Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics

The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Olomouc 2021

ISSN 2694-8133

Univerzita Palackého v Olomouci
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

ve spolupráci s

Jednotou českých matematiků a fyziků
pobočný spolek Olomouc

Elementary Mathematics Education Journal

ročník 3, číslo 1

2021

Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

in cooperation with

The Union of Czech Mathematicians and Physicists
Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 3, No. 1

2021

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Vydavatel: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika

Adresa a kontakty:
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Informace pro autory:
Časopis uveřejňuje články k aktuálním problémům z teorie elementární matematiky, o inovacích, trendech a výzkumech v primárním a preprimárním matematickém vzdělávání. Jednotlivé články jsou anonymně posuzovány dvěma odborníky v recenzním řízením typu „double-blind peer review“. Další informace a podrobné pokyny pro autory jsou k dispozici na webu: http://emejournal.upol.cz.

Za kvalitu obrázků, jazykovou správnost, dodržení bibliografické normy a dodržování publikační etiky odpovídají autoři jednotlivých článků.

Časopis vychází dvakrát ročně.

Ročník 3, číslo 1

ISSN 2694-8133

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Publisher: Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Address and contacts:
Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic
emej@upol.cz

Information for authors:
The journal publishes articles on current issues in the theory of elementary mathematics, about innovation, trends and research in primary and pre-primary mathematics education. Each article is reviewed by two anonymous experts ("double-blind peer review"). More information and other instructions for authors are available at: http://emejournal.upol.cz.

The authors of the articles are responsible for the quality of the images, language accuracy, compliance with bibliographic standards and adherence to publication ethics.

The journal is published twice a year.

Vol. 3, No. 1

ISSN 2694-8133

Obsah

Content

ADITIVNÍ PROBLÉMY TEORIE ČÍSEL VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

Jaroslav BERÁNEK
Masarykova Univerzita Brno, Pedagogická fakulta (Česká republika)
beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

V příspěvku jsou obsaženy formulace a naznačeno řešení některých jednoduchých aditivních problémů teorie čísel (určení pythagorejských trojic přirozených čísel včetně analogických úloh, rozklad čísel na součet kvadrátů atp.). Uvedeny jsou rovněž zajímavé teoretické problémy, jako např. kombinatorická teorie rozkladů konečných množin, Goldbachova hypotéza a prvočíselná dvojčata. Uvedené problémy mohou být využity při výuce budoucích učitelů matematiky na základní škole jako náměty k rozvíjení zájmu studentů o matematiku, případně k jejich motivaci k dalšímu studiu matematiky.

Klíčová slova: motivace, matematika, teorie čísel, rozklady čísel, Goldbachova hypotéza

ADDITIVE PROBLEMS OF NUMBER THEORY IN TEACHING OF MATHEMATICS

Abstract

In the article there are included examples and indicated solutions of some easy additive problems of number theory (finding Pythagorean triads of natural numbers including analogical examples, partition of numbers into the sum of squares etc.). Among others, there are also given some theoretical problems, like combinatorial theory of finite sets partition, Goldbach´s hypothesis and twin primes. Such problems could be used while teaching future elementary school mathematics teachers as a tool for deepening their interest in mathematics and their further motivation.

Keywords: motivation, mathematics, number theory, decomposition of numbers, Goldbach's hypothesis

1. Úvod

Mezi významné úkoly učitelů matematiky na všech stupních škol patří snaha o neustálé zkvalitňování výuky, odpovídající novým trendům jak v matematice, tak i v didaktice matematiky. Je nutno pravidelně obsah výuky inovovat, dále přinášet talentovaným studentům nové podněty a poskytovat jim vhodná témata k jejich samostatné tvůrčí činnosti v matematice. Výběr takovýchto vhodných témat je ovšem mnohdy problémem; některá témata jsou sice obsahově zajímavá, avšak po matematické stránce nad síly a možnosti studentů, jiná postrádají pro studenty poutavost. Náměty lze nalézt např. v publikacích [1], [2]. V tomto příspěvku je předloženo několik témat z teorie čísel, která mohou být pro studenty zajímavá i po formální matematické stránce přístupná. Pro studenty může jako motivační fakt působit i to, že teorie čísel jako matematická disciplína obsahuje problémy, jejichž pochopení i formulace jsou velmi jednoduché, avšak jejich řešení buďto není známo dodnes nebo je velmi komplikované (mnoho otevřených a po staletí nevyřešených problémů v matematice (viz [7], [10]) lze formulovat i prostředky žáka základní školy, např. velká Fermatova věta, dokonalá čísla, prvočíselná dvojčata apod.). Zaměříme se na tzv. aditivní problémy. Aditivními problémy teorie čísel se rozumějí takové úlohy, v nichž zkoumáme „utváření přirozených čísel ze sčítanců daného typu".

2. Aditivní problémy teorie čísel

a) ***Pythagorejské trojice***

Začneme problémem určování pythagorejských trojic, tzn. hledání trojic přirozených čísel a, b, c splňujících vztah $a^2 + b^2 = c^2$ (otázka existence a počtu pravoúhlých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran). Uvedeme jeden z možných postupů odvození. Pro zkrácení vyjadřování budeme sice didakticky ne zcela přesně, ale výstižně čísla a, b nazývat „odvěsnami" a číslo c „přeponou" (čísla a, b, c vyjadřují délky příslušných stran trojúhelníka). Zřejmě se stačí při odvození omezit na případ, kdy jsou čísla a, b, c nesoudělná.

Nejprve sporem ukážeme, že jedna z „odvěsen" musí být sudá a druhá lichá. Nechť a, b jsou sudá čísla, pak ze vztahu $a^2 + b^2 = c^2$ plyne, že také c je sudé číslo, což je spor s předpokladem nesoudělnosti všech tří čísel. Jedna z odvěsen tedy musí být lichá. Nikoliv však obě dvě, jak opět sporem ukážeme. Nechť $a = 2x+1$, $b = 2y+1$, pak $a^2 + b^2$ je po dosazení a úpravě číslo dávající po dělení čtyřmi zbytek dvě. Víme, že druhá mocnina lichého čísla je číslo liché, druhá mocnina sudého čísla je dělitelná čtyřmi. Číslo $a^2 + b^2$ nemá ani jeden z těchto tvarů, nemůže tedy být druhou mocninou žádného přirozeného čísla; případ obou lichých „odvěsen" tedy nemůže nastat, jedna musí být sudá a druhá lichá. Číslo $a^2 + b^2 = c^2$ je tedy také liché a proto je lichá i „přepona". Nechť tedy bez újmy na obecnosti např. a je liché a b je sudé číslo. Z rovnosti $a^2 + b^2 = c^2$ dostaneme $a^2 = (c - b)(c + b)$, kde oba činitelé na pravé straně jsou nesoudělná čísla. To ukážeme opět sporem. Kdyby čísla v obou závorkách měla společného dělitele většího než jedna, pak by tento dělitel musel dělit jejich součet $2c$, rozdíl $2b$ a součin a^2. Protože a je liché, nemůže být tímto dělitelem číslo 2, proto tento dělitel musí dělit čísla a, b, c, což není možné (čísla a, b, c jsou nesoudělná).

Máme tedy rovnost $a^2 = (c - b)(c + b)$, kde na pravé straně jsou nesoudělná čísla. Pak ale každé z těchto čísel musí být druhou mocninou, $c + b = m^2$, $c - b = n^2$. Řešením této soustavy dostaneme

$$a = mn,\ b = \frac{m^2 - n^2}{2},\ c = \frac{m^2 + n^2}{2},$$

kde m, n jsou lichá nesoudělná čísla (bez újmy na obecnosti předpokládáme $m > n$).

Uvedené vztahy umožňují určit nekonečně mnoho pythagorejských trojic čísel, existuje tedy nekonečně mnoho nepodobných pravoúhlých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran. Pythagorejská čísla mají řadu zajímavých vlastností (viz např. [6], [9], [13]). Uveďme některé z nich.

1. Jedna z „odvěsen" musí být dělitelná číslem tři.
2. Jedna z „odvěsen" musí být dělitelná číslem čtyři.
3. Jedno z pythagorejských čísel musí být dělitelné číslem pět.

Naznačíme důkazy těchto tvrzení. Poznamenejme ještě, že každá z uvedených tří vlastností nemusí platit právě pro jednu stranu Pythagorejského trojúhelníka (jako u trojúhelníka o délkách stran 3, 4, 5). Např. u pythagorejského trojúhelníka o stranách 901, 899, 60 jsou všechny tři podmínky splněny současně u odvěsny délky 60.

1. Chceme-li dokázat platnost tvrzení 1, lze postupovat bez újmy na obecnosti důkazem platnosti následující implikace:

a není dělitelné třemi $\Rightarrow$ b je dělitelné třemi.

Nechť a není dělitelné třemi, pak je buďto tvaru $a = 3p+1$ nebo $a = 3p+2$.

V prvním případě ze vztahu $a = mn$ plyne, že čísla m, n dávají po dělení třemi týž zbytek. Nechť platí nejprve $m = 3k+1, n = 3t+1$. Čísla m, n jsou podle předpokladu lichá, tedy k, t musí být sudá čísla, $k = 2u, t = 2v$, potom $m = 6u+1, n = 6v+1$. Po dosazení do vztahu pro b dostaneme $b = 18u^2 + 6u - 18v^2 - 6v$, tedy číslo dělitelné třemi. Případ, kdy čísla m, n dávají při dělení třemi zbytek dvě, je analogický.

V případě, kdy $a = 3p+2$, musí čísla m, n při dělení třemi dávat různé nenulové zbytky, např. $m = 3k+1, n = 3t+2$. Pak $k = 2u, t = 2v+1$, tedy $m = 6u+1, n = 6v+5$. Po dosazení do vztahu pro b dostaneme po úpravě opět číslo dělitelné třemi.

2. Obdobně jako v důkazu tvrzení 1 budeme dokazovat implikaci

a není dělitelné čtyřmi $\Rightarrow$ b je dělitelné čtyřmi.

Nechť $a = 4u+1$. Pak ze vztahu $a = mn$ plyne, že čísla m, n lze zapsat ve tvaru $m = 4k+1, n = 4t+1$. Zdůvodnění je následující: Obě tato čísla m, n jsou podle předpokladu lichá, tzn. $m = 2p+1, n = 2q+1$, součin je $4pq + 2p + 2q + 1$, což ale musí být rovno číslu $a = 4u + 1$. Čísla p, q musí tedy být sudá, $p = 2k, q = 2t$, po dosazení $m = 4k+1, n = 4t+1$. Po dosazení do vztahu pro odvěsnu b dostaneme po úpravě číslo dělitelné čtyřmi.

Nechť $a=4u+3$. Pak ze vztahu $a = mn$ plyne, že čísla m, n jsou tvaru $m = 4k+1, n = 4t+3$. Zdůvodnění je obdobné jako v předchozím případě. Obě čísla m, n jsou lichá, tzn. $m = 2p+1, n = 2q+1$, jejich součin je $4pq + 2p + 2q + 1$, což má být rovno číslu $a = 4u + 3$. Čísla p, q musí tedy být různé parity, $p = 2k, q = 2t+1$, po dosazení $m = 4k+1, n = 4t+3$. Po dosazení do vztahu pro odvěsnu b dostaneme po úpravě číslo dělitelné čtyřmi.

Nechť $a = 4u+2$. Tento případ nemůže nastat, neboť podle předpokladu $a = mn$ musí být číslo a liché číslo (m, n jsou lichá nesoudělná čísla).

3. Nyní naznačíme důkaz tvrzení 3, podle něhož jedno z pythagorejských čísel musí být dělitelné pěti. Postupujeme sporem. Uvažujme množinu $M = \{1,2,3,4\}$. Předpokládejme, že pythagorejská čísla ve trojici jsou tvaru $a = 5k + r, b = 5u + s, c = 5v + t$, kde $r, s, t \in M$.
Po dosazení do rovnice $c^2 = a^2 + b^2$ a úpravě dostaneme

$$25\,(k^2 + u^2 - v^2) + 10\,(rk + su - vt) = t^2 - r^2 - s^2.$$

Na levé straně je číslo dělitelné pěti, na pravé však nikoliv, což je spor. O tom, že číslo $t^2 - r^2 - s^2$ není pro žádnou trojici čísel $r, s, t \in M$ dělitelné pěti, se lze přesvědčit dosazováním (což je zdlouhavé) nebo úpravou na součin $\left(t + \sqrt{r^2 + s^2}\right)\left(t + \sqrt{r^2 - s^2}\right)$. Zde jediný případ, kdy uvedená odmocnina je pro $r, s \in M$ přirozeným číslem, nastane u první z odmocnin pro $r = 4, s = 3$ (nebo naopak), pak ale pro žádné t z množiny M není daný součin dělitelný pěti.

