ADITIVNÍ PROBLÉMY TEORIE ČÍSEL VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

Jaroslav BERÁNEK
Masarykova Univerzita Brno, Pedagogická fakulta (Česká republika)
beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

V příspěvku jsou obsaženy formulace a naznačeno řešení některých jednoduchých aditivních problémů teorie čísel (určení pythagorejských trojic přirozených čísel včetně analogických úloh, rozklad čísel na součet kvadrátů atp.). Uvedeny jsou rovněž zajímavé teoretické problémy, jako např. kombinatorická teorie rozkladů konečných množin, Goldbachova hypotéza a prvočíselná dvojčata. Uvedené problémy mohou být využity při výuce budoucích učitelů matematiky na základní škole jako náměty k rozvíjení zájmu studentů o matematiku, případně k jejich motivaci k dalšímu studiu matematiky.

Klíčová slova: motivace, matematika, teorie čísel, rozklady čísel, Goldbachova hypotéza

ADDITIVE PROBLEMS OF NUMBER THEORY IN TEACHING OF MATHEMATICS

Abstract

In the article there are included examples and indicated solutions of some easy additive problems of number theory (finding Pythagorean triads of natural numbers including analogical examples, partition of numbers into the sum of squares etc.). Among others, there are also given some theoretical problems, like combinatorial theory of finite sets partition, Goldbach´s hypothesis and twin primes. Such problems could be used while teaching future elementary school mathematics teachers as a tool for deepening their interest in mathematics and their further motivation.

Keywords: motivation, mathematics, number theory, decomposition of numbers, Goldbach's hypothesis

1. Úvod

Mezi významné úkoly učitelů matematiky na všech stupních škol patří snaha o neustálé zkvalitňování výuky, odpovídající novým trendům jak v matematice, tak i v didaktice matematiky. Je nutno pravidelně obsah výuky inovovat, dále přinášet talentovaným studentům nové podněty a poskytovat jim vhodná témata k jejich samostatné tvůrčí činnosti v matematice. Výběr takovýchto vhodných témat je ovšem mnohdy problémem; některá témata jsou sice obsahově zajímavá, avšak po matematické stránce nad síly a možnosti studentů, jiná postrádají pro studenty poutavost. Náměty lze nalézt např. v publikacích [1], [2]. V tomto příspěvku je předloženo několik témat z teorie čísel, která mohou být pro studenty zajímavá i po formální matematické stránce přístupná. Pro studenty může jako motivační fakt působit i to, že teorie čísel jako matematická disciplína obsahuje problémy, jejichž pochopení i formulace jsou velmi jednoduché, avšak jejich řešení buďto není známo dodnes nebo je velmi komplikované (mnoho otevřených a po staletí nevyřešených problémů v matematice (viz [7], [10]) lze formulovat i prostředky žáka základní školy, např. velká Fermatova věta, dokonalá čísla, prvočíselná dvojčata apod.). Zaměříme se na tzv. aditivní problémy. Aditivními problémy teorie čísel se rozumějí takové úlohy, v nichž zkoumáme „utváření přirozených čísel ze sčítanců daného typu“.

2. Aditivní problémy teorie čísel

a) ***Pythagorejské trojice***

Začneme problémem určování pythagorejských trojic, tzn. hledání trojic přirozených čísel a, b, c splňujících vztah $a^2 + b^2 = c^2$ (otázka existence a počtu pravoúhlých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran). Uvedeme jeden z možných postupů odvození. Pro zkrácení vyjadřování budeme sice didakticky ne zcela přesně, ale výstižně čísla a, b nazývat „odvěsnami“ a číslo c „přeponou“ (čísla a, b, c vyjadřují délky příslušných stran trojúhelníka). Zřejmě se stačí při odvození omezit na případ, kdy jsou čísla a, b, c nesoudělná.

