, Šimčíková & Tomková, 2005). Pri niektorých je prioritná manipulácia s predmetmi v reálnom priestore, v iných prípadoch ide o prácu s digitálnymi prostriedkami vo forme hier. Návrhy na manipulačné predmetné, ale aj virtuálne aktivity, zamerané na skúmanie súmernosti predstavuje Žilková (2010). Poukazuje na rôzne možnosti aplikácie osovej súmernosti využitím zrkadla, v manipulatívnej verzii. Reprerentácie na vyššej úrovni abstrakcie sú často využité pri elektronických hrách, vytvorených v rôznych dynamických geometrických prostrediach. Na základe vyššie uvedených skutočností možno uvažovať o existencii rôznych typov reprerentácie objektov slúžiacich ako prostriedok na vytvorenie predstavy o koncepte symetria.

Bruner (1960) vymedzuje tri typy reprerentácií: (1) enaktívna – spojená s priamou činnosťou skúsenosťou; (2) ikonická – skúsenosti sú zaznamenávané pomocou obrazcov, zástupných modelov reálnych objektov a (3) symbolická – kde sa pracuje so symbolickým (matematickým) jazykom a zápisom. Jednotlivé typy reprerentácie majú svoj význam, preto je dôležité, aby bol v praxi aplikovaný každý z nich. Týka sa to aj matematických konceptov, kde sú dôležité ich rôzne reprerentácie v procese kreovania predstavy o danom pojme, pri riešení problémov, pri zaznamenávaní myšlienkových postupov a pod. Inak tomu nie je ani v prípade pojmu symetria.

Rôzne typy reprerentácií je možné využiť aj v činnostiach spojených s pojmom symetria. Enaktívna reprerentácia sa vyskytuje napríklad v činnostiach, kedy je využitá práca s geometrickým zrkadlom. Žiak tak má možnosť overiť vlastnosti objektu manipulačnou činnosťou s geometrickým zrkadlom. V zrkadle vidí obraz modelu, ktorý predstavuje vzor (konkrétny predmet, obrázok, časť obrázka a pod.). Ikonický typ reprerentácie je možné pozorovať v situáciách, kedy je práca realizovaná v rovine, napríklad na papieri, bez použitia pomôcok typu zrkadlo. Žiak má napríklad vytvoriť v štvorcovej sieti obraz útvaru (t. j. obraz vzoru v osovej súmernosti). Pri symbolickom type reprerentácie môžu byť za vzory považované rôzne abstraktné obrazce, symboly – napríklad noty, rôzne symboly pre rytmus, pohyb a pod.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) uvádza odporúčanie týkajúce sa využívania manipulatívnych činností pri identifikácii a znázorňovaní rôznych typov symetrií. Výsledky pozorovania riešenia úloh z oblasti symetrie predstavujú Hoyles & Healy (1997). V rámci štúdie boli pri práci detí evidované tri módy úlohy – enaktívna (pohyb modelu korytnačky), ikonická (vizualizácia cesty) a symbolická (záznam pohybu pomocou kódu). Aplikovaná bola aj činnosť spojená s prekladaním papiera, na ktorú nadväzovala práca v štvorcovej sieti znázornenej na papieri.

Predpokladom úspešného riešenia úloh využitím symetrie sú, ako uvádzajú Hoyles & Healy (1997), predchádzajúce osobné, životné skúsenosti žiaka, jeho práca v škole spojená s realizáciou aktivít, činností, riešenie úloh propedeutického charakteru. Ide predovšetkým o činnosti, ktoré využívajú manipuláciu s reálnymi objektami, resp. s ich rovinnými modelmi vo forme obrázkov. Modely objektov prechádzajú postupne rôznymi úrovňami abstrakcie – od

konkrétnych objektov (ich modelov) až ku symbolickým reprezentáciám. Vo všetkých prípadoch ide o vizuálne modely objektov, či už priestorových alebo rovinných. Okrem vizuálnej prezentácie je možné aplikovať aj auditívne reprezentácie objektov, v ktorých sa vyskytujú elementy symetrie. Na zisťovanie schopnosti úspešne riešiť úlohy z oblasti osovej súmernosti sa ukazuje ako vhodný prostriedok súbor úloh s gradovanou úrovňou náročnosti (Xistouri, 2007; Sinclair & Kaur, 2011).