Pythagorejské trojice přirozených čísel a s tím spojené tzv. pravoúhlé pythagorejské trojúhelníky mají i řadu dalších poměrně nečekaných vlastností, jejichž důkazy mohou sloužit studentům jako užitečná cvičení. Na ukázku uvedeme jedno tvrzení včetně důkazu. Předtím je však poznamenejme, že pythagorejský pravoúhlý trojúhelník nikdy nemůže být rovnoramenný (jednalo by se při doplnění na čtverec o nesouměřitelnost strany a úhlopříčky čtverce, což znali již matematikové ve starověkém Řecku). Uvažme ještě zřejmý fakt, že kromě pravého úhlu jsou v pravoúhlém trojúhelníku zbylé dva úhly ostré, mající různou velikost. Jeden z ostrých úhlů je tedy nejmenší. Nyní již můžeme přikročit k avizovanému tvrzení (viz [8]).

„Nechť trojúhelník $A_1B_1C_1$ je pythagorejský s délkami stran a_1, b_1, c_1 (c_1 označuje délku přepony), nechť trojúhelník $A_2B_2C_2$ je rovněž pythagorejský s délkami stran a_2, b_2, c_2 (c_2 zde rovněž označuje délku přepony). Nechť platí $c_2 = c_1^2$ a nechť α_1 označuje nejmenší vnitřní úhel trojúhelníka $A_1B_1C_1$. Potom jedním z ostrých úhlů trojúhelníka $A_2B_2C_2$ je úhel $2\alpha_1$.“

Důkaz: V trojúhelníku $A_1B_1C_1$ platí $sin\alpha_1 = \frac{a_1}{c_1}, cos\alpha_1 = \frac{b_1}{c_1}$. Nechť $A_2B_2C_2$ je takový pravoúhlý trojúhelník, pro jehož přeponu platí $c_2 = c_1^2$ a který obsahuje jako jeden z vnitřních ostrých úhlů úhel velikosti $\alpha_2 = 2\alpha_1$. Dokážeme, že tento trojúhelník musí být pythagorejský. Pro úhel α_2 platí: $\frac{a_2}{c_2} = sin\alpha_2 = sin2\alpha_1 = 2sin\alpha_1 cos\alpha_2 = \frac{2a_1b_1}{c_1^2} = \frac{2a_1b_1}{a_1^2+b_1^2}$, dále analogicky platí $|cos\alpha_2| = \sqrt{1-sin^2\alpha_2} = \sqrt{1-\frac{4a_1^2b_1^2}{(a_1^2+b_1^2)^2}} = \sqrt{\frac{a_1^4-2a_1^2b_1^2+b_1^4}{(a_1^2+b_1^2)^2}}$. Protože platí $\alpha_1 < \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, $a_1 < b_1$, lze z posledního vztahu psát $\frac{b_2}{c_2} = cos\alpha_2 = \frac{b_1^2-a_1^2}{a_1^2+b_1^2}$. Vezmeme-li v úvahu získané rovnosti $\frac{a_2}{c_2} = \frac{2a_1b_1}{a_1^2+b_1^2}$, $\frac{b_2}{c_2} = \frac{b_1^2-a_1^2}{a_1^2+b_1^2}$, vidíme, že délky stran a_2, b_2, c_2 jsou ve stejných poměrech jako čísla $2a_1b_1$, $b_1^2 - a_1^2$, $b_1^2 + a_1^2$, tedy také trojúhelník $A_2B_2C_2$ musí být pythagorejský.

b) ***Analogické problémy k pythagorejským trojicím***

Analogií k problému hledání pythagorejských trojic přirozených čísel je řešení rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3$$

v množině všech celých čísel (viz [9]). Jedno řešení je známo ze starověku. Podle dochovaných pramenů již Platona zaujal vztah $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, tzn. objem krychle o délce hrany 6 cm je roven součtu objemů tří krychlí o délkách hran 3 cm, 4 cm a 5 cm. Přirozenou otázkou je, zda je toto řešení jediné, či zda existuje analogická situace i pro jiné čtveřice krychlí. Ukážeme, že i zde je řešení nekonečně mnoho. Postup opět pouze naznačíme. Jako výhodné se jeví zavést ve výchozí rovnici substituci $u = -t$; rovnice pak přejde po úpravě do tvaru

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0 \qquad (*).$$

Řešení budeme provádět v množině všech celých čísel. Zde existují i řešení triviální, např. $3, -3, 4, -4$. Protože známe již alespoň dvě řešení, odvodíme, jak s jejich pomocí lze nalézt řešení další. Nechť $[a, b, c, d]$, $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ jsou dvě dvojice řešení rovnice (*). K číslům první čtveřice přičteme k - násobek čísel druhé čtveřice. Číslo k určíme tak, aby nová čtveřice rovněž splňovala rovnici (*). Po úpravě rovnice

$$(a + k\alpha)^3 + (b + k\beta)^3 + (c + k\gamma)^3 + (d + k\delta)^3 = 0$$

dostaneme s využitím toho, že obě čtveřice čísel splňují danou rovnici (*), dvě možné hodnoty čísla k: $k = 0$ (což nedává nic nového) a $k = -\frac{a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + d^2\delta}{a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2}$.

Po dosazení dvou řešení (jedno z nich obecně), např. $a = 3, b = 4, c = 5, d = -6, \alpha = r, \beta = -r, \gamma = s, \delta = -s$, dostaneme po úpravě a substituci $u = -t$ obecné řešení rovnice (*) v následujícím tvaru (r, s jsou libovolná celá čísla):

$$x = 28\,r^2 + 11\,rs - 3\,s^2,$$
$$y = 21\,r^2 - 11\,rs - 4\,s^2,$$
$$z = 35\,r^2 + 7\,rs + 6\,s^2,$$
$$u = 42\,r^2 + 7\,rs + 5s^2.$$

Je zřejmé, že toto obecné řešení není jediné možné. Dále je zřejmé, že existuje nekonečně mnoho řešení i v množině všech přirozených čísel; např. pro hodnoty $r = s = 1$ získáme řešení $36^3 + 6^3 + 48^3 = 54^3$. Velmi zajímavou (a značně obtížnou úlohou) je pak problém určit hodnoty celočíselných parametrů r, s, kterým odpovídají známá řešení rovnice (*), např. Platónovo řešení $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ nebo další známé řešení $6^3 + 1^3 + 8^3 = 9^3$.

Nyní uvedeme řešení dalšího problému, jehož řešení je však podstatně jednodušší než dvou předešlých. Tím poukážeme na fakt, že obtížnost a složitost řešení problému není závislá na složitosti jeho zadání. Úkolem je nalézt pět po sobě jdoucích celých čísel tak, aby součet čtverců prvních tří byl roven součtu čtverců posledních dvou. K vyřešení stačí zapsat rovnici

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2 + (x + 4)^2.$$

Po úpravě a vyřešení vzniklé kvadratické rovnice dostaneme dvě řešení: $x_1 = 10$, $x_2 = -2$. Existují tedy právě dvě posloupnosti celých čísel s požadovanou vlastností: prvním řešením je *10, 11, 12, 13, 14,* druhé řešení je pak $-2, -1, 0, 1, 2$.

S výše uvedenými problémy úzce souvisí velká Fermatova věta (viz např. [6], [9], [13]). Velká Fermatova věta souvisí s hledáním pythagorejských trojic čísel i s řešením rovnice (*). Pro úplnost připomeňme, že Fermat ve své době předložil tvrzení, že rovnice $x^n + y^n = z^n$ nemá v množině přirozených čísel řešení pro $n > 2$ (n je přirozené číslo). Jeho původní důkaz se však nenašel (sám Fermat ve své kopii Diofantovy knihy píše, že objevil pozoruhodný důkaz, který se však na okraj stránky nevejde). Více než 300 let se matematikové pokoušeli Fermatovu hypotézu dokázat. Teprve v roce 1992 publikoval A. Wiles 108-stránkovou práci, obsahující s největší pravděpodobností důkaz velké Fermatovy věty. Připojme na tomto místě ještě jednu poznámku k Fermatovu problému. Fermat byl matematikem s geniální intuicí. V některých případech však může intuice vést k nesprávným závěrům. Euler se např. domníval, že Fermatovu větu lze zobecnit na tvrzení:

"*Součet méně než n n-tých mocnin přirozených čísel nemůže být pro n ≥ 3 n-tou mocninou*".

V roce 1966 byla však pomocí počítače dokázána rovnost $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$, a později $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$. Pro šesté mocniny platnost či neplatnost Eulerovy domněnky není doposud známa.

c) ***Aditivní problémy teorie čísel***,

Nyní si uvedeme několik tvrzení (podle [5]), týkajících se rozkladu přirozených čísel, resp. prvočísel, na součet kvadrátů. I když jejich důkazy jsou již složitější (proto je buďto vynecháme nebo jen naznačíme), lze přesto danou problematiku do výuky pro studenty zařadit. Nejprve dvě tvrzení o prvočíslech, pocházející od Eulera (viz [5]).

1. Je-li p prvočíslo tvaru $p = 4k + 1$, *pak existují nesoudělná celá čísla a, b taková, že platí* $p = a^2 + b^2$.

2. Nechť a, b jsou celá nesoudělná čísla. Je-li číslo $a^2 + b^2$ *dělitelné prvočíslem p, pak platí* $p = 4k + 1$.

Tvrzení 2 má zajímavý důsledek, který z metodických důvodů uvedeme i s důkazem.

3. Existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $4k + 1$.

Důkaz: Postupujeme sporem. Nechť $p_1, \ldots, p_n$ jsou všechna prvočísla tvaru $4k + 1$. Uvažujme číslo $u = (p_1 \cdot \ldots \cdot p_n)^2 + 2^2$. Všechna uvažovaná prvočísla jsou podle předpokladu lichá, tedy největší společný dělitel čísel $(p_1 \cdot \ldots \cdot p_n)$ a 2 je roven 1. Je-li u dělitelné nějakým lichým prvočíslem p (jediným sudým prvočíslem 2 dělitelné být nemůže), pak podle tvrzení 2 platí $p = 4k+ 1$. Kdyby se nyní toto prvočíslo p rovnalo některému z prvočísel $p_1, \ldots, p_n$, pak by z p/u vyplynulo, že $p/4$, což je spor s tím, že p je liché. Prvočíslo p je tedy tvaru $4k + 1$ a $p \neq p_i$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Nyní uvedeme tvrzení, které dává odpověď na otázku, pro která přirozená čísla n existují na kružnici $x^2 + y^2 = n$ body s celočíselnými souřadnicemi (viz [5]).

4. Přirozené číslo n lze rozložit na součet dvou kvadrátů $x^2 + y^2$, právě když se v kanonickém rozkladu čísla n nevyskytuje prvočíslo ve tvaru 4k + 3 v liché mocnině.

Opět naznačíme důkaz: ($\Rightarrow$) Nechť $x^2 + y^2 = n$. Je-li $NSD(x,y) = 1$, pak podle tvrzení 2 musí číslo n mít pouze prvočíselné dělitele tvaru $4k+1$, tedy tvrzení platí. Nechť tedy $NSD(x,y) = d,\ d > 1$. Pak $x^2 + y^2 = n = d^2(u^2 + v^2),\ NSD(u, v) = 1$. Platí tedy $n = n_1 d^2$, kde jsme označili $n_1 = u^2 + v^2$. Jestliže nějaké prvočíslo p dělí číslo n_1, pak je podle 2 tvaru $4k + 1$. Pokud tedy číslo $n = n_1 d^2$ má prvočíselného dělitele tvaru $p = 4k + 3$, pak p musí být dělitelem čísla d. Protože ale d^2/n, musí být tento dělitel p v sudé mocnině.

Nyní naopak ($\Leftarrow$). Snadno ověříme následující identitu:
$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \mp bd)^2 + (ad \pm bc)^2$, podle níž součin dvou celých čísel, která jsou součty dvou kvadrátů, je opět součtem dvou kvadrátů. Položíme-li $b = 0$, dostaneme $(a^2)(c^2 + d^2) = (ac)^2 + (ad)^2$. Kanonický rozklad čísla n obsahuje prvočísla tvaru $4k+3$ v sudé mocnině, dále mocniny dvou a prvočísla tvaru $4k+1$. Všechna tato čísla lze vyjádřit jako součet dvou kvadrátů, tedy i n má tuto vlastnost. Rozepišme uvedené vyjádření:

$n = (4k+3)^{2r} \cdot 2^s \cdot (4k+1)^t = [(4k+3)^r]^2 \cdot (1^2 + 1^2)^s \cdot (4k+1)^t = [(4k+3)^r]^2 \cdot (1^2 + 1^2)^s \cdot (a^2 + b^2)^t,$
kde součet kvadrátů v poslední závorce plyne z tvrzení 1. S využitím výše uvedené identity skutečně obdržíme číslo n jako součet dvou kvadrátů.

V poslední části příspěvku uvedeme bez důkazů dvě tvrzení, která se opět týkají rozkladu na součet kvadrátů.

5. (Euler) Číslo ve tvaru 4k + 1 je prvočíslem, právě když jej lze jednoznačně vyjádřit jako součet kvadrátů dvou nesoudělných čísel. (Jednoznačnost je zde myšlena až na záměnu sčítanců).