Nejprve sporem ukážeme, že jedna z „odvěsen“ musí být sudá a druhá lichá. Nechť a, b jsou sudá čísla, pak ze vztahu $a^2 + b^2 = c^2$ plyne, že také c je sudé číslo, což je spor s předpokladem nesoudělnosti všech tří čísel. Jedna z odvěsen tedy musí být lichá. Nikoliv však obě dvě, jak opět sporem ukážeme. Nechť $a = 2x+1$, $b = 2y+1$, pak $a^2 + b^2$ je po dosazení a úpravě číslo dávající po dělení čtyřmi zbytek dvě. Víme, že druhá mocnina lichého čísla je číslo liché, druhá mocnina sudého čísla je dělitelná čtyřmi. Číslo $a^2 + b^2$ nemá ani jeden z těchto tvarů, nemůže tedy být druhou mocninou žádného přirozeného čísla; případ obou lichých „odvěsen“ tedy nemůže nastat, jedna musí být sudá a druhá lichá. Číslo $a^2 + b^2 = c^2$ je tedy také liché a proto je lichá i „přepona“. Nechť tedy bez újmy na obecnosti např. a je liché a b je sudé číslo. Z rovnosti $a^2 + b^2 = c^2$ dostaneme $a^2 = (c - b)(c + b)$, kde oba činitelé na pravé straně jsou nesoudělná čísla. To ukážeme opět sporem. Kdyby čísla v obou závorkách měla společného dělitele většího než jedna, pak by tento dělitel musel dělit jejich součet $2c$, rozdíl $2b$ a součin a^2. Protože a je liché, nemůže být tímto dělitelem číslo 2, proto tento dělitel musí dělit čísla a, b, c, což není možné (čísla a, b, c jsou nesoudělná).

Máme tedy rovnost $a^2 = (c - b)(c + b)$, kde na pravé straně jsou nesoudělná čísla. Pak ale každé z těchto čísel musí být druhou mocninou, $c + b = m^2$, $c - b = n^2$. Řešením této soustavy dostaneme

$$a = mn,\ b = \frac{m^2 - n^2}{2},\ c = \frac{m^2 + n^2}{2},$$

kde m, n jsou lichá nesoudělná čísla (bez újmy na obecnosti předpokládáme $m > n$).

Uvedené vztahy umožňují určit nekonečně mnoho pythagorejských trojic čísel, existuje tedy nekonečně mnoho nepodobných pravoúhlých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran. Pythagorejská čísla mají řadu zajímavých vlastností (viz např. [6], [9], [13]). Uveďme některé z nich.

1. Jedna z „odvěsen“ musí být dělitelná číslem tři.
2. Jedna z „odvěsen“ musí být dělitelná číslem čtyři.
3. Jedno z pythagorejských čísel musí být dělitelné číslem pět.

Naznačíme důkazy těchto tvrzení. Poznamenejme ještě, že každá z uvedených tří vlastností nemusí platit právě pro jednu stranu Pythagorejského trojúhelníka (jako u trojúhelníka o délkách stran 3, 4, 5). Např. u pythagorejského trojúhelníka o stranách 901, 899, 60 jsou všechny tři podmínky splněny současně u odvěsny délky 60.

ISSN 2694-8133

1. Chceme-li dokázat platnost tvrzení 1, lze postupovat bez újmy na obecnosti důkazem platnosti následující implikace:

a není dělitelné třemi $\Rightarrow$ b je dělitelné třemi.

Nechť a není dělitelné třemi, pak je buďto tvaru $a = 3p+1$ nebo $a = 3p+2$.

V prvním případě ze vztahu $a = mn$ plyne, že čísla m, n dávají po dělení třemi týž zbytek. Nechť platí nejprve $m = 3k+1, n = 3t+1$. Čísla m, n jsou podle předpokladu lichá, tedy k, t musí být sudá čísla, $k = 2u, t = 2v$, potom $m = 6u+1, n = 6v+1$. Po dosazení do vztahu pro b dostaneme $b = 18u^2 + 6u - 18v^2 - 6v$, tedy číslo dělitelné třemi. Případ, kdy čísla m, n dávají při dělení třemi zbytek dvě, je analogický.

V případě, kdy $a = 3p+2$, musí čísla m, n při dělení třemi dávat různé nenulové zbytky, např. $m = 3k+1, n = 3t+2$. Pak $k = 2u, t = 2v+1$, tedy $m = 6u+1, n = 6v+5$. Po dosazení do vztahu pro b dostaneme po úpravě opět číslo dělitelné třemi.

2. Obdobně jako v důkazu tvrzení 1 budeme dokazovat implikaci

a není dělitelné čtyřmi $\Rightarrow$ b je dělitelné čtyřmi.

Nechť $a = 4u+1$. Pak ze vztahu $a = mn$ plyne, že čísla m, n lze zapsat ve tvaru $m = 4k+1$, $n = 4t+1$. Zdůvodnění je následující: Obě tato čísla m, n jsou podle předpokladu lichá, tzn. $m = 2p+1, n = 2q+1$, součin je $4pq + 2p + 2q + 1$, což ale musí být rovno číslu $a = 4u + 1$. Čísla p, q musí tedy být sudá, $p = 2k, q = 2t$, po dosazení $m = 4k+1, n = 4t+1$. Po dosazení do vztahu pro odvěsnu b dostaneme po úpravě číslo dělitelné čtyřmi.