Zámerom príspevku je predstaviť námety aktivít, implementujúcich elementy hudobnej výchovy s využitím auditívnych reprezentácií symetrie. Niektoré z nich využívajú aj prvky spojené s pohybom v priestore. Spoločnou črtou návrhov je fakt, že sú realizované využitím skupinovej resp. frontálnej formy, čo predikuje aj rozvoj kooperatívneho učenia a sociálnych vzťahov v kolektíve žiakov. Prezentované budú ukážky aktivít, ktoré je vhodné aplikovať v edukácii na primárnom stupni vzdelávania, ako aj v príprave učiteľov v rámci ich vysokoškolského štúdia. Význam prípravy budúcich učiteľov v danej oblasti potvrdzuje aj Son (2006, In Jones & Tzekaki, 2016), ktorý konštatuje, že budúci učitelia na základných školách majú často limitované vedomosti o symetrii a zamieňajú si koncepty symetria a rotácia. Nedostatky v uchopení pojmov majú následne vplyv na spôsob, akým realizujú proces učenia danej problematiky v triede. Námety sú vytvorené tak, aby pri ich realizácii bolo možné úroveň náročnosti prispôbiť cieľovej skupine. V každej z nich je možné identifikovať niekoľko elementov, ktoré predstavujú tzv. gradačné kritériá kognitívnej náročnosti aktivity. Je možné tak kreovať niekoľko variácií/obmien v závislosti od cieľovej skupiny, ako aj od nastavených cieľov práce a činnosti žiakov.

## 2. Pojem symetria v obsahu matematickej edukácie

Ako už bolo v úvode spomenuté, práca so súmernými (symetrickými) útvarmi je súčasťou aktivít realizovaných pri hrových činnostiach už v predškolskom veku. Predstavuje kľúčový predpoklad pre vytvorenie predstavy o koncepte osová súmernosť, ktorý je v školskej matematike v slovenskom kontexte sprístupnený na 2. stupni základnej školy. Vychádzajúc z analýzy obsahu kurikulárnych dokumentov (na Slovensku) pre matematické vzdelávanie od predprimárneho až po nižší sekundárny stupeň vzdelávania, uvádzame prehľad zastúpenia danej problematiky vo forme štandardov.

(1) Predprimárny stupeň vzdelávania: aj napriek skutočnosti, že v obsahových štandardoch nie sú explicitne špecifikované úlohy spojené s pojmom symetria (ani na propedeutickej úrovni), majú deti priestor na nadobudnutie prvotných skúseností so súmernými útvarmi (v rovine a priestore) a obrázkami (Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách, 2016).

(2) Primárny stupeň vzdelávania: obsahové a výkonové štandardy sú pre danú problematiku vymedzené v tematickom celku *Geometria a meranie* (Matematika – primárne vzdelávanie, 2015, s. 6).

Obsahové štandardy: zhodné zobrazenie – osová súmernosť (na propedeutickej úrovni); zhodné zobrazenie – posunutie (na propedeutickej úrovni), vzor, obraz; zväčšenie a zmenšenie rovinných útvarov v štvorcovej sieti, podobné útvary (na propedeutickej úrovni).

Výkonové štandardy: v štvorcovej sieti dokresliť (dorysovať) osovo súmerný obrázok; v štvorcovej sieti dokresliť (dorysovať) zhodný obrázok; zväčšiť a zmenšiť rovinné útvary v štvorcovej sieti (štvorec, obdĺžnik).

(3) Nižší sekundárny stupeň vzdelávania: v 5. ročníku, v tematickom celku *Súmernosť v rovine*, je možné identifikovať štandardy v danej oblasti (Matematika – nižšie stredné vzdelávanie. 2015, s. 9).

Obsahové štandardy: súmernosť a zhodnosť geometrických útvarov, os súmernosti, osová súmernosť, útvary osovo súmerné, vzor, obraz, konštrukcia rovinného geometrického útvaru v osovej súmernosti.

Výkonové štandardy: pre daný bod nájsť (nakresliť/zostrojiť) bod, s ktorým je osovo súmerný podľa danej osi, identifikovať rovinné geometrické útvary súmerné podľa osi, nájsť (nakresliť/zostrojiť) os súmernosti dvojice bodov, úsečky, nájsť (nakresliť/zostrojiť) osi súmernosti osovo súmerného útvaru, zostrojiť obraz bodu, úsečky, priamky, kružnice alebo jednoduchého útvaru (obrazca) zloženého z úsečiek a častí kružnice v osovej súmernosti, pracovať s osovo súmernými útvarmi vo štvorcovej sieti, dokresliť, opraviť ich.

Výsledky obsahovej analýzy kurikulárnych dokumentov od predprimárneho, cez primárny až po nižší sekundárny stupeň vzdelávania ukazujú, že problematika osovej súmernosti je na prvých dvoch uvedených stupňoch vzdelávania prezentovaná cez činnosti, aktivity a úlohy propedeutického charakteru a do učiva je zaradená na druhom stupni základných škôl.