6. (Lagrange) Každé přirozené číslo je možno vyjádřit ve tvaru součtu čtyř kvadrátů přirozených čísel nebo nuly.

Důkazy a některé souvislosti s těmito tvrzeními jsou dosti složité (lze je nalézt v [5]), avšak jako témata závěrečných prací jsou přijatelná i pro studenty.

d) ***Některé vybrané problémy teorie čísel***

V této části uvedeme některé slavné problémy teorie čísel. Studenty zcela jistě zaujme fakt, že problémy, formulované velmi jednoduchým způsobem, jsou buďto dodnes úplně nevyřešeny nebo je jejich řešení nesmírně obtížné.

α) *Goldbachova hypotéza*

Goldbachova hypotéza je jeden z nejstarších a nejslavnějších dosud nevyřešených problémů matematiky, který spadá do teorie čísel. V moderní formulaci zní následovně:

Každé přirozené číslo větší než 5 lze vyjádřit jako součet nejvýše tří prvočísel.

ISSN 2694-8133

Poprvé byla tato hypotéza formulována v korespondenci mezi matematiky Christianem Goldbachem a Leonhardem Eulerem v roce 1742 (viz [4]). V první polovině 18. století napsal akademik Goldbach (1690-1764) z Petrohradu svému příteli Eulerovi, jednomu z největších matematiků všech dob (citováno ze [4]):

„Poslyšte velmi zajímavý úkol. Vezmu libovolné číslo větší než 5, např. 77. Můžeme je vyjádřit jako součet tří prvočísel: 77 = 53 + 17+ 7. Zvolím ještě jiný příklad, číslo 461. Opět platí 461 = 449 + 7 + 5, atd. Jak dokážeme, že to platí pro každé číslo? Libovolná zkouška tento výsledek potvrzuje, jenže život nestačí k tomu, abychom probrali všechna lichá čísla. Potřebujeme obecný důkaz a ne zkoušky."

Euler na dopis odpověděl, že Goldbachův problém je správný, i odpověď je správná, ale důkaz se mu nepodařilo nalézt. Naopak objevil novou věc, nazvanou od těch dob Eulerův problém:

Každé sudé číslo, počínaje číslem čtyři, můžeme vyjádřit jako součet dvou prvočísel.

Jenže ani tento zákon se mu nepodařilo obecně dokázat a pozdější rozbory ukázaly, že důkaz Eulerova problému je mnohem obtížnější než důkaz Goldbachova problému. Oba tyto problémy vzdorovaly přes dvě stě let úsilí mnohých matematiků.

Teprve roku 1937 se důkaz Goldbachova problému podařil sovětskému matematiku Vinogradovovi, který dokázal, že v přirozené řadě čísel existuje jisté veliké číslo, za nímž všechna ještě větší lichá čísla se dají rozložit na součty tří prvočísel (viz [4]). Po téměř dvaceti letech dokázal Borodzkin, že Vinogradovovo číslo n_0 nepřevyšuje hodnotu $(3^3)^{15} < 10^{7\,000\,000}$. V roce 1989 posléze dokázali Chen a Wang tuto hodnotu snížit na číslo $10^{43\,000}$.

Současně s popsanými teoretickými výsledky probíhalo a nadále probíhá prověřování Goldbachovy hypotézy na počítačích. Zatím poslední verifikaci až do hodnoty 4×10^{14} provedl v roce 1998 Joerg Richstein. Obdobu Eulerova problému se podařilo dokázat pro šest a čtyři prvočísla, na obecný důkaz pro 3 a 2 prvočísla se však dosud čeká.

Po více než 260 letech marných pokusů tak Goldbachova ani Eulerova hypotéza nejsou úplně dokázány a stále není známo, zda platí anebo nikoliv. Většina matematiků se ale přiklání k názoru, že tato tvrzení platí.

β) Prvočíselná dvojčata

je matematický pojem z oblasti teorie čísel (viz [11]). Někdy je užíván název prvočíselné dvojice. Jde o dvojice přirozených čísel (p, $p + 2$) takové, že obě tato čísla jsou prvočísly. Nejmenší prvočíselnou dvojicí je dvojice (3, 5), dále pak (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41,43), (59,61), … Největší dosud známá prvočíselná dvojčata jsou následující: ($3\,756\,801\,695\,685 \cdot 2^{666\,669} - 1$; $3\,756\,801\,695\,685 \cdot 2^{666\,669} + 1$), obě čísla této dvojice mají (v desítkové soustavě) *200 700* cifer. Dnes je známo, že existuje *808 675 888 577 436* prvočíselných dvojčat menších než 10^{18}.

Kromě první dvojice (3, 5) jsou všechny ostatní prvočíselná dvojčata tvaru ($6n - 1$, $6n + 1$) pro n přirozené. Čísla $6n$, $6n + 2$, $6n + 3$ a $6n + 4$ jsou totiž dělitelná dvěma nebo třemi. Ne každá dvojice tohoto tvaru je ale prvočíselným dvojčetem – nejmenší příklad je již pro $n = 4$.

Tento výsledek lze rozšířit na tvrzení, že každá prvočíselná dvojice kromě (3, 5) a (5, 7) je ve tvaru ($30k - 1$, $30k + 1$), ($30k + 11$, $30k + 13$) nebo ($30k + 17$, $30k + 19$). V ostatních dvojicích čísel je totiž alespoň jedno číslo dělitelné dvěma, třemi nebo pěti. Ve vzorci pro možná prvočíselná dvojčata ($6n - 1$, $6n + 1$) může být n pouze ve tvaru $5k$, $5k + 2$ nebo $5k + 3$, nikoli však $5k + 1$ nebo $5k + 4$; čísla $6(5k + 1) - 1 = 30k - 5$ a $6(5k + 4) + 1 = 30k + 25$ jsou totiž dělitelná pěti). Proto ($6n - 1$, $6n + 1$) pro $n = 4 = 5 \cdot 0 + 4$ již není prvočíselná dvojice.

Hypotéza prvočíselných dvojic je dosud (září 2019) nedokázané tvrzení z oblasti teorie čísel, podle kterého existuje nekonečně mnoho prvočíselných dvojic. Ačkoli toto tvrzení ještě nebylo dokázáno, předpokládá se, že je pravdivé. Jeho důkaz však podle mnohých matematiků přesahuje současné možnosti matematické teorie (viz [11], [12]).

γ) *Rozklady konečných množin*

V této poslední části ukážeme zajímavou aplikaci rozkladů přirozených čísel na sčítance. Nechť M je libovolná neprázdná množina. Pak systém T neprázdných podmnožin množiny M, splňujících podmínky:

(i) libovolné dvě různé množiny ze systému T jsou disjunktní,
(ii) sjednocení všech množin ze systému T je rovno celé množině M,

se nazývá rozklad na množině M, nebo též rozklad množiny M. Prvky systému T se nazývají třídy rozkladu M.

Nechť M je konečná neprázdná množina. Problémem je určit počet rozkladů této množiny. Řešení tohoto problému uvedeme bez důkazu (viz [3]).

Označme B_n počet všech rozkladů na n-prvkové množině, $n \in \boldsymbol{N}$. Čísla B_n se nazývají Bellova čísla. Pro jejich hodnotu platí rekurentní vztahy (důkaz viz [3]):

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \text{ , } B_0 = 1.$$

Uveďme několik prvních hodnot: $B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15, B_5 = 52, B_6 = 203,...$ Je vidět, že s rostoucím n počet rozkladů n-prvkové množiny velmi rychle roste. Uveďme příklad pro $n = 4$.

Víme, že číslo čtyři lze rozložit na nezáporné celočíselné sčítance těmito způsoby:

$$4 = 4+0,\ 4 = 1+3,\ 4 = 2+2,\ 4 = 2+1+1,\ 4 = 1+1+1+1.$$

Z těchto číselných rozkladů lze napsat následující rozklady čtyřprvkové množiny $\{a, b, c, d\}$:

$$\{\{a,b,c,d\}\}$$
$$\{\{a\},\{b,c,d\}\},\ \{\{b\},\{a,c,d\}\},\ \{\{c\},\{a,b,d\}\},\ \{\{d\},\{a,b,c\}\},$$
$$\{\{a,b\},\{c,d\}\},\ \{\{a,c\},\{b,d\}\},\ \{\{a,d\},\{b,c\}\},$$
$$\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\},\ \{\{a\},\{c\},\{b,d\}\},\ \{\{a\},\{d\},\{b,c\}\},$$
$$\{\{b\},\{c\},\{a,d\}\},\ \{\{b\},\{d\},\{a,c\}\},\ \{\{c\},\{d\},\{a,b\}\},$$
$$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}.$$

Počet těchto rozkladů je 15, což odpovídá příslušnému Bellovu číslu $B_4 = 15$.

3. Závěr

Jak je z příspěvku patrné, aditivní problémy v teorii čísel jsou velmi snadno formulovatelné, avšak jejich důkazy jsou mnohdy velmi obtížné a vyžadují mnoho složitých úvah, v řadě případů nebyly některé hypotézy dokázány dodnes (např. Goldbachova hypotéza nebo počet prvočíselných dvojčat). Zájemce z řad studentů lze odkázat na řadu titulů odborné literatury. Pro zájemce z řad studentů středních a vysokých škol však zcela určitě nejde o proniknutí do hloubky v dané problematice. Jde o to, abychom poskytli nadaným studentům témata, na kterých mohou prohloubit a doplnit své znalosti z a která mohou posloužit k rozvoji jejich matematického myšlení.

ISSN 2694-8133

Literatura

[1] Beránek, J. (2004). Vybrané partie teorie čísel ve vyučování matematice. In: *Sborník příspěvků ze XXII. vědeckého kolokvia* (CD-ROM, 4 s.). Vyškov: VVŠ PV.

[2] Beránek, J. (2015). Teorie čísel jako prostředek motivace ve vyučování matematice. In: *9. didaktická konference s mezinárodní účastí, Sborník příspěvků* (s. 30-35). Brno: Masarykova univerzita,

[3] Fuchs, E. (2000). *Diskrétní matematika pro učitele; Teorie množin pro učitele*. (CD-ROM). Brno: Masarykova univerzita.

[4] Wikipedie. *Goldbachova hypotéza*. https://cs.wikipedia.org/wiki/Golbachova _hypotéza.

[5] Halaš, R. (1997). *Teorie čísel*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.

[6] Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

[7] Klee, V, Wagon, S. (1991). *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory.* Washington, D.C.: MAA Press (An Imprint of the American Mathematical Society).

[8] Litomiský, M. (1974). O úhlech pythagorských trojúhelníků. *Rozhledy matematicko-fyzikální (52),* 58-59.

[9] Pereľman, J. I. (1985). *Zajímavá algebra*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury.

[10] Vinogradov, I. M. (1981). *Základy teorie čísel.* Moskva: Nauka.

[11] Wikipedie. *Prvočíselná dvojice*. https://cs.wikipedia.org/wiki/Prvočíselná_dvojice.

[12] Weisstein, E. W. *Twin Prime Conjecture.* https://mathworld.wolfram.com/TwinPrimeConjecture.html.

[13] Znám, Š. (1986). *Teória čísel*. Bratislava: Alfa.

VÝHODY A ÚSKALIA INKORPORÁCIE „NOVÝCH“ DIGITÁLNYCH TECHNOLÓGIÍ DO MATEMATICKEJ EDUKÁCIE

Jana HNATOVÁ,
Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)
jana.hnatova@unipo.sk

Abstrakt

Rýchle tempo technologického pokroku má výrazný a nepopierateľný vplyv na rozvoj spoločnosti vo všetkých jej oblastiach, vrátane vzdelávania. Nové technológie môžu byť v klasickom aj v online vzdelávacom priestore použité v rôznych situáciách ako kognitívno-prieskumné nástroje, ako prostriedok na vyhľadávanie a zhromažďovanie informácií, ako prostriedok na komunikáciu a interakciu medzi učiteľom a študentmi alebo medzi študentmi navzájom. V edukácii sú technológie zároveň nositeľmi výziev ale aj úskalí spojených s ich využitím. V príspevku je načrtnutá základná charakteristika vybraných technológií a aktuálne výskumné problémy riešené v tejto oblasti so zameraním na matematickú edukáciu. Výstupy sú dokumentované SWOT analýzami zaradenia vybraných digitálnych technológií (digitálne hry, rozšírená realita a virtuálna realita) do matematickej edukácie.

Kľúčové slová: digitálne hry, rozšírená realita, virtuálna realita, matematická edukácia

BENEFITS AND DIFFICULTIES OF INCLUDING “NEW” DIGITAL TECHNOLOGIES IN MATHEMATICAL EDUCATION

Abstract

The rapid pace of technological progress has a significant and undeniable impact on the development of society in all its areas, including education. New technologies can be used in various situations in both classical and online educational spaces, as cognitive-research tools, as a means of searching and gathering information, as a means of communication and interaction between teacher and students or between students and each other. In education, technologies are both bearers of challenges and pitfalls associated with their use. The paper outlines the basic characteristics of selected technologies and current research problems solved in this area with a focus on mathematical education. The outputs are documented by SWOT analyzes of the inclusion of selected digital technologies (digital games, augmented reality, and virtual reality) in mathematical education.