Nechť $a=4u+3$. Pak ze vztahu $a = mn$ plyne, že čísla m, n jsou tvaru $m = 4k+1, n = 4t+3$. Zdůvodnění je obdobné jako v předchozím případě. Obě čísla m, n jsou lichá, tzn. $m = 2p+1$, $n = 2q+1$, jejich součin je $4pq + 2p + 2q + 1$, což má být rovno číslu $a = 4u + 3$. Čísla p, q musí tedy být různé parity, $p = 2k, q = 2t+1$, po dosazení $m = 4k+1, n = 4t+3$. Po dosazení do vztahu pro odvěsnu b dostaneme po úpravě číslo dělitelné čtyřmi.

Nechť $a = 4u+2$. Tento případ nemůže nastat, neboť podle předpokladu $a = mn$ musí být číslo a liché číslo (m, n jsou lichá nesoudělná čísla).

3. Nyní naznačíme důkaz tvrzení 3, podle něhož jedno z pythagorejských čísel musí být dělitelné pěti. Postupujeme sporem. Uvažujme množinu $M = \{1,2,3,4\}$. Předpokládejme, že pythagorejská čísla ve trojici jsou tvaru $a = 5k + r$, $b = 5u + s$, $c = 5v + t$, kde $r, s, t \in M$. Po dosazení do rovnice $c^2 = a^2 + b^2$ a úpravě dostaneme

$$25\,(k^2 + u^2 - v^2) + 10\,(rk + su - vt) = t^2 - r^2 - s^2.$$

Na levé straně je číslo dělitelné pěti, na pravé však nikoliv, což je spor. O tom, že číslo $t^2 - r^2 - s^2$ není pro žádnou trojici čísel $r, s, t \in M$ dělitelné pěti, se lze přesvědčit dosazováním (což je zdlouhavé) nebo úpravou na součin $\left(t + \sqrt{r^2 + s^2}\right)\left(t + \sqrt{r^2 - s^2}\right)$. Zde jediný případ, kdy uvedená odmocnina je pro $r, s \in M$ přirozeným číslem, nastane u první z odmocnin pro $r = 4, s = 3$ (nebo naopak), pak ale pro žádné t z množiny M není daný součin dělitelný pěti.

Pythagorejské trojice přirozených čísel a s tím spojené tzv. pravoúhlé pythagorejské trojúhelníky mají i řadu dalších poměrně nečekaných vlastností, jejichž důkazy mohou sloužit studentům jako užitečná cvičení. Na ukázku uvedeme jedno tvrzení včetně důkazu. Předtím je však poznamenejme, že pythagorejský pravoúhlý trojúhelník nikdy nemůže být rovnoramenný (jednalo by se při doplnění na čtverec o nesouměřitelnost strany a úhlopříčky čtverce, což znali již matematikové ve starověkém Řecku). Uvažme ještě zřejmý fakt, že kromě pravého úhlu jsou v pravoúhlém trojúhelníku zbylé dva úhly ostré, mající různou velikost. Jeden z ostrých úhlů je tedy nejmenší. Nyní již můžeme přikročit k avizovanému tvrzení (viz [8]).

„Nechť trojúhelník $A_1B_1C_1$ je pythagorejský s délkami stran a_1, b_1, c_1 (c_1 označuje délku přepony), nechť trojúhelník $A_2B_2C_2$ je rovněž pythagorejský s délkami stran a_2, b_2, c_2 (c_2 zde rovněž označuje délku přepony). Nechť platí $c_2 = c_1^2$ a nechť α_1 označuje nejmenší vnitřní úhel trojúhelníka $A_1B_1C_1$. Potom jedním z ostrých úhlů trojúhelníka $A_2B_2C_2$ je úhel $2\alpha_1$."