### 3. Návrhy aktivít s využitím elementov hudobnej výchovy

V ďalšej časti sú predstavené návrhy edukačných aktivít, ktoré je možné realizovať v rámci vyučovania matematiky. Aktivity sa netýkajú priamo učiva z oblasti geometrie, no aj napriek tejto skutočnosti obsahujú vlastnosti súmernosti. Návrhy využívajú elementy hudobnej výchovy v zmysle podporných prostriedkov pre porozumenie, resp. upevnenie vlastností pojmov symetria, osová súmernosť, zrkadlový obraz. Spoločným cieľom návrhov je oboznamovanie sa s pojmami vzor, obraz, osová súmernosť – jej objavovanie a vlastnosti. Zámerom prezentovaných námetov je poskytnúť podnety na vnímanie, skúmanie a porozumenie symetrie aplikovaním zvukových a rytmických modelov a pohybových aktivít, ako aj využitím rôznych typov reprezentácií daného pojmu.

- Aktivita 1: Hudobný zrkadlový obraz

Aktivita využíva hudbu a jej elementy ako podporný prostriedok pre porozumenie konceptu symetria (Mall et al., 2016).

Žiaci skúmajú osovú súmernosť prostredníctvom piesne, hry na inštrumentálne nástroje a fyzického pohybu. Aplikovaním tímovej práce a spolupráce budú schopní využívať hudbu ako podporný prostriedok pri ďalšom rozvoji porozumenia pojmu transformácia v zmysle geometrického zobrazenia.

Z elementov hudobnej výchovy sú v aktivite aplikované kompozícia a improvizácia, fyzické vnímanie hudby a fyzická reakcia na hudbu. Z pohľadu matematiky je využité matematické uvažovanie a vytváranie súvislostí, komunikácia nápadov a myšlienok z matematickej oblasti využitím viacerých formálnych aj neformálnych reprezentácií a pojem osová súmernosť.

Pred samotnou realizáciou by mali mať žiaci osvojené elementárne vedomosti o pojme osová súmernosť (symetria) – v zmysle jej porozumenia. Z hudobnej výchovy je nutné porozumenie a uvedomenie si výšky tónu a skúsenosti s grafickým/notovým zápisom.

**Postup:**

Odporúča sa realizovať aktivitu v miestnosti, kde je vytvorený dostatočný priestor na to, aby si žiaci mohli sadnúť na zem, do kruhu a pracovať v skupinách. Učiteľ zaspieva alebo zahrá jednoduchú hudobnú frázu s reflexnou symetriou/osovou súmernosťou (fráza a jej „retrográdny“ efekt - napr. C D E E D C alebo rytmický vzor, ktorý má prvky symetrie). Prezentovaný môže byť aj vzor v podobe postupnosti pohybov tak, aby mal vlastnosti symetrie (napríklad: krok, krok, krok, skok, skok, krok, krok, krok a pod.). Prípadne je prezentovaná postupnosť zvukov využitím hry na tele (napríklad: plesknutie, lúsknutie, lúsknutie, dupnutie, dupnutie, lúsknutie, lúsknutie, plesknutie).

Žiaci pracujú v skupinách alebo vo dvojiciach a pokúšajú sa zistiť, kde je v prezentovanej ukážke pomyselná os súmernosti, napríklad identifikovaním dvoch častí frázy, ktoré sú navzájom symetrické (jedna je zrkadlovým obrazom druhej). Danú frázu si môžu vypočítať aj viackrát. Môžu sa pokúsiť zaznamenať frázu symbolmi alebo ju fyzicky znázorniť pomocou pohybov. V ďalšej časti žiaci ďalej pracujú v skupinách alebo vo dvojiciach a pomocou osovej súmernosti (zrkadlovej symetrie) tvoria vlastné návrhy jednoduchej frázy. Môžu pritom využiť rôzne zvuky, nástroje (napr. Orffov inštrumentár), hru na tele, pohyby a pod. Návrhy sú následne prezentované ostatným skupinám spolu s vysvetlením a zdôvodnením prečo je ich fráza symetrická. Žiaci pritom hľadajú os súmernosti (reflexnej/zrkadlovej symetrie).

Odporúčané je mať vopred pripravené pomôcky: farebné perá, flipchartový papier, vyladené bicie nástroje (s používaním ktorých už majú žiaci skúsenosť), orffove nástroje. Náročnosť aktivity je možné gradovať na základe niekoľkých atribútov: dĺžka prezentovanej frázy, počet zvukov, pohybov, rôznorodosť použitých zvukov, pohybov, krokov, smer pohybu a pod.