Keywords: digital games, augmented reality, virtual reality, mathematical education

1. Úvod

S príchodom reforiem zdôrazňujúcich potrebu transformácie tradičných vyučovacích metód, požadujúcich rozvoj kritického myslenia, spolupráce, angažovaný prístup k riešeniu problémov a v neposlednom rade formovanie informačného vedomia študentov sa viacerí autori zhodujú na potrebe získania solídnych empirických dôkazov o dosahu technológií na vzdelávanie (Deng et al., 2020, Tsai & Tsai, 2020, Mayer, 2015). Z množstva existujúcich a v edukačnej praxi dosiahnuteľných digitálnych technológií sa v príspevku zameriame na tie, ktoré sú v súčasnosti, v rámci laického ale i odborného diskurzu, často označované prívlastkom „nové“. Novosť technológie však nie je, predovšetkým v odbornom diskurze, chápaná len v časovej rovine. Je interpretovaná vo vzťahu k pohlcujúcim a interaktívnym možnostiam, ktoré, v rámci zapojenia 3D efektov, tieto technológie ponúkajú. Výber sme teda fokusovali na analýzu výhod a úskalí, ktoré so sebou prináša včlenenie digitálnych hier, rozšírenej reality a virtuálnej reality do matematickej edukácie, s ohľadom na možné získavanie matematických poznatkov čiastočným alebo úplným ponorením sa do virtuálneho sveta.

2. Digitálne hry

Digitálne hry charakterizujú viacerí autori (Svitavsky, 2017, Rutter & Bryce, 2006) obdobne. Spoločným znakom ich zavedenia je pochopenie digitálnych hier ako komerčných produktov vyvíjaných a distribuovaných etablovanými mediálnymi spoločnosťami, ktoré sú založené na interakcii s užívateľom a majú charakter zábavy, odreagovania alebo vzdelávania. Dumbleton a Kirriemuir (2006) konkretizujú časté dopĺňanie hrovej línie známymi postavami a scenármi z mediálneho prostredia (komiks, kniha, televízia, kino). Svitavsky (2017) v charakteristike hier navyše zmieňuje aj zámer socializácie s ostatnými hráčmi. Tsai Y. a Tsai Ch. (2020) označujú digitálne hry určené pre vzdelávanie pojmom vzdelávacie resp. edukačné hry, nakoľko práve tieto edukačné hry majú, podľa uvedených autorov, tendenciu nenásilnou formou dopĺňať v nich vytvorený herný svet o atribút poznania.

Je faktom, že hra zohráva dôležitú funkciu v kognitívnom vývine a učení sa človeka, pričom motivácia k učeniu je jedným zo zdrojov pozitívnych vzdelávacích výsledkov. Podľa Larkina (2015) je preto možné vzdelávacie hry považovať za prostriedky, ktoré majú významný potenciál pre podporu učenia sa a to aj v matematike. Ich analýza a z nej vyplývajúce zistenia, v kontexte tohto príspevku, vychádzajú z výsledkov troch rôznych metaanalýz (Hays, 2005, Randel et al., 1992, Vogel et al., 2006) a 7 výskumných štúdií (Anghel & Anghel, 2014, Arvanitaki & Zaranis, 2020, Dumbleton & Kirriemuir, 2006, Fesakis et al., 2018, Kyriakides et al., 2016, Litster 2020, Moyer & Packenham, 2019). Z nich extrahujeme zistenia týkajúce sa zapojenia digitálnych hier do matematickej edukácie.

Tabuľka 1. Prehľad zistení z výskumných šetrení zameraných na vplyv edukačných hier začlenených do matematickej edukácie

Oblasť výskumu/štúdie	**Zistenia:**
Edukačná hra - dizajnové prvky matematických hier (napr. virtuálna manipulácia s objektami, funkcionalita dostupná v edukačnej hre)	• aspekty hrateľnosti v technológii, s ktorou edukanti interagujú, ovplyvňujú ich prežívanie a následný výkon mimo hry, • interakcie edukantov s funkciami (napr. nápoveď) môžu zohrávať dôležitú úlohu pri prenose učenia sa mimo hru,
Prenositeľnosť učenia sa z kontextu digitálnych hier na výkon mimo digitálneho prostredia (testy, resp. z herných do skutočných kontextov)	• dobre navrhnutá digitálna hra má vysoký potenciál prenosu učenia do ďalších kontextov, • v rámci personalizovaného prístupu nemá každá digitálna matematická hra rovnaký vplyv na každého edukanta,
Frekvencia hrania	• výsledky vplyvu frekvencie hrania digitálnych hier na sledované výstupy matematickej edukácie sú protichodné,

Rodová závislosť	• prenositeľnosť učenia sa mimo kontext hry v závislosti na rode nie je štatisticky preukázaná (chlapci - mierne lepšie výsledky pri riešení problémových úloh, dievčatá - mierne lepšie výsledky vo výpočtových úlohách), • preferencia typu spätnej väzby a výberu interaktívnych prvkov v matematických hrách sa rodovo líši (chlapci – výber podmienený motiváciou a interaktivitou prvkov, dievčatá - výber podmienený snahou o porozumenie obsahu učiva z matematiky),
Učiteľ	• je významne ovplyvňujúcim faktorom v prípade výberu hry a spôsobu jej použitia vo výučbe,
Žiak - existujúce postoje k matematike	• v rámci kvalitatívnych štúdií bol identifikovaný pozitívny vplyv na angažované správanie sa v hre a vplyv na záujem o včasnú intervenciu,
Žiak - predchádzajúce znalosti z matematiky	• pozitívny vplyv na vnímanie intervencie.

Zistenia, v prípade štúdií zameraných na porovnanie výstupov žiakov po zaradení didaktických hier do výučby matematiky oproti výstupom žiakov vzdelávaných transmisívnymi vyučovacími metódami, poskytujú empirické dôkazy podporujúce gamifikáciu výučby. Edukačné hry, v podobe autorsky vytvorených výskumných nástrojov, boli aplikované do rôznych oblastí matematickej edukácie a rôznych procesných fáz realizácie vzdelávania. Pri vývoji edukačných hier a ich inkorporácii do výučby matematiky bol v štúdiách čitateľný predpoklad rešpektovania potrieb žiakov a s nimi súvisiacich požiadaviek kladených na ich matematické vzdelávanie. Okrajovou otázkou riešenou v uvedených štúdiách však zostáva súbežný psychosociálny vplyv edukačných hier na skúmané cieľové skupiny edukantov, nakoľko pri všetkých hrách (aj tých didaktických) existuje určitá motivácia hrania sýtená pocitom uspokojenia, víťazstva, dosiahnutia cieľa ale aj straty zábran, pocitom vznikajúceho napätia, potreby odvahy až riskovania, a to predovšetkým vtedy, keď je stimul hry prevážený emóciami. Pri interpretácii výsledkov je teda potrebné zvažovať nielen vplyv jednotlivých atribútov, ale aj ich kumulovaný vplyv vzhľadom na existenciu priamych i nepriamych väzieb medzi nimi.

3. Rozšírená realita

Výučba matematiky v rámci formálneho vzdelávania je štandardne viazaná na rôzne typy reálne existujúcich prostredí (školské, domáce, vnútorné, outdoorové atď.). Pridaním obrazových, zvukových a doplňujúcich senzorických podnetov k existujúcemu reálnemu prostrediu môžu technológie toto skutočné prostredie obohatiť vloženou digitálnou informáciou (Dejian et al., 2017). Technológia rozšírenej reality (ang. *augmented reality*, skr. AR) integruje digitálne informácie s fyzickým prostredím naživo a v reálnom čase pomocou rôznych, v súčasnosti už bežne dostupných technických zariadení (napr. pomocou smartfónov alebo tabletov) a k tomu slúžiacich off-line alebo on-line aplikácií. Pri včlenení do edukačnej aktivity poskytuje AR čiastočné ponorenie edukanta do virtuálneho prostredia a to prostredníctvom zobrazenej digitálnej vrstvy s relevantným matematickým obsahom, ktorou sa však nenarúša

ISSN 2694-8133

jeho bežné vnímanie sveta. Týmto sa stáva najprístupnejšou z doteraz existujúcich technológií meniacich realitu. Alsop (2021) na základe prieskumu z roku 2020 medzi americkými odborníkmi z odvetvia XR (spoločné odvetvie pre zmiešanú, rozšírenú a virtuálnu realitu) uvádza, že v priebehu nasledujúcich dvoch rokov budú pohlcujúce technológie ťahúňom všetkých technológií používaných vo vzdelávacom sektore. Podľa Aggarwala (2013) sa môžu aplikácie pracujúce s AR, vďaka možnostiam vkladania multimediálnych objektov do reálneho sveta, stať chrbticou vzdelávacieho priemyslu s odhadovanými 2,5 miliardami stiahnutí aplikácií AR ročne.

Aby bolo možné tento existujúci potenciál pre potreby matematického vzdelávania využiť, je žiadúce podrobnejšie sa venovať skúmaniu empiricky zistených výhod, nevýhod, príležitostí a ohrození, ktoré technológia AR so sebou prináša. Pri štúdiu zdrojového portfólia (31 štúdií z rokov 2002 až 2019) sme v niekoľkých výskumných správach narazili na protichodné vnímanie a posudzovanie konkrétnych skutočností. Kým Deng et al. (2019) konštatujú pozitívny trend vývoja AR a jej inkorporácie do matematického vzdelávania žiakov, včítane žiakov so špecifickými poruchami učenia, Zaman et al.(2013) nevidia zaradenie AR do vzdelávania ako bezproblémové. Upozorňujú predovšetkým na nákladnosť prvotnej investície. Vychádzajúc z existujúceho ťažiskového zamerania AR na interné neformálne vzdelávanie odborného charakteru, autori taktiež zdôvodňujú aktuálne nízky podiel AR v aktivitách zameraných na školy.

Podobná situácia nastáva pri posudzovaní dostupnej kvantity dát v AR. Miundy et al.(2017) vítajú zvyšujúci sa objem informácií vzhľadom na zjednodušený a cielený prístup k nim. Naproti tomu Wu et al. (2012) konštatujú možnú kognitívnu preťaženosť edukantov neúmerným množstvom informácií vytváraných touto technológiou. Otázka „veľkého“, „neúmerného“ alebo „vhodného“ množstva dostupných informácií v nich nie je zodpovedaná a ostáva otvorená ako predmet ďalšieho skúmania.

Výstupom štúdia zdrojového portfólia bola SWOT analýza zaradenia technológie AR do vzdelávania (Hnatová & Hnat 2019). V nej boli identifikované prehľadové štúdie s väzbou na výučbu matematiky, ktoré sme pre potreby tohto príspevku rozšírili o novšie štúdie (Anggraini et al., 2020, Ahmad, 2020, Pellas et al., 2019) so zachovaním pôvodnej metodiky výberu, ktorá spočívala v ich vyhľadávaní s využitím biometrickej databázy Scopus pomocou identických kľúčových slov („augmented reality“, „augmenty reality“, „mixed reality“ v kombinácii s pojmami „mathematics“ a „education“ resp. „mathematics“ a „teaching“ v rozšírenom vyhľadávaní). Zo vzniknutého korpusu 19 výskumných štúdií publikovaných v anglickom jazyku boli následne extrahované nasledujúce zistenia.

Tabuľka 2. SWOT analýza zaradenia technológie AR do matematickej edukácie

Silné stránky (Strengths)
• vytvára interakciu medzi virtuálnym svetom reprezentovaným napr. 3D modelom telesa a reálnym svetom reprezentovaným samotným edukantom bez jeho izolácie od reality, • umožňuje rýchlu vzdialenú podporu (v prípade online pripojenia) a spoluprácu edukantov (v prípade vhodne zvolených metód a foriem výučby), • elementárne použitie je možné aj bez vysokých nárokov na vybavenie, napr. v prostrediach vyvinutých samotnými edukátormi, taktiež v dostupných matematicky zameraných aplikáciách, • uľahčuje porozumenie v podobe vizualizácie informácií, napr. pri odhade a následnom meraní vzdialeností dvoch markermi označených bodov v reálnom priestore, • ponúka adekvátnu spätnú väzbu v reálnom čase, ktorá môže byť realizovaná interakciou medzi virtuálnymi 3D modelmi spustením ich animácie,

• zážitky s AR sú príjemné, ovládanie je intuitívne, nie je potrebné prekonávať ďalšie prekážky spojené s prácou s AR, napr. v podobe časovo náročného zaškolenia alebo inštruktáže, • má pozitívny vplyv na efektivitu a produktivitu práce (zvyšuje motiváciu, znižuje chybovosť, podporuje tvorbu kreatívnych výstupov, rozvíja kritické myslenie).
Slabé stránky (Weaknesses)
• umožňuje kognitívne preťaženie edukantov množstvom informácií tvorených technológiou AR, • vyžaduje prvotnú investíciu z pohľadu hardvérovej a softvérovej podpory realizácie pri začlenení AR do výučby, • vyžaduje vývoj aplikácií AR (návrh – dizajn – programovanie – testovanie – aplikácia), • dovoľuje len obmedzenú správu vzdelávacieho obsahu v AR, • v súčasnosti je nedostatok expertov AR pôsobiacich školách.
Príležitosti (Opportunities)
• je badateľný pozitívny trend vývoja napríklad v podobe nárastu počtu projektov využívajúcich AR technológiu vo vzdelávaní, • je zjavné rozširovanie vzdelávacích príležitostí (napr. rastúca dostupnosť knižných publikácií s edukačným zámerom podporeným AR technológiou), • možnosť prepájania rôznych odvetví a oblastí vzdelávania.
Ohrozenia (Threats)
• existuje nebezpečenstvo zmeny vnímania reality vplyvom zanedbania fyzikálnych vlastností objektov znázornených v AR pomocou ich 3D modelov a taktiež zmien v ich rozdielnych vzájomných interakciách, • môže byť rizikovým faktorom pri výbere vhodnej technológie, • je potrebné počítať s morálnym a technickým opotrebením zariadení podporujúcich AR, • možné odmietnutie AR expertmi/ učiteľmi/ vedením školy, • adaptovanie AR do výučby matematiky vyžaduje čas a ďalšie administratívne úkony (napr. zmeny existujúcich tematických výchovno-vzdelávacích plánov, učebných osnov resp. kurikul).