Důkaz: V trojúhelníku $A_1B_1C_1$ platí $sin\alpha_1 = \dfrac{a_1}{c_1}, cos\alpha_1 = \dfrac{b_1}{c_1}$. Nechť $A_2B_2C_2$ je takový pravoúhlý trojúhelník, pro jehož přeponu platí $c_2 = c_1^2$ a který obsahuje jako jeden z vnitřních ostrých úhlů úhel velikosti $\alpha_2 = 2\alpha_1$. Dokážeme, že tento trojúhelník musí být pythagorejský. Pro úhel α_2 platí: $\dfrac{a_2}{c_2} = sin\alpha_2 = sin2\alpha_1 = 2sin\alpha_1 cos\alpha_2 = \dfrac{2a_1b_1}{c_1^2} = \dfrac{2a_1b_1}{a_1^2+b_1^2}$, dále analogicky platí $|cos\alpha_2| = \sqrt{1-sin^2\alpha_2} = \sqrt{1-\dfrac{4a_1^2b_1^2}{(a_1^2+b_1^2)^2}} = \sqrt{\dfrac{a_1^4-2a_1^2b_1^2+b_1^4}{(a_1^2+b_1^2)^2}}$. Protože platí $\alpha_1 < \dfrac{\pi}{4}$, $\alpha_2 < \dfrac{\pi}{2}$, $a_1 < b_1$, lze z posledního vztahu psát $\dfrac{b_2}{c_2} = cos\alpha_2 = \dfrac{b_1^2-a_1^2}{a_1^2+b_1^2}$. Vezmeme-li v úvahu získané rovnosti $\dfrac{a_2}{c_2} = \dfrac{2a_1b_1}{a_1^2+b_1^2}$, $\dfrac{b_2}{c_2} = \dfrac{b_1^2-a_1^2}{a_1^2+b_1^2}$, vidíme, že délky stran a_2, b_2, c_2 jsou ve stejných poměrech jako čísla $2a_1b_1$, $b_1^2 - a_1^2$, $b_1^2 + a_1^2$, tedy také trojúhelník $A_2B_2C_2$ musí být pythagorejský.

b) ***Analogické problémy k pythagorejským trojicím***

Analogií k problému hledání pythagorejských trojic přirozených čísel je řešení rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3$$

v množině všech celých čísel (viz [9]). Jedno řešení je známo ze starověku. Podle dochovaných pramenů již Platona zaujal vztah $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, tzn. objem krychle o délce hrany 6 cm je roven součtu objemů tří krychlí o délkách hran 3 cm, 4 cm a 5 cm. Přirozenou otázkou je, zda je toto řešení jediné, či zda existuje analogická situace i pro jiné čtveřice krychlí. Ukážeme, že i zde je řešení nekonečně mnoho. Postup opět pouze naznačíme. Jako výhodné se jeví zavést ve výchozí rovnici substituci $u = -t$; rovnice pak přejde po úpravě do tvaru

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0 \qquad (*).$$

Řešení budeme provádět v množině všech celých čísel. Zde existují i řešení triviální, např. $3, -3, 4, -4$. Protože známe již alespoň dvě řešení, odvodíme, jak s jejich pomocí lze nalézt řešení další. Nechť $[a, b, c, d]$, $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ jsou dvě dvojice řešení rovnice (*). K číslům první čtveřice přičteme k - násobek čísel druhé čtveřice. Číslo k určíme tak, aby nová čtveřice rovněž splňovala rovnici (*). Po úpravě rovnice

$$(a + k\alpha)^3 + (b + k\beta)^3 + (c + k\gamma)^3 + (d + k\delta)^3 = 0$$

dostaneme s využitím toho, že obě čtveřice čísel splňují danou rovnici (*), dvě možné hodnoty čísla k: $k = 0$ (což nedává nic nového) a $k = -\dfrac{a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + d^2\delta}{a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2}$.

Po dosazení dvou řešení (jedno z nich obecně), např. $a = 3, b = 4, c = 5, d = -6, \alpha = r, \beta = -r, \gamma = s, \delta = -s$, dostaneme po úpravě a substituci $u = -t$ obecné řešení rovnice (*) v následujícím tvaru (r, s jsou libovolná celá čísla):

ISSN 2694-8133

$$x = 28\,r^2 + 11\,rs - 3\,s^2,$$
$$y = 21\,r^2 - 11\,rs - 4\,s^2,$$
$$z = 35\,r^2 + 7\,rs + 6\,s^2,$$
$$u = 42\,r^2 + 7\,rs + 5s^2.$$

Je zřejmé, že toto obecné řešení není jediné možné. Dále je zřejmé, že existuje nekonečně mnoho řešení i v množině všech přirozených čísel; např. pro hodnoty $r = s = 1$ získáme řešení $36^3 + 6^3 + 48^3 = 54^3$. Velmi zajímavou (a značně obtížnou úlohou) je pak problém určit hodnoty celočíselných parametrů r, s, kterým odpovídají známá řešení rovnice (*), např. Platónovo řešení $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ nebo další známé řešení $6^3 + 1^3 + 8^3 = 9^3$.