- **Aktivita 2: Zahraj symetrické číslo**

Aktivita využíva akustickú reprezentáciu  $n$ -ciferných prirodzených čísel v desiatkovej číselnej sústave.

Cieľom činnosti z pohľadu matematiky je identifikovať resp. vytvoriť symetrické  $n$ -ciferné prirodzené číslo na základe jeho akustickej reprezentácie v desiatkovej číselnej sústave. Číslo bude považované za symetrické, ak pre jeho zápis platí, že poradie čífer je v smere zľava doprava rovnaké ako v smere sprava doľava. Z hudobnej výchovy sú v aktivite aplikované pojmy rytmus, metrum, metrorytmus. Pre realizáciu aktivity je potrebné, aby žiaci ovládali pojmy číslo, číslica, jednotky, desiatky, stovky, skrátený a rozvinutý zápis čísla v desiatkovej číselnej sústave, aby správne vedeli prečítať  $n$ -ciferné čísla.

**Postup:**

V úvode je vhodné zopakovať možnosti pre grafické znázornenie viacciferných čísel, s ktorými pracovali na vyučovaní, kde sú pre číslice jednotlivých rádov využité konkrétne symboly. Žiakom sú následne prezentované zvukové modely prirodzených čísel. Úlohou je identifikovať dané číslo na základe transformácie vopred dohodnutých zvukových kódov (napríklad: stovky – lúsknutie, desiatky – potlesk, jednotky – dupnutie). Počet zvukov prislúchajúcich danému rádu je postupne pretransformovaný na číslicu/číslíce (daného rádu), až je identifikované dané prirodzené číslo. Úlohou je určiť, či dané zahrané číslo je/nie je symetrické. V prípade, že žiaci majú problém s udržaním počtu zvukov v pamäti, môžu si ich postupne zapisovať. Odporúča sa, aby zvuky boli prezentované v poradí od číslice najvyššieho rádu. Napríklad je zahrané číslo 535: 5-krát lúsknutie, 3-krát potlesk, 5-krát dupnutie. Na spôsobe kódovania je možné sa dohodnúť so žiakmi a používať vopred dohodnuté zvuky na reprezentáciu číslic jednotlivých rádov v danom čísle. Dôležité je počas celej aktivity používať rovnaké kódovanie.

V ďalšej časti žiaci v skupinách (dvojiciach) vytvárajú akustické modely čísel tak, aby boli symetrické. Ostatní žiaci, na základe prezentácie posúdia, či zahrané čísla majú požadovanú vlastnosť.

Obmeny:

- v prípade gradácie úlohy je možné zmeniť poradie prezentovaných zvukov – od jednotiek, k desiatkam atď.;
- možné je modelovať aj také čísla, v zápise ktorých sa vyskytuje číslica nula (daný zvuk nezaznie);
- v závislosti od schopností cieľovej skupiny je možné voliť rôzny počet cifier v čísle (3, 4, 5, 6, 7).

#### 4. Záver

Elementy hudobnej výchovy predstavujú prostriedky, ktoré je možné využiť pri tvorbe modelov pojmov vyskytujúcich sa v matematickej edukácii. Predstavené boli námety na aktivity zamerané na poznávanie a osvojenie si pojmu osová súmernosť. V aktivitách boli využité rôzne typy reprezentácií pojmu symetria, využívajúce pohyb, zvuk, symboly, pričom tie boli vytvorené na rôznej úrovni abstrakcie. Typ využitého modelu môže byť indikátorom úrovne náročnosti aktivity, či úlohy. Naznačené boli rôzne možnosti pre atribúty kognitívnej náročnosti, na základe ktorých je možné kreovať súbory gradovaných činností. Hudobná výchova poskytuje možnosti na tvorbu auditívnych modelov matematických konceptov, ktoré sú vzhľadom na abstraktný charakter, vo väčšine prípadov na vysokej úrovni kognitívnej náročnosti. Komplementom k abstraktným zvukovým modelom sú iné, menej abstraktné modely, akými sú napríklad pohyb, gestikulácia, vlastné návrhy symbolov.

Ďalšie príklady edukačných aktivít, ktoré integrujú obsah matematiky a hudobnej výchovy je možné nájsť v prácach Hnatová 2020a, 2020b, 2020c, Hnatová & Prídavková 2019, 2020, Prídavková, 2020.