Bilancia početného zastúpenia faktorov v jednotlivých kvadrantoch realizovanej SWOT analýzy pre matematickú edukáciu nie je vyrovnaná. V prípade porovnania počtu pozitívne pôsobiacich faktorov v silných stránkach a v príležitostiach a negatívnych faktorov zaradených v slabých stránkach a ohrozeniach je však stav vyrovnaný. Pri porovnaní počtov interne a externe orientovaných faktorov zisťujeme prevahu interných nad externými faktormi ($7 + 5 > 3 + 5$). Početne nad ostatnými prevažujú silné stránky zaradenia AR do matematickej edukácie. Tento stav je možné pripísať pozitívnej angažovanosti autorov výskumných štúdií zostaveného portfólia.

V rámci tematickej orientácie zaradenia AR do matematickej edukácie bolo možné v štúdiách identifikovať viaceré oblasti inkorporácie, z nich najčastejšou bola geometria. K ďalším zastúpeným tematickým oblastiam patrili algebra, pravdepodobnosť a štatistika. V matematickej edukácii na primárnom stupni vzdelávania boli preferované tematické oblasti geometria a meranie, vytváranie matematických predstáv o číslach, nácvik základných matematických operácií na množine prirodzených čísel. Samostatnou oblasťou sa javí výskum možností začlenenia AR do výučby skupín žiakov so špecifickými vývinovými poruchami učenia v kombinácii s poruchou matematických schopností – dyskalkúliou.

V rámci technickej realizácie včlenenia AR do výučby bolo v štúdiách skúmané použitie rôznych typov AR technológií (marker based – AR a markerless AR) a vývojových prostredí. K tým najpreferovanejším patrili *Unity 3D* a *HP Reveal*.

Podrobnejší pohľad na uvedenú problematiku, vzhľadom na novosť skúmanej technológie a nárast záujmu o jej začlenenie do výučby matematiky na rôznych stupňoch vzdelávania , bude predpokladaným predmetom (nielen) nášho ďalšieho výskumu.

4. Virtuálna realita

Technológia virtuálnej reality (VR), na rozdiel od predchádzajúcej technológie rozšírenej reality), umožňuje edukantovi úplné ponorenie sa do počítačom generovaného virtuálneho sveta. Táto technológia produkuje realistické trojrozmerné prostredie, v ktorom sa používateľ pohybuje a vníma ho ako skutočné. Steuer (1992) definuje VR ako technológiu vytvárajúcu multisenzorické učebné prostredie, ktoré je veľmi podobné vizuálnym, sluchovým a hmatovým vnemom zo skutočného prostredia. Liu, Liu a Ren (2018) dopĺňajú, že sa taktiež vyznačuje požadovanými vlastnosťami – ponorenie, interakcia a spoluúčasť, vďaka ktorým edukant získava pri vzdelávaní pocit personalizovaného prístupu.

Technológia VR zatiaľ nie je v prostredí našich škôl etablovaná a väčšina vzdelávacích VR aplikácií bola vyvinutá pre neformálne vzdelávanie. Napriek tomu, existujú aj na školách (predovšetkým SOŠ a VŠ) na Slovensku učebne využívajúce VR pri získavaní vysoko špecifických odborných zručností. Pri štúdiu zahraničných zdrojov v podobe metaanalýz (Pellas et al., 2020, Maheshwari & Maheshwari, 2020) zameraných na zaradenie VR do vzdelávania predmetov STEM a metaanalýzy (Oyelere, 2020) zameranej na zaradenie technológie VR do výučby školskej matematiky sumarizujeme štyri dimenzie, na ktoré boli výskumy zamerané:

- *edukant* – jeho názory, správanie sa pri učení, postoje k učeniu a dosahovaná výkonnosť pri učení sa matematiky,
- *edukátor* – vyhodnotenie vzdelávacích programov a kurzov určených pre učiteľov primárneho a nižšieho sekundárneho vzdelávania a taktiež zisťovanie názorov a postojov učiteľov a budúcich učiteľov k implementácii VR do vzdelávania (jej prijatie a používanie),
- *koncept výučby* - výskum efektov výučby a učenia sa založených na použití konkrétnej vyučovacej metódy napr. obojstrannej metódy (umožňuje súbežné použitie virtuálnych simulácií i skutočných predmetov získaných 3D tlačou), metódy riešenia problémov, použitie situačných úloh, gamifikácia výučby s využitím VR,
- *použité prostredie VR* – identifikovanie rozdielov medzi tréningovými a vzdelávacími aplikáciami, výber stratégií návrhu aplikácie VR pre naplnenie rôznych vzdelávacích cieľov, vývoj a testovanie aplikácií.

Implementáciu VR do matematickej edukácie nie je zatiaľ možné považovať za preskúmanú. Z pohľadu primárnej matematiky bola technológia VR experimentálne aplikovaná do tematických oblastí: geometria (identifikácia a skúmanie vlastností konkrétnych 3D modelov telies, propedeutika zhodných zobrazení v priestore), aritmetika (nácvik počtových operácií, automatizácia spojov, počítanie spamäti, propedeutika zlomkov). Z týchto dôvodov prináša SWOT analýza VR (tab. 3) okrem zistení aj námety na ďalšiu diskusiu a výskum.

Tabuľka 3 SWOT analýza zaradenia VR do vzdelávania

Silné stránky (Strenghts)
• poskytuje autentické kontexty, v ktorých používatelia vytvárajú a zdieľajú virtuálne aktíva, • personalizuje učenie - umožňuje kontrolu stimulov, • poskytuje okamžitú spätnú väzbu, • podporuje aktívne učenie, samovzdelávanie,

• pôsobí motivačne, • zodpovedá životnému štýlu generácie Z.
Slabé stránky (Weaknesses)
• existujú viaceré podporované platformy a technické riešenia VR, • vysoké náklady (finančné, časové, personálne), • nízka dostupnosť produktov s matematickým vzdelávacím obsahom, • „wow“ efekt – rozptyľovanie edukanta vo virtuálnom prostredí pre výučbu nepodstatným sekundárnymi stimulmi (detaily virtuálneho priestoru, textúra 3D objektov, pridaná funkcionalita napr. levitácia modelov), • komplexnosť riešenia.
Príležitosti (Opportunities)
• efektívna platforma pre 21. storočie s predpokladom ďalšieho rozvoja, ktorým sa technológia stane lacnejšou a dostupnejšou, • vhodné využitie pre vzdelávanie i výcvik, • možné využitie v rámci formálneho i neformálneho vzdelávania, • možno implementovať viacero metód a foriem práce používané vo výučbe predmetov STEM.
Ohrozenia (Threats)
• udržateľnosť, • „nedostatočný“ zážitok - súčasná technológia neumožňuje používateľom dosiahnuť úplné ponorenie bez rušivej možnosti rozlíšenia reálneho a virtuálneho sveta, • nevhodné začlenenie v ponímaní výučby v tradičnej učebni, • možná kinetóza a ďalšie zdravotné problémy (krátkozrakosť), • neatraktívnosť pre učiteľov / školiteľov / inštruktorov.

Bilancia početného zastúpenia faktorov v jednotlivých kvadrantoch realizovanej SWOT analýzy nie je ani v tomto prípade vyrovnaná. Rozdiely v početnosti medzi sledovanými faktormi sa však pohybujú v rozmedzí intervalu [0,2]. Rovnovážny stav nastáva pri porovnaní počtu pozitívne pôsobiacich faktorov (silné stránky, príležitosti) a negatívnych faktorov (slabé stránky a ohrozenia), pričom početnosť interne orientovaných faktorov je vyššia ako početnosť externe orientovaných faktorov (6 + 5 > 4 + 5). Vzhľadom na nízky počet dostupných štúdií venovaných inkorporácii VR do matematického vzdelávania a rozdielnosť zaradenia jednotlivých výskumných skupín do primárneho, sekundárneho a terciárneho vzdelávania, nie je možné považovať uvedené zistenia za konečné. Prvotne identifikované faktory však naznačujú smer možného ďalšieho a podrobnejšieho skúmania riešenej problematiky.

Je predpokladom, že sa výskum zameraný na technológiu VR bude postupne presúvať z vysokoškolského prostredia na nižšie stupne škôl a školských zariadení. Bude preto potrebné, pri jej implementácii do tohto prostredia, venovať zvýšenú pozornosť obmedzeniam a výzvam spojeným s potrebou hĺbkovej analýzy správania sa detí v simulovanom prostredí, skúmaním ich emocionálnych reakcií na virtuálne podnety, dopadom absencie neverbálnej komunikácie vo virtuálnom prostredí, výskumom informačnej vyťaženosti detí za použitia technológie VR, prevencii pred možnými sociálno-patologickými dôsledkami, ktoré digitálne technológie umožňujúce ponorenie do virtuálneho sveta so sebou prinášajú. Rovnako zaujímavou sa javí oblasť identifikácie špecifických potrieb rôznych skupín žiakov, ako sú napríklad nadaní žiaci, ale taktiež aj žiaci s rôznymi druhmi a stupňami zdravotného a mentálneho postihnutia, žiaci zo sociálne znevýhodneného a výchovne menej podnetného prostredia, ktorí vyžadujú diferencovaný a personalizovaný prístup učiteľa a to z hľadiska obsahu vzdelávania, ako aj použitých metód a organizačných foriem výučby.

5. Záver

Paralelu separovaných prístupov k skúmaniu komplexného problému nachádzame v starom indickom príbehu, ktorý prerozprával John Godfrey Saxe (1873, nám dostupné vydanie z r. 1963). V tomto príbehu šesť slepých mužov, odkázaných na svoj hmat, skúmalo jedno a to isté zviera - slona, ktorého nikdy predtým nemohli vidieť. Každý z nich sa pri svojom skúmaní dotkol inej časti tela zvieraťa. Tak každý z nich mylne predpokladal, že podobne, ako sa mu javí jeho časť slona, javí sa (jemu i všetkým ostatným) celý slon. Vznikol medzi nimi spor, pričom každý z mužov nahlas a vytrvalo bránil pred ostatnými svoj názor. Poučením plynúcim z príbehu nie je fakt, že by sa niektorý z týchto mužov mýlil v tom, čo objavil alebo či a ako svoj objav interpretoval. Chybou je, že každý z nich pri svojom bádaní zotrval len vo svojej komfortnej zóne.

Začlenenie digitálnych technológií umožňujúcich čiastočné alebo úplné ponorenie sa do virtuálneho priestoru v rámci matematickej edukácie možno za takýto komplexný problém považovať. Pri jeho skúmaní by sme preto chceli vychádzať z doterajších zistení identifikujúcich pozitíva i negatíva inkorporácie sumarizované v SWOT analýzach. Vzhľadom na novosť technológií, predovšetkým rozšírenej a virtuálnej reality, je výskum možností ich využitia v školskom prostredí otvorený.

Vzhľadom na súčasný stav (zvýšené náklady, nízka dostupnosť edukačne zameraných aplikácií AR a VR, chýbajúca metodika ich inkorporácie do výučby a nezaškolenosť učiteľov), je pochopiteľné ojedinelé využitie analyzovaných technológií na hodinách matematiky v našich podmienkach. Na druhej strane, z empirických poznatkov v príspevku citovaných zahraničných štúdií vyplýva, že tieto technológie majú vysoký potenciál presadiť sa v školskom prostredí, a to v rámci formálneho i neformálneho vzdelávania, skrz rastúci záujem odbornej i laickej verejnosti o ne.

Acknowledgements

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 036PU-4/2021 *Technológia rozšírenej reality v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov elementaristov* riešeného na PF PU v Prešove.