Nyní uvedeme řešení dalšího problému, jehož řešení je však podstatně jednodušší než dvou předešlých. Tím poukážeme na fakt, že obtížnost a složitost řešení problému není závislá na složitosti jeho zadání. Úkolem je nalézt pět po sobě jdoucích celých čísel tak, aby součet čtverců prvních tří byl roven součtu čtverců posledních dvou. K vyřešení stačí zapsat rovnici

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2 + (x + 4)^2.$$

Po úpravě a vyřešení vzniklé kvadratické rovnice dostaneme dvě řešení: $x_1 = 10$, $x_2 = -2$. Existují tedy právě dvě posloupnosti celých čísel s požadovanou vlastností: prvním řešením je *10, 11, 12, 13, 14,* druhé řešení je pak $-2, -1, 0, 1, 2$.

S výše uvedenými problémy úzce souvisí velká Fermatova věta (viz např. [6], [9], [13]). Velká Fermatova věta souvisí s hledáním pythagorejských trojic čísel i s řešením rovnice (*). Pro úplnost připomeňme, že Fermat ve své době předložil tvrzení, že rovnice $x^n + y^n = z^n$ nemá v množině přirozených čísel řešení pro $n > 2$ (n je přirozené číslo). Jeho původní důkaz se však nenašel (sám Fermat ve své kopii Diofantovy knihy píše, že objevil pozoruhodný důkaz, který se však na okraj stránky nevejde). Více než 300 let se matematikové pokoušeli Fermatovu hypotézu dokázat. Teprve v roce 1992 publikoval A. Wiles 108-stránkovou práci, obsahující s největší pravděpodobností důkaz velké Fermatovy věty. Připojme na tomto místě ještě jednu poznámku k Fermatovu problému. Fermat byl matematikem s geniální intuicí. V některých případech však může intuice vést k nesprávným závěrům. Euler se např. domníval, že Fermatovu větu lze zobecnit na tvrzení:

"*Součet méně než n n-tých mocnin přirozených čísel nemůže být pro n ≥ 3 n-tou mocninou*".

V roce 1966 byla však pomocí počítače dokázána rovnost $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$, a později $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$. Pro šesté mocniny platnost či neplatnost Eulerovy domněnky není doposud známa.

c) ***Aditivní problémy teorie čísel***,

Nyní si uvedeme několik tvrzení (podle [5]), týkajících se rozkladu přirozených čísel, resp. prvočísel, na součet kvadrátů. I když jejich důkazy jsou již složitější (proto je buďto vynecháme nebo jen naznačíme), lze přesto danou problematiku do výuky pro studenty zařadit. Nejprve dvě tvrzení o prvočíslech, pocházející od Eulera (viz [5]).

1. Je-li p prvočíslo tvaru $p = 4k + 1$, *pak existují nesoudělná celá čísla a, b taková, že platí* $p = a^2 + b^2$.

2. Nechť a, b jsou celá nesoudělná čísla. Je-li číslo $a^2 + b^2$ *dělitelné prvočíslem p, pak platí* $p = 4k + 1$.

Tvrzení 2 má zajímavý důsledek, který z metodických důvodů uvedeme i s důkazem.

3. Existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $4k + 1$.

ISSN 2694-8133

Důkaz: Postupujeme sporem. Nechť $p_1, ..., p_n$ jsou všechna prvočísla tvaru $4k + 1$. Uvažujme číslo $u = (p_1 \cdot ... \cdot p_n)^2 + 2^2$. Všechna uvažovaná prvočísla jsou podle předpokladu lichá, tedy největší společný dělitel čísel $(p_1 \cdot ... \cdot p_n)$ a 2 je roven 1. Je-li u dělitelné nějakým lichým prvočíslem p (jediným sudým prvočíslem 2 dělitelné být nemůže), pak podle tvrzení 2 platí $p = 4k+ 1$. Kdyby se nyní toto prvočíslo p rovnalo některému z prvočísel $p_1, ..., p_n$, pak by z p/u vyplynulo, že $p/4$, což je spor s tím, že p je liché. Prvočíslo p je tedy tvaru $4k + 1$ a $p \neq p_i$ pro $i = 1, ..., n$.

Nyní uvedeme tvrzení, které dává odpověď na otázku, pro která přirozená čísla n existují na kružnici $x^2 + y^2 = n$ body s celočíselnými souřadnicemi (viz [5]).

4. Přirozené číslo n lze rozložit na součet dvou kvadrátů $x^2 + y^2$, právě když se v kanonickém rozkladu čísla n nevyskytuje prvočíslo ve tvaru 4k + 3 v liché mocnině.