#### Acknowledgements

Príspevok je výstupom grantového projektu KEGA 028PU-4/2019 *Inkorporácia hudobných činností do matematickej pregraduálnej prípravy študentov v študijnom odbore Predškolská a elementárna pedagogika*

#### Literatúra

- Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Oxford, England: Harvard University Press.
- Clements, D., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math*. Routledge. N.Y. and London.
- Hnatová, J. (2020a). Presah učebných štýlov žiakov do výučby matematiky podporovanej začlenením hudobných elementov. In: *Osvita i suspiľstvo V* (s. 33-40). Opole: Wyższa Szkoła Zarządzania i Administracji w Opolu.
- Hnatová, J. (2020b). Hudobné podnety v matematickej edukácii na primárnom stupni vzdelávania – rovnosti a rovnice s Geogebrou. In: *Dva dny s didaktikou matematiky 2020* (s. 52-56). Praha: PF UK v Praze.
- Hnatová, J. (2020c). Interaktívny pracovný list rovnosti s notami. *Bigeche*, 23, 52-61.
- Hnatová, J. & Prídavková, A. (2019). Propedeutika zlomkov v matematike s využitím hudby a počítačov. *South Bohemia Mathematical Letters*, 34-41.

- Hnatová, J. & Prídavková, A. (2020). Matematika v hudobnej edukácii na primárnom stupni vzdelávania – rytmické modely. In: *Jak učiť matematice žáky ve věku 10-16 let* (s. 38-47). Praha: JČMF.
- Hoyles, C., & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2(1), 27-59.
- Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In: *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense.
- Jorgensen, R., & Dole, S. (2011). *Teaching mathematics in primary school*. Sydney: Allen & Unwin.
- Kolodziejski, M. (2012). Developing and stabilised musical aptitudes versus non-verbal production and readiness for improvisation in elementary school pupils demonstrating significant mathematical abilities. *Journal of Educational Review*, 5(2), 173-182.
- Luczak, A. (2015). Tvorba matematických pojmov v hudobnej výchove na primárnom stupni integrovaného vzdelávania (na prvom stupni základnej školy). *Múzy v škole*, 20(3-4), 50-69.
- Mall, P., Spychiger, M., Vogel, R., & Zerlik, J. (2016). *European Music Portfolio (EMP) – Maths 'Sounding Ways into Mathematics'. Teacher's Handbook*. Frankfurt: University for Music and Performing Arts Frankfurt.
- Matematika – nižšie stredné vzdelávanie*. (2015). Bratislava: ŠPÚ. [https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika\\_nsv\\_2014.pdf](https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf).
- Matematika – primárne vzdelávanie*. (2015). Bratislava: ŠPÚ. [https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika\\_pv\\_2014.pdf](https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf).
- National Council of Teachers of Mathematics. *Principles, Standards, and Expectations* (content standards). <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Principles,-Standards,-and-Expectations/>.
- Nováková, E., & Novák, B. (2019). *Matematická pregramotnosť a učiteľé mateřských škol*. Brno: MU.
- Prídavková, A. (2020). Matematická úloha s elementami hudobnej výchovy – prostriedok rozvoja pracovnej pamäti. *Elementary Mathematics Education Journal*, 2020(1), 53-62. [http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol2No1/Pridavkova\\_2020\\_Vol2No1.pdf](http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol2No1/Pridavkova_2020_Vol2No1.pdf).
- Sinclair, N., & Kaur, H. (2011). Young children's understanding of reflectional symmetry in a dynamic geometry environment. In B. Ubuz (Ed.), (2011). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Developing Mathematical Thinking*. Vol 4 (s. 193-200). Ankara, Turkey: PME.
- Šimčíková, E., & Tomková, B. (2015). *Matematika v predškolskej edukácii*. Prešov: PF PU.
- Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách*. (2016). Bratislava: ŠPÚ. [https://www.statpedu.sk/files/articles/nove\\_dokumenty/statny-vzdelavaci-program/svp\\_materske\\_skoly\\_2016-17780\\_27322\\_1-10a0\\_6jul2016.pdf](https://www.statpedu.sk/files/articles/nove_dokumenty/statny-vzdelavaci-program/svp_materske_skoly_2016-17780_27322_1-10a0_6jul2016.pdf)
- Xistouri, X. (2007). Students' ability in solving line symmetry tasks. In: *How do students from primary school discover the regularity*. (s. 526-535).
- Žilková, K. (2010). Manipulácie na tému súmernosť. In: *Acta Facultatis Paedagogicae Universitatis Tyrnaviensis*. C(14), (s. 3-9). Trnava: TU Pedagogická fakulta.