Literatúra

Aggarwal, V. (2013). *Augmented Reality – introduction and its real word uses.* 3Pillar Global. https://www.3pillarglobal.com/insights/augmented-reality-introduction-and-its-real-world-uses.

Ahmad, N. I., & Junaini, S. N. (2020). Augmented Reality for Learning Mathematics: A Systematic Literature Review. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*. 2020, 15(16), 106-122. https://doi.org/10.3991/ijet.v15i16.14961.

Alsop, T. (2021). *Top XR/AR/VR/MR applications in the education sector as per U.S. XR experts 2020*. Statistica WebSites. https://www.statista.com/statistics/1185078/applications-immersive-technologies-xr-ar-vr-mr-education/.

Anggraini, S., W Setyaningrum, H., Retnawati, A., & Marsigit. (2020). How to improve critical thinking skills and spatial reasoning with augmented reality in mathematics learning? *Journal of physics*. *2020, 1581(1)*, 12-66. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1581/1/012066.

Anghel, G., & Anghel, I. A. (2014). Trends in developing visual educational content in mathematics and physics. *ELearning*, *2014, (3)*, 210-217. https://doi.org/10.12753/2066-026X-14-173.

Arvanitaki, M., & Zaranis N. (2020).The use of ICT in teaching geometry in primary school. *Education and Information Technologies: The Official Journal of the IFIP Technical Committee on Education. 2020, 25(6)*, 5003-5016. https://doi.org/10.1007/s10639-020-10210-7.

Dejian L., Dede, Ch., Huang, R. & Richards J. (2017). *Virtual, Augmented, and Mixed Realities in Education*. *Smart Computing and Inteligence*. Springer Verlag Gmbh.

Deng, L., Wu. S., Chen Y., & Peng, Z. (2020). Digital Game-Based Learning in a Shanghai Primary-School Mathematics Class: A Case Study. *Journal of Computer Assisted Learning*, *36(5)*, 709-717.

Deng, L., Tian J., Cornwell, Ch., Phillips, V., Chen, L., & Alsuwaida A. (2019). Towards an Augmented Reality-Based Mobile Math Learning Game System. In: *HCI International 2019 - Posters. HCII 2019. Communications in Computer and Information Science, vol 1034.* (217-225). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-23525-3_28.

Dumbleton, T., & Kirriemuir, J. (2006). Digital games and education. In *Understanding digital games,* 223-240. SAGE Publications Ltd.

Fesakis, G., Karta, P., & Kozas K. (2018). Designing Math Trails for Enhanced by Mobile Learning Realistic Mathematics Education in Primary Education. *International Journal of Engineering Pedagogy (iJEP), 2018, 8(2)*, 49-63. https://doi.org/10.3991/ijep.v8i2.8131.

Hays, R. T. (2005). *The effectiveness of instructional games: A literature review and discussion. Technical report* 2005–004. Orlando, FL: Naval Air Warfare Center Training Systems Division.

Hnatová, J., & Hnat, A. (2019) SWOT analýza zaradenia technológie rozšírenej reality do vzdelávania In Zacło, Z. & Bernátová, R. (Eds.), *Między teorią pedagogiczną a praktyką edukacyjną*. *Annales Pedagogicae Nova Sandes – Presoves VIII,* 75-83.

Kyriakides, A. O., Meletiou-Mavrotheris M., & Prodromou, T. (2016) Mobile Technologies in the Service of Students' Learning of Mathematics: The Example of Game Application A.L.E.X. in the Context of a Primary School in Cyprus. *Mathematics Education Research Journal. 2016, 28(1)*, 53-78.

Larkin, K. (2015). “An app! An app! My kingdom for an app”: An 18-month quest to determinte whether apps support mathematical knowledge building. In *Digital games and mathematics learning: Potentials, promises and pitfalls, Mathematics education in the digital era*, *Vol. 4*, 251-276.

Liu, R., Liu, Ch., & Ren, Y. A. (2018). Virtual Reality Application for Primary School Mathematics Class. *International Symposium on Educational Technology (ISET),* 138-141. https://doi.org/10.1109/ISET.2018.00038.

Litster, K., Lommatsch Ch. W, Novak J. R., Moyer-Packenham P. S., Jill Harmon M., Roxburgh A. L., & Bullock E. P. (2020). The Role of Gender on the Associations among Children’s Attitudes, Mathematics Knowledge, Digital Game Use, Perceptions of Affordances, and Achievement. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10111-8.

Maheshwari, I., & Maheshwari, P. (2020). Effectiveness of Immersive VR in STEM Education. *Seventh International Conference on Information Technology Trends (ITT)*, *2020*, 7-12. https://doi.org/10.1109/ITT51279.2020.93207.

Mayer, R. E. (2015). On the need for research evidence to guide the design of computer games for learning. *Educational Psychologist, 50(4)*, 349–353.

Moyer-Packenham, P. S., Lommatsch CH. W., Litster K., Ashby J., Bullock E. K., Roxburgh A. L., Shumway J. F., Speed E., Covington B., Hartmann Ch, Clarke-Midura J., Skaria J., Westenskow A., MacDonald B., Symanzik J., & Jordan, K. (2019). How design features in digital math games support learning and mathematics connections. *Computers in Human Behavior*, *91*, 316-332. https://doi.org/10.1016/j.chb.2018.09.036.

Miundy, K., Zaman, H. B., & Nordin, A. (2017). Review on data driven preliminary study pertaining to assistive digital learning technologies to support dyscalculia learners. In: *Lecture Notes in Computer Science.* 10645 LNCS, 233-246.

Saxe, J. G. (1963). The Blind Men and the Elephant. https://www.goodreads.com/book/show/13598237-the-blind-men-and-the-elephant.

Steuer, J. (1992). Defining virtual reality: Dimensions determining telepresence. *Journal of Communication*, *42 (4)*, 73-93. https://doi-org.ezproxy.is.cuni.cz/10.1111/j.1460-2466.1992.tb00812.x

Svitavsky, W. L. (2017). Examining the evolution of gaming and its impact on social, cultural, and political perspectives. *CHOICE: Current Reviews for Academic Libraries*, *54(6)*, 847-847.

Oyelere, S. S., Bouali, N., Kaliisa, R., Obaido, G., Yunusa A. A., & Jimoh, E. R. (2020). Exploring the trends of educational virtual reality games: a systematic review of empirical studies. *Smart Learning Environments*, *7(1)*. https://doi.org/10.1186/s40561-020-00142-7.

Pellas, N., Dengel, A., & Christopoulos, A. (2020) A Scoping Review of Immersive Virtual Reality in STEM Education. *IEEE transactions on learning technologies*. *2020, 13(4)*, 748-761. https://doi.org/10.1109/TLT.2020.3019405.

Pellas, N., Fotaris, P., Kazanidis, I. & Wells, D. (2019). Augmenting the learning experience in primary and secondary school education: a systematic review of recent trends in augmented reality game-based learning. *Virtual Reality 23*, 329-346. https://doi.org/10.1007/s10055-018-0347-2.

Randel, J. M., Morris, B. A., Wetzel, C. D., & Whitehill, B. V. (1992). The effectiveness of games for educational purposes: A review of recent research. *Simulation and Gaming*, *23(3)*, 261-276.

Tsai, Y., & Tsai, Ch. (2020). A meta-analysis of research on digital game-based science learning. *Journal of Computer Assisted Learning*, *36(3)*, 280-294. https://doi.org/10.1111/jcal.12430.

Vogel, J. F., Vogel, D. S., Cannon-Bowers, J., Bowers, C. A., Muse, K., & Wright, M. (2006). Computer gaming and interactive simulations for learning: A meta-analysis. *Journal of Educational Computing Research*, *34(3)*, 229-243. https://doi.org/10.2190/FLHV-K4WA-WPVQ-H0YM.

Wu, H. K., Wen-Yu Lee, S., Chang, H. Y., & Liang J. C. (2012). Current status, opportunities and challenges of augmented reality in education. In: *Computers & Education*, *62(01)*, 41-49.

Zaman, H. B., Periasamy, E., Ahmad, A., Sulaiman, R., Ang, Ch. M., & Nayan, M. N. (2013). Evaluation of Augmented Reality Remedial Worksheet Based on AVCTP Algorithm for Negative Numbers (AR^2WN^2). *Lecture Notes in Computer Science* 8237 LNCS, 581-594.

JE TÉMA STREDOVEJ SÚMERNOSTI NÁROČNÁ PRE ŽIAKOV PRIMÁRNEHO VZDELÁVANIA?

Jakub LIPTÁK, Iveta SCHOLTZOVÁ
Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)
jakub.liptak@smail.unipo.sk, iveta.scholtzova@unipo.sk

Abstrakt

Stredová súmernosť je na Slovensku v obsahu matematickej edukácie zaradená až v 5. ročníku základnej školy. V príspevku sú prezentované výsledky realizovaného výskumu so žiakmi 4. ročníka základnej školy, ktorí riešili úlohy s tematikou stredovej súmernosti na propedeutickej úrovni. Vychádzajúc zo zamerania výskumu, pre osvojovanie si poznatkov o stredovej súmernosti boli použité pohybové aktivity. Takéto využívanie pohybových aktivít, zameraných na osvojovanie si matematického obsahu žiakmi poukazuje na možnosť čiastočného prepojenia telesnej a športovej výchovy a matematickej edukácie. V príspevku sú prezentované realizované pohybové aktivity a tiež metódy použité pre získanie a spracovanie výskumných údajov.

Kľúčové slová: stredová súmernosť, interdisciplinarita, telesná a športová výchova

IS POINT REFLECTION VERY COMPLICATED TOPIC FOR PRIMARY SCHOOL PUPILS?

Abstract

Point reflection is a math topic that pupils in Slovakia are not getting acquainted with until the 5th grade. The paper presents outcomes of the conducted research, where selected pupils of 4th grade took place within. In the research, the pupils' action was concerned with solving point reflection problems. According to our research's nature, physical activities were used in the mater of point reflection's knowledge attainment. Utilizing such physical activities focused on math knowledge attainment highlights the possibility of Mathematics and Physical Education integration. Our paper describes both specific physical activities and inquiry methods used to obtain and elaborate on the research data.

Keywords: point reflection, interdisciplinary, physical education

1. Úvod

K zefektívňovaniu edukácie na školách môže dochádzať rozličnými spôsobmi. Každá zmena aktuálneho fungovania školskej edukácie by však mala byť podložená relevantnými podkladmi, a to v zmysle vedeckých poznatkov. Výskumy v edukačnej oblasti sú zvyčajne zamerané na to, ako sú žiakom objasňované vedecké poznatky, aké predstavy o obsahu vyučovania si vytvárajú žiaci, alebo na to, ako je štruktúrované učebné prostredie (Jelemenská, Sander, Kattman, 2003). Tak, ako je každý z týchto troch smerov výskumu jedinečný, navzájom sú prepojené a na sebe závislé.

Tento príspevok si kladie za cieľ prezentovať časť výskumu, realizovaného v rámci dizertačnej práce, v rámci ktorej boli skúmané možnosti vyučovania matematického obsahu počas nematematických hodín na primárnom stupni vzdelávania. Ako konkrétny nematematický predmet bola použitá telesná a športová výchova (ďalej TaŠV), ktorá má jedinečné postavenie spomedzi školských vyučovacích predmetov. Spomenutá jedinečnosť vyplýva práve z prostriedkov, ktorými sú v rámci hodín TaŠV dosahované edukačné ciele. Týmito prostriedkami sú telesné cvičenia, o ktorých možno uvažovať ako o konkrétnych činnostiach. V zmysle Brunerovej klasifikácie reprezentácii (Bruner, 1966) tak možno o týchto prostriedkoch hovoriť ako o enaktívnych reprezentáciách matematických konceptov. K tomu, aby mohli konkrétne edukačné činnosti v podobe telesných cvičení slúžiť k vytváraniu matematicky podnetného prostredia, mali by zhmotňovať konkrétne matematické koncepty. Za kľúčový aspekt preto možno považovať štrukturáciu matematických poznatkov do takej podoby v rámci TaŠV, aby ich mohli žiaci zužitkovať v zmysle osvojovania alebo precvičovania konkrétneho matematického učiva.

2. Metodologický rámec

Vlastný dizertačný výskum bol realizovaný v zmysle tzv. *design-based research* metodológie, ktorej jednou z hlavných myšlienok je prepájanie teórie s edukačnou praxou (Bakker, Eerde, 2015). Tento druh kvalitatívne orientovaného metodologického rámca pozostáva z niekoľkých krokov a ich iterácií, pričom hovoríme o:

1. vytváraní dizajnu,
2. jeho praktickej realizácii v podobe edukačnej intervencie,
3. následnej analýze intervencie,

ktorá vyúsťuje do formovania novej teórie. Samotná analýza intervencie však taktiež slúži k prípadnej úprave pôvodného dizajnu. V prípade, že došlo k jeho úprave, vyžaduje sa jeho ďalšie overovanie v podobe edukačnej intervencie. Kvalita konkrétneho *design-based research* je v samotnom závere posudzovaná na základe jeho inovatívnosti a možnosti transferu zistení do rozličných, avšak príbuzných kontextov (Plomp, 2013).