Opět naznačíme důkaz: ($\Rightarrow$) Nechť $x^2 + y^2 = n$. Je-li $NSD(x,y) = 1$, pak podle tvrzení 2 musí číslo n mít pouze prvočíselné dělitele tvaru $4k+1$, tedy tvrzení platí. Nechť tedy $NSD(x,y) = d, d > 1$. Pak $x^2 + y^2 = n = d^2(u^2 + v^2), NSD(u, v) = 1$. Platí tedy $n = n_1d^2$, kde jsme označili $n_1 = u^2 + v^2$. Jestliže nějaké prvočíslo p dělí číslo n_1, pak je podle 2 tvaru $4k + 1$. Pokud tedy číslo $n = n_1d^2$ má prvočíselného dělitele tvaru $p = 4k + 3$, pak p musí být dělitelem čísla d. Protože ale d^2/n, musí být tento dělitel p v sudé mocnině.

Nyní naopak ($\Leftarrow$). Snadno ověříme následující identitu:
$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \mp bd)^2 + (ad \pm bc)^2$, podle níž součin dvou celých čísel, která jsou součty dvou kvadrátů, je opět součtem dvou kvadrátů. Položíme-li $b = 0$, dostaneme $(a^2)(c^2 + d^2) = (ac)^2 + (ad)^2$. Kanonický rozklad čísla n obsahuje prvočísla tvaru $4k+3$ v sudé mocnině, dále mocniny dvou a prvočísla tvaru $4k+1$. Všechna tato čísla lze vyjádřit jako součet dvou kvadrátů, tedy i n má tuto vlastnost. Rozepišme uvedené vyjádření:

$n = (4k+3)^{2r} \cdot 2^s \cdot (4k+1)^t = [(4k+3)^r]^2 \cdot (1^2 + 1^2)^s \cdot (4k+1)^t = [(4k+3)^r]^2 \cdot (1^2 + 1^2)^s \cdot (a^2 + b^2)^t$, kde součet kvadrátů v poslední závorce plyne z tvrzení 1. S využitím výše uvedené identity skutečně obdržíme číslo n jako součet dvou kvadrátů.

V poslední části příspěvku uvedeme bez důkazů dvě tvrzení, která se opět týkají rozkladu na součet kvadrátů.

5. (Euler) Číslo ve tvaru 4k + 1 je prvočíslem, právě když jej lze jednoznačně vyjádřit jako součet kvadrátů dvou nesoudělných čísel. (Jednoznačnost je zde myšlena až na záměnu sčítanců).

6. (Lagrange) Každé přirozené číslo je možno vyjádřit ve tvaru součtu čtyř kvadrátů přirozených čísel nebo nuly.

Důkazy a některé souvislosti s těmito tvrzeními jsou dosti složité (lze je nalézt v [5]), avšak jako témata závěrečných prací jsou přijatelná i pro studenty.

d) ***Některé vybrané problémy teorie čísel***

V této části uvedeme některé slavné problémy teorie čísel. Studenty zcela jistě zaujme fakt, že problémy, formulované velmi jednoduchým způsobem, jsou buďto dodnes úplně nevyřešeny nebo je jejich řešení nesmírně obtížné.

α) *Goldbachova hypotéza*

Goldbachova hypotéza je jeden z nejstarších a nejslavnějších dosud nevyřešených problémů matematiky, který spadá do teorie čísel. V moderní formulaci zní následovně:

Každé přirozené číslo větší než 5 lze vyjádřit jako součet nejvýše tří prvočísel.

Poprvé byla tato hypotéza formulována v korespondenci mezi matematiky Christianem Goldbachem a Leonhardem Eulerem v roce 1742 (viz [4]). V první polovině 18. století napsal akademik Goldbach (1690-1764) z Petrohradu svému příteli Eulerovi, jednomu z největších matematiků všech dob (citováno ze [4]):

„Poslyšte velmi zajímavý úkol. Vezmu libovolné číslo větší než 5, např. 77. Můžeme je vyjádřit jako součet tří prvočísel: 77 = 53 + 17+ 7. Zvolím ještě jiný příklad, číslo 461. Opět platí 461 = 449 + 7 + 5, atd. Jak dokážeme, že to platí pro každé číslo? Libovolná zkouška tento výsledek potvrzuje, jenže život nestačí k tomu, abychom probrali všechna lichá čísla. Potřebujeme obecný důkaz a ne zkoušky.“

Euler na dopis odpověděl, že Goldbachův problém je správný, i odpověď je správná, ale důkaz se mu nepodařilo nalézt. Naopak objevil novou věc, nazvanou od těch dob Eulerův problém:

Každé sudé číslo, počínaje číslem čtyři, můžeme vyjádřit jako součet dvou prvočísel.

Jenže ani tento zákon se mu nepodařilo obecně dokázat a pozdější rozbory ukázaly, že důkaz Eulerova problému je mnohem obtížnější než důkaz Goldbachova problému. Oba tyto problémy vzdorovaly přes dvě stě let úsilí mnohých matematiků.

Teprve roku 1937 se důkaz Goldbachova problému podařil sovětskému matematiku Vinogradovovi, který dokázal, že v přirozené řadě čísel existuje jisté veliké číslo, za nímž všechna ještě větší lichá čísla se dají rozložit na součty tří prvočísel (viz [4]). Po téměř dvaceti letech dokázal Borodzkin, že Vinogradovovo číslo n_0 nepřevyšuje hodnotu $(3^3)^{15} < 10^{7\,000\,000}$. V roce 1989 posléze dokázali Chen a Wang tuto hodnotu snížit na číslo $10^{43\,000}$.

Současně s popsanými teoretickými výsledky probíhalo a nadále probíhá prověřování Goldbachovy hypotézy na počítačích. Zatím poslední verifikaci až do hodnoty 4×10^{14} provedl v roce 1998 Joerg Richstein. Obdobu Eulerova problému se podařilo dokázat pro šest a čtyři prvočísla, na obecný důkaz pro 3 a 2 prvočísla se však dosud čeká.

Po více než 260 letech marných pokusů tak Goldbachova ani Eulerova hypotéza nejsou úplně dokázány a stále není známo, zda platí anebo nikoliv. Většina matematiků se ale přiklání k názoru, že tato tvrzení platí.

β) Prvočíselná dvojčata

je matematický pojem z oblasti teorie čísel (viz [11]). Někdy je užíván název prvočíselné dvojice. Jde o dvojice přirozených čísel (p, $p + 2$) takové, že obě tato čísla jsou prvočísly. Nejmenší prvočíselnou dvojicí je dvojice ($3, 5$), dále pak ($5, 7$), ($11, 13$), ($17, 19$), ($29, 31$), ($41,43$), ($59,61$), … Největší dosud známá prvočíselná dvojčata jsou následující: ($3\,756\,801\,695\,685 \cdot 2^{666\,669} - 1$; $3\,756\,801\,695\,685 \cdot 2^{666\,669} + 1$), obě čísla této dvojice mají (v desítkové soustavě) $200\,700$ cifer. Dnes je známo, že existuje $808\,675\,888\,577\,436$ prvočíselných dvojčat menších než 10^{18}.

Kromě první dvojice ($3, 5$) jsou všechny ostatní prvočíselná dvojčata tvaru ($6n - 1, 6n + 1$) pro n přirozené. Čísla $6n$, $6n + 2$, $6n + 3$ a $6n + 4$ jsou totiž dělitelná dvěma nebo třemi. Ne každá dvojice tohoto tvaru je ale prvočíselným dvojčetem – nejmenší příklad je již pro $n = 4$.

Tento výsledek lze rozšířit na tvrzení, že každá prvočíselná dvojice kromě ($3, 5$) a ($5, 7$) je ve tvaru ($30k - 1, 30k + 1$), ($30k + 11, 30k + 13$) nebo ($30k + 17, 30k + 19$). V ostatních dvojicích čísel je totiž alespoň jedno číslo dělitelné dvěma, třemi nebo pěti. Ve vzorci pro možná prvočíselná dvojčata ($6n - 1, 6n + 1$) může být n pouze ve tvaru $5k$, $5k + 2$ nebo $5k + 3$, nikoli však $5k + 1$ nebo $5k + 4$; čísla $6(5k + 1) - 1 = 30k - 5$ a $6(5k + 4) + 1 = 30k + 25$ jsou totiž dělitelná pěti). Proto ($6n - 1, 6n + 1$) pro $n = 4 = 5 \cdot 0 + 4$ již není prvočíselná dvojice.

Hypotéza prvočíselných dvojic je dosud (září 2019) nedokázané tvrzení z oblasti teorie čísel, podle kterého existuje nekonečně mnoho prvočíselných dvojic. Ačkoli toto tvrzení ještě nebylo dokázáno, předpokládá se, že je pravdivé. Jeho důkaz však podle mnohých matematiků přesahuje současné možnosti matematické teorie (viz [11], [12]).

γ) *Rozklady konečných množin*

V této poslední části ukážeme zajímavou aplikaci rozkladů přirozených čísel na sčítance. Nechť M je libovolná neprázdná množina. Pak systém T neprázdných podmnožin množiny M, splňujících podmínky:

(i) libovolné dvě různé množiny ze systému T jsou disjunktní,
(ii) sjednocení všech množin ze systému T je rovno celé množině M,

se nazývá rozklad na množině M, nebo též rozklad množiny M. Prvky systému T se nazývají třídy rozkladu M.