V našom prípade je vytváranie dizajnu závislé najmä od samotného matematického obsahu a telesných cvičení, pričom v oboch prípadoch je potrebné vychádzať z doterajších žiackych kognitívnych znalostí a ich telesno-motorických schopností.

3. Zhodné zobrazenia v učive primárneho matematického vzdelávania

Obsah primárneho matematického vzdelávania na Slovensku možno rozdeliť, vychádzajúc pritom zo *Vzdelávacieho štandardu pre predmet matematika – primárne vzdelávanie* (2015), na tri oblasti, ktorými sú:

1. Čísla a aritmetické operácie,
2. Geometria a meranie,
3. Riešenie aplikačných úloh a úloh rozvíjajúcich špecifické matematické myslenie.

V rámci oblasti Geometria a meranie sa žiaci okrem iného oboznamujú s podobnými útvarmi a s niektorými zhodnými zobrazeniami, konkrétne s osovou súmernosťou a posunutím. Žiaci pritom pracujú so všetkými týmito obsahmi len na propedeutickej úrovni. Typickou činnosťou je dokresľovanie resp. dorysovávanie posunutého alebo osovo súmerného obrázka v štvorcovej sieti. Prítomnosť štvorcovej siete zohráva dôležitú rolu, pretože téma kolmosti nie je súčasťou matematického obsahu na primárnom stupni vzdelávania. Žiaci primárneho vzdelávania by preto pravdepodobne neboli schopní rysovať osovo súmerné rovinné útvary bez štvorcovej siete.

Kolmosť možno považovať za elementárny matematický koncept, bez ktorého nie je možné hlbšie rozvíjať znalosti žiakov o osovej súmernosti. Na druhej strane, v priebehu povinného matematického vzdelávania sa žiaci 5. ročníka oboznamujú so stredovou súmernosťou, v rámci ktorej sa od nich nevyžaduje práca s kolmosťou. Napriek tomu je téma stredovej súmernosti zaradená až na nižšom strednom stupni vzdelávania, konkrétne v obsahu pre 5. ročník základnej školy, kde je zaradená spolu s osovou súmernosťou pod tematickú oblasť súmernosť v rovine. Prečo však nie je stredová súmernosť (hoci na propedeutickej úrovni) zaradená do obsahu primárneho matematického vzdelávania?

Ako osová, tak aj stredová súmernosť predstavuje v rámci školskej matematiky špeciálny typ súmernosti podľa podpriestoru L v dvojrozmernom priestore E_2. V prípade osovej súmernosti je podpriestorom L priamka, v prípade stredovej súmernosti je podpriestorom L bod priestoru E_2. Vychádzajúc z Dupláka (2005), súmernosťou podľa podpriestoru L rozumieme také zobrazenie σ_L bodov roviny, že kolmý priemet ľubovoľného bodu X do podpriestoru L predstavuje stred dvojice bodov X a X', pričom $\sigma_L(X) = X'$. Pretože kolmosť je relácia, o ktorej má zmysel uvažovať v prípade n-rozmerných objektov, kde $n \geq 1$, nie je potrebné, aby sa ňou žiaci zaoberali v prípade stredovej súmernosti.

Zamerajme sa ďalej na to, aké požiadavky sú kladené na žiaka v prípade zostrojovania obrazov bodov v stredovej súmernosti, ak je daný bod a stred súmernosti. Zostrojovanie obrazu bodu X v stredovej súmernosti so stredom S v dvojrozmernom priestore E_2 vyžaduje:

1. zostrojenie priamky p prechádzajúcej bodmi X a S,
2. zostrojenie bodu X' (obraz bodu X), k čomu môže byť využité napríklad:
    - zostrojenie kružnice so stredom S a polomerom $r = |SX|$,
    - odmeranie dĺžky úsečky XS a zostrojenie bodu X' na priamke p tak, že úsečka XS je zhodná s úsečkou $X'S$, pričom $X' \neq X$ (neuvažujúc samodružný bod S).

Porovnajúc tieto požiadavky s konkrétnymi výkonovými štandardmi pre primárne matematické vzdelávania na Slovensku (pozri tab. 1) sa preto nazdávame, že zostrojovanie obrazov bodov dvojrozmerného priestoru E_2 v stredovej súmernosti podľa stredu S zodpovedá schopnostiam a zručnostiam žiakov primárneho stupňa vzdelávania.

Tabuľka 1. Výňatok zo vzdelávacieho štandardu pre primárne matematické vzdelávanie

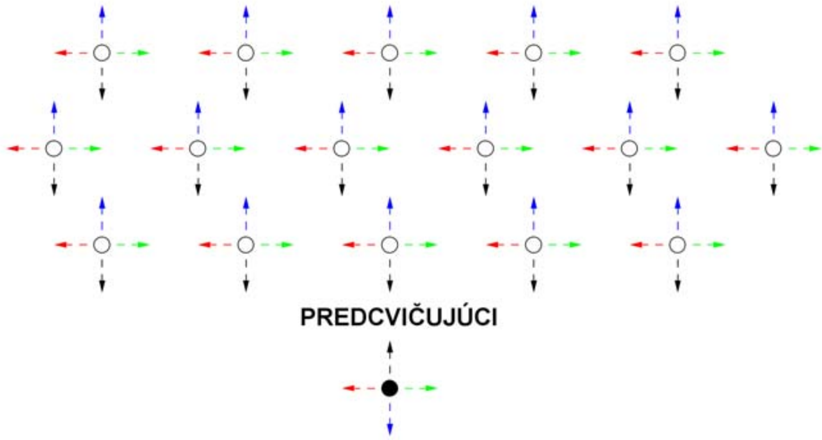
Ročník	**Výkonový štandard**
2. ročník	- vyznačiť bod a pomenovať ho, - narysovať, označiť a pomenovať priamku, polpriamku, úsečku, - vyznačiť bod, ktorý danému útvaru patrí, resp. nepatrí, - narysovať úsečku, ak sú dané dva krajné body, - identifikovať strany a vrcholy rovinných geometrických útvarov.
3. ročník	- narysovať, odmerať dĺžku úsečky s presnosťou na milimetre.
4. ročník	- určiť, vyznačiť a pomenovať v kružnici stred, polomer, priemer, - narysovať kružnicu pomocou kružidla.

V prípade, že by sme sa obmedzili na využívanie pravítka, s témou stredovej súmernosti by mohlo byť možné pracovať od 3. ročníka základnej školy, vychádzajúc pritom zo súčasného *Vzdelávacieho štandardu pre predmet matematika – primárne vzdelávanie* (2015).

Ako sme už naznačili v úvode, okrem tejto teoretickej analýzy využívame na podloženie nášho tvrdenia o potenciály žiakov primárneho stupňa vzdelávania zvládnuť fragmenty témy stredovej súmernosti vlastné zistenia z výskumu v rámci dizertačnej práce.

4. Edukačná intervencia v rámci vyučovacej hodiny TaŠV

V tejto podkapitole predstavíme pohybové aktivity, ktoré boli realizované v rámci vyučovacej hodiny telesnej a športovej výchovy so žiakmi 4. ročníka miestnej základnej školy. Celkovo sme realizovali dve obsahovo identické edukačné jednotky, pričom každej jednotky sa zúčastnilo 20 žiakov (celkovo 40 žiakov). Pri navrhovaní konkrétnych pohybových aktivít resp. telesných cvičení sme vychádzali z bežných činností, ktoré sa vyskytujú v rámci vyučovania TaŠV. Za primárnu inšpiráciu nám slúžilo priestorové rozostavenie žiakov a celkový proces tzv. statického rozcvičovania sa žiakov, ktoré sa realizuje v rámci prípravnej časti vyučovacej hodiny TaŠV (pozri obr. 1). Kružnice reprezentujú rozostavených žiakov, kruh reprezentuje učiteľa, resp. žiaka povereného predcvičovaním. Šípky zhodnej farby poukazujú na závislosť pohybu žiakov od pohybu predcvičujúceho.

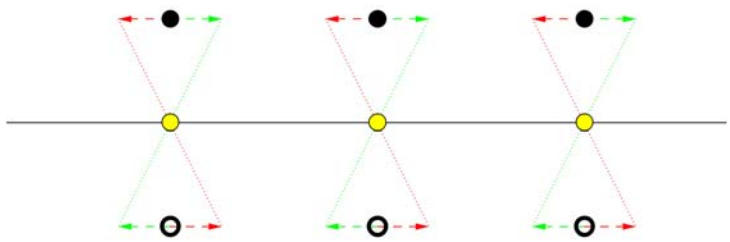


Obrázok 1. Rozostavenie a pohyb počas rozcvičovania

V určitom zmysle tu možno hovoriť o akejsi propedeutike osovej súmernosti, resp. v reálnej situácii v rámci vyučovacej hodiny TaŠV to možno asociovať s rovinnou súmernosťou. V rámci nášho dizertačného výskumu sme sa však pokúsili dostať ešte o niečo ďalej, a to k téme stredovej súmernosti. S týmto zámerom sme navrhli dve pohybové aktivity, ktorých cieľom bolo vytváranie žiackych predstáv o stredovej súmernosti. Samozrejme, tieto aktivity by boli len jednou časťou edukačného pôsobenia, zameraného na osvojovanie si stredovej súmernosti. Ich úlohou by bolo to, aby žiaci získali konkrétne skúsenosti (paralela s enaktívnymi reprezentáciami), na základe ktorých by bolo možné pracovať so stredovou súmernosťou v rámci vyučovacích hodín matematiky (paralela s ikonickou reprezentáciou).

4.1. Použité aktivity

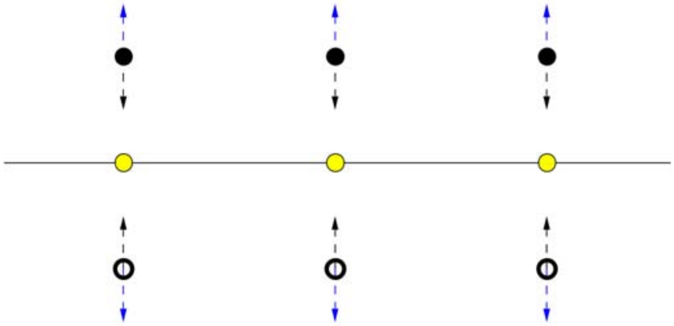
S úmyslom postupného gradovania ako pohybovej tak aj kognitívnej náročnosti sme prvú aktivitu rozčlenili do troch fáz. V rámci všetkých troch fáz boli žiaci rozdelení do dvojíc stojacich čelom k sebe, pričom v strede medzi jednotlivými dvojicami bola umiestnená tenisová loptička (pozri obr. 2).



Obrázok 2. Prvá fáza prvej aktivity

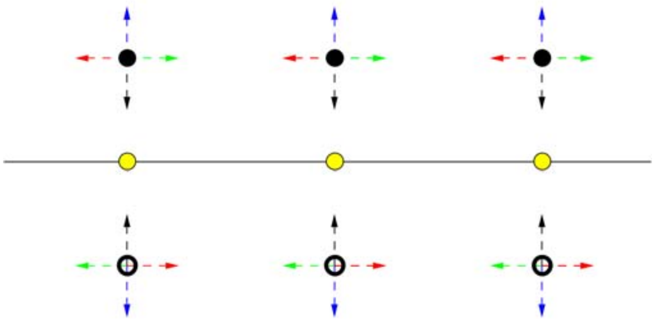
Na obrázku vyššie je stále prvý z dvojice vyznačený čiernym kruhom, druhý žiak z dvojice je vyznačený „prázdnym kruhom“ resp. čiernou kružnicou a tenisové loptičky majú podobu žltých kruhov v strede medzi nimi. Znázornená čiara slúžila len pre zjednodušenie organizácie žiakov. Podstata aktivity spočíva v tom, že druhý žiak z dvojice vykonáva znožný skok doprava alebo doľava podľa toho, či prvý žiak z dvojice skočil doprava alebo doľava. Inštrukcia pre žiakov je teda nasledovná: *Prvý z dvojice môže znožmo skočiť doprava alebo doľava. Druhý z dvojice musí skočiť do tej strany, aby sa loptička nachádzala v strede medzi vami.*

Druhá fáza prvej aktivity je analógiou k prvej fáze, avšak v tomto prípade majú žiaci na výber skok dopredu alebo skok dozadu (pozri obr. 3). Rovnako ako v predošlej fáze, po skoku prvého a druhého žiaka malo platiť, aby obaja žiaci a loptička tvorili pomyselnú kolineárnu trojicu, pričom loptička sa mala nachádzať v rovnakej vzdialenosti od oboch žiakov.