Nechť M je konečná neprázdná množina. Problémem je určit počet rozkladů této množiny. Řešení tohoto problému uvedeme bez důkazu (viz [3]).

Označme B_n počet všech rozkladů na n-prvkové množině, $n \in \boldsymbol{N}$. Čísla B_n se nazývají Bellova čísla. Pro jejich hodnotu platí rekurentní vztahy (důkaz viz [3]):

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \,, \; B_0 = 1.$$

Uveďme několik prvních hodnot: $B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15, B_5 = 52, B_6 = 203,\ldots$ Je vidět, že s rostoucím n počet rozkladů n-prvkové množiny velmi rychle roste. Uveďme příklad pro $n = 4$.

Víme, že číslo čtyři lze rozložit na nezáporné celočíselné sčítance těmito způsoby:

$$4 = 4+0,\ 4 = 1+3,\ 4 = 2+2,\ 4 = 2+1+1,\ 4 = 1+1+1+1.$$

Z těchto číselných rozkladů lze napsat následující rozklady čtyřprvkové množiny $\{a, b, c, d\}$:

$\{\{a,b,c,d\}\}$

$\{\{a\},\{b,c,d\}\}$, $\{\{b\},\{a,c,d\}\}$, $\{\{c\},\{a,b,d\}\}$, $\{\{d\},\{a,b,c\}\}$,

$\{\{a,b\},\{c,d\}\}$, $\{\{a,c\},\{b,d\}\}$, $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$,

$\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$, $\{\{a\},\{c\},\{b,d\}\}$, $\{\{a\},\{d\},\{b,c\}\}$,

$\{\{b\},\{c\},\{a,d\}\}$, $\{\{b\},\{d\},\{a,c\}\}$, $\{\{c\},\{d\},\{a,b\}\}$,

$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$.

Počet těchto rozkladů je 15, což odpovídá příslušnému Bellovu číslu $B_4 = 15$.

3. Závěr

Jak je z příspěvku patrné, aditivní problémy v teorii čísel jsou velmi snadno formulovatelné, avšak jejich důkazy jsou mnohdy velmi obtížné a vyžadují mnoho složitých úvah, v řadě případů nebyly některé hypotézy dokázány dodnes (např. Goldbachova hypotéza nebo počet prvočíselných dvojčat). Zájemce z řad studentů lze odkázat na řadu titulů odborné literatury. Pro zájemce z řad studentů středních a vysokých škol však zcela určitě nejde o proniknutí do hloubky v dané problematice. Jde o to, abychom poskytli nadaným studentům témata, na kterých mohou prohloubit a doplnit své znalosti z a která mohou posloužit k rozvoji jejich matematického myšlení.

Literatura

[1] Beránek, J. (2004). Vybrané partie teorie čísel ve vyučování matematice. In: *Sborník příspěvků ze XXII. vědeckého kolokvia* (CD-ROM, 4 s.). Vyškov: VVŠ PV.

[2] Beránek, J. (2015). Teorie čísel jako prostředek motivace ve vyučování matematice. In: *9. didaktická konference s mezinárodní účastí, Sborník příspěvků* (s. 30-35). Brno: Masarykova univerzita,

[3] Fuchs, E. (2000). *Diskrétní matematika pro učitele; Teorie množin pro učitele*. (CD-ROM). Brno: Masarykova univerzita.

[4] Wikipedie. *Goldbachova hypotéza*. https://cs.wikipedia.org/wiki/Golbachova _hypotéza.

[5] Halaš, R. (1997). *Teorie čísel*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.

[6] Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

[7] Klee, V, Wagon, S. (1991). *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory.* Washington, D.C.: MAA Press (An Imprint of the American Mathematical Society).

[8] Litomiský, M. (1974). O úhlech pythagorských trojúhelníků. *Rozhledy matematicko-fyzikální (52),* 58-59.

[9] Pereľman, J. I. (1985). *Zajímavá algebra*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury.

[10] Vinogradov, I. M. (1981). *Základy teorie čísel.* Moskva: Nauka.

[11] Wikipedie. *Prvočíselná dvojice*. https://cs.wikipedia.org/wiki/Prvočíselná_dvojice.

[12] Weisstein, E. W. *Twin Prime Conjecture.* https://mathworld.wolfram.com/TwinPrime Conjecture.html.

[13] Znám, Š. (1986). *Teória čísel*. Bratislava: Alfa.