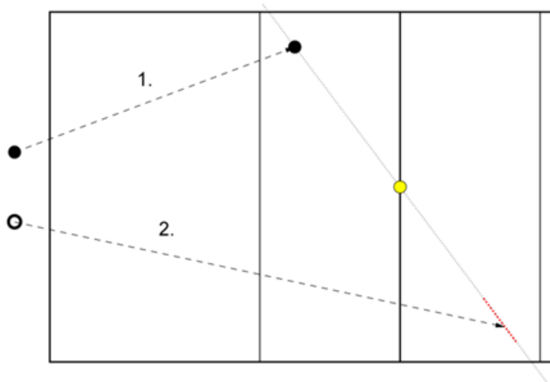
Obrázok 3. Druhá fáza prvej aktivity

Poslednou fázou prvej aktivity bolo spojenie prvej a druhej fázy do jedného celku. Prvý žiak mal teda na výber zo štyroch rôznych smerov, ktorými mohol vykonať skok (pozri obr. 4). Z organizačno-bezpečnostných dôvodov bolo prvotne žiakom dovolené skočiť len jeden skok do strany, pričom následne mali skočiť na svoje pôvodné miesto. Neskôr bolo žiakom dovolené vykonávať aj viac skokov jedným smerom, pričom sme dohliadali na to, aby medzi žiakmi nedochádzalo ku vzájomným kolíziám.



Obrázok 4. Tretia fáza prvej aktivity

Druhá aktivita bola podobná prvej aktivite v tom, že v nej žiaci opäť prispôsobovali svoje postavenie v priestore v závislosti od žiakov, s ktorými tvorili dvojice. Žiaci boli rozdelení do dvojíc, pričom jednotlivé dvojice boli nastúpené v dvoch zástupoch tak, že žiaci z jednej dvojice stáli vedľa seba. V strede ihriska bola umiestnená tenisová loptička, ktorá reprezentovala stred súmernosti. Úlohou prvého žiaka z dvojice bolo na znamenia vybehnúť a zaujať ľubovoľné postavenie v priestore (čierny kruh na obr. 5). Ak prvý žiak stál na vybranom mieste, dal znamenie druhému žiakovi z dvojice, ktorého úlohou bolo zaujať také postavenie v priestore, aby bola loptička medzi ním a prvým žiakom (kolineárna trojica) a aby bola vzdialenosť od loptičky k obom žiakom rovnaká. Keďže išlo o reálnu situáciu, v ktorej nebolo použité presné meranie, správne postavenie druhého žiaka z dvojice bolo hodnotené odhadom. V niektorých prípadoch bola pre druhého žiaka z dvojice úloha zľahčená, konkrétne vtedy, ak sa prvý z dvojice postavil na niektorú z čiar ihriska.



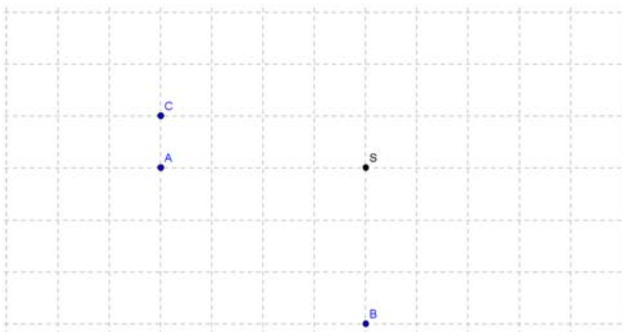
Obrázok 5. Schéma druhej aktivity

Aktivity boli realizované tak, aby sa všetci žiaci vystriedali v role prvého aj druhého žiaka v rámci dvojice.

5. Analýza a reflexia

Realizovateľnosť aktivít sme si overili priamo počas vykonanej edukačnej intervencie. Otázkou však zostávalo to, či sú predložené aktivity efektívne v zmysle nadobúdania takých skúseností žiakmi, ktoré by bolo možné následne transformovať do znalostí žiakov, spojených so stredovou súmernosťou. K zodpovedaniu tejto otázky sme sa rozhodli predložiť žiakom úlohy, ktoré boli spojené ako s realizovanými aktivitami, tak aj stredovou súmernosťou. Náhodne tak bolo z celého súboru vybraných 11 žiakov (5 žiakov z triedy A, 6 žiakov z triedy B), ktorým boli počas individuálneho interview, realizovaného bezprostredne po realizácii aktivít, predložené nasledovné dve úlohy:

1. *Predstav si, že body $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ sú prví z dvojíc a bod $\boldsymbol{S}$ je loptička. Vyznač, kde sa majú postaviť ich dvojice.*



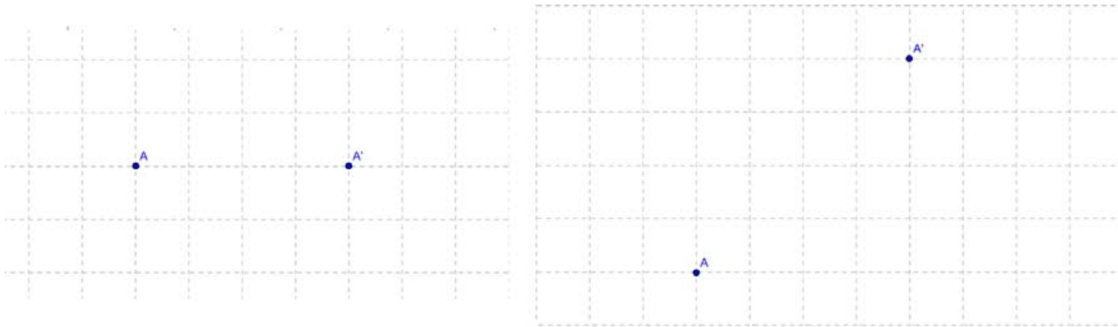
Obrázok 6. Vyznačovanie obrazov bodov v stredovej súmernosti

Táto úloha bola predložená piatim žiakom z triedy A, pričom všetci z nich dokázali správne vyznačiť miesta, kde by sa mali postaviť dvojice žiakov $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ (teda obrazy bodov v stredovej súmernosti so stredom $\boldsymbol{S}$). Následne nás zaujímalo, do akej miery zohráva v úspešnosti žiakov riešiť túto úlohu prítomnosť štvorcovej siete. Preto sme šiestim žiakom z triedy B predložili identickú úlohu, avšak bez štvorcovej siete. Nakoľko žiakom nebolo poskytnuté pravítko, ich riešenia bolo možné označiť len za približne správne alebo nesprávne. Výsledky ukázali, že všetci šiesti žiaci dokázali približne správne vyznačiť prislúchajúce dvojice bodov $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$.

Okrem tejto úlohy bola všetkým jedenástim žiakom predložená analogická úloha so štvorcovou sieťou, avšak s iným umiestnením bodov $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$. Ukázalo sa, že poloha bodov

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ vzhľadom k bodu $\boldsymbol{S}$ zohráva rolu v presnosti, s akou žiaci dokázali určovať obrazy bodov. K určovaniu ich pozícií totiž využívali počítanie štvorčekov, resp. ich strán medzi konkrétnym bodov z množiny $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$ a bodom $\boldsymbol{S}$.

2. *Predstav si, že body $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A'}$ sú žiaci z jednej dvojice. Vyznač, kde sa nachádza loptička.*



Obrázok 7. Vyznačovanie stredu súmernosti

Táto úloha, pozostávajúca z dvoch oddelených úloh, bola predložená všetkým jedenástim žiakom. V tomto prípade by sme mohli hovoriť o analógii s hľadaním stredu súmernosti, ak je daný bod a jeho obraz. Obe tieto úlohy boli pre žiakov jednoduché, keďže ich všetci vyriešili správnym vyznačením pozície, na ktorej by sa mala nachádzať loptička z realizovaných aktivít.

6. Limity výskumu

Pred vyslovením akýchkoľvek záverov považujeme za dôležité upozorniť na niekoľko faktorov, ktoré nás limitujú práve pred rozsiahlym generalizovaním. V prvom rade treba uviesť, že pri práci so spomenutými žiakmi 4. ročníka sme nedosiahli to, aby išlo o vzorku reprezentujúcu všetkých slovenských žiakov 4. ročníka. V druhom rade vidíme z našej strany nedostatok pri mediovaní predložených úloh, špeciálne v prípade prvej úlohy, ktorú riešili žiaci bez prítomnosti štvorcovej siete. Nazdávame sa, že v prípade, že by im bolo poskytnuté pravítko, zistenia by mohli byť o niečo obšírnejšie. Na druhej strane, pri riešení predložených úloh žiakmi možno hovoriť o saturácii dát, nakoľko sa vo všetkých prípadoch vyskytovali podobné riešenia a žiacke metódy, ktorými sa žiaci dopracovávali k výsledku úloh.

Cieľom výskumu bolo poukázať na možnosť využitia nematematického predmetu pre účely matematickej edukácie. Keďže sme realizovali individuálne interview so žiakmi v ten istý deň ako bola realizovaná edukačná intervencia na vyučovacej hodine TaŠV, získané výsledky nezohľadňujú úroveň retencie žiakov. Schopnosť žiakov zapamätať si činnosti z edukačnej intervencie sa môže vzájomne líšiť, a preto možno získané výsledky považovať za validné len v prípade, že je prezentovaná edukačná intervencia nasledovaná reflexiou realizovaných aktivít v rámci vyučovacej hodiny matematiky, a to v rámci jedného dňa.

7. Záver

Výskum a realizované pohybové aktivity v rámci vyučovacích hodín telesnej a športovej výchovy, dokumentujú možnú zrelosť žiakov primárneho stupňa vzdelávania pre tému stredovej súmernosti, ktorá je v rámci kurikula matematického vzdelávania zaradená až v rámci nižšieho stredného vzdelávania, konkrétne v 5. ročníku. Využité boli špeciálne navrhnuté pohybové aktivity, ktorých realizácia má poskytnúť žiakom také reálne skúsenosti, ktoré by bolo možné transformovať do podoby matematických znalostí o stredovej súmernosti. Prezentované sú dve aktivity, v oboch prípadoch využívajúce pohybovú analógiu procesu zostrojovania obrazu bodu v stredovej súmernosti podľa daného stredu.

K vyhodnoteniu efektívnosti predloženého edukačného materiálu bolo použité individuálne interview s náhodne vybranými žiakmi, ktoré bolo zamerané na riešenie dvoch úloh, súvisiacich so stredovou súmernosťou. S ohľadom na uvedené limity si dovoľujeme konštatovať, že predložený edukačný materiál potvrdil naše prvotné očakávania, a to, že žiaci primárneho stupňa vzdelávania (najmä tretieho a štvrtého ročníka) môžu byť schopní, na základe vhodne navrhnutých edukačných aktivít:

- pre daný bod nájsť (nakresliť/zostrojiť) bod, s ktorým je stredovo súmerný podľa daného stredu,
- nájsť (nakresliť/zostrojiť) stred súmernosti dvojice bodov.

Pre oba vyslovené závery však zároveň platí, že hľadanie a zostrojovanie obrazu bodu v stredovej súmernosti, ak je daný bod a stred súmernosti, alebo hľadanie a zostrojovanie stredu súmernosti, ak je daný bod a jeho obraz, by sa mali realizovať za prítomnosti štvorcovej siete.

Nami prezentované aktivity predstavujú len časť návrhu pre vyučovanie stredovej súmernosti v rámci primárneho stupňa vzdelávania. Preto je potrebné, aby v prípade praktickej realizácie týchto aktivít nasledovala spoločná reflexia pohybových aktivít so žiakmi a prepojenie žiackych skúseností so samotným konceptom stredovej súmernosti. Na prezentované aktivity možno nazerať aj z pohľadu posilňovania kontinuity medzi primárnym a nižším stredným matematickým vzdelávaním (Scholtzová, 2005). V prípade, že by žiaci primárneho stupňa vzdelávania mali osvojené základy stredovej súmernosti v podobe dvoch bodov uvedených vyššie, matematická edukácia na nižšom stupni stredného vzdelávania by sa mohla sústrediť na ďalšie prehlbovanie žiackych znalostí o stredovej súmernosti.

Literatúra

Bakker, A., & Eerde, D. van (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example From Statistics Education. In: Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., Presmeg, N., (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge: Havard University Press.

Duplák, J. (2005). *Zobrazenia a kužeľosečky*. Prešov: Prešovská univerzita v Prešove. https://ezproxy.pulib.sk:2067/web/kniznica/elpub/dokument/Duplak4.

Jelemenská, P., Sander, E., & Kattman, U. (2003). Model didaktickej rekonštrukcie – Impulz pre výskum v odborových didaktikách. *Pedagogika*, *54 (2)*, 190-201. https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?attachment_id=1914&edmc=1914.

Plomp, T. (2013). Educational Design Research: An Introduction. In: Plomp, T., & Nieveen, N., (Eds.), *Educational Design Research – A Part A: An introduction*. Enschede: Netherlands institute for curriculum development.

Scholtzová, I. (2005). Jeden pohľad na kontinuitu matematického vzdelávania na základnej škole. In: Gunčaga, J., & Takáč, Z. (Eds.), *Matematika v škole dnes a zajtra* (s. 239-243). Ružomberok: Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity.

Štátny pedagogický ústav. (2015). *Vzdelávací štandard pre predmet matematika – primárne vzdelávanie.* https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf.

Elementary Mathematics Education Journal *2021, Vol. 3, No. 1*
ISSN 2694-8133

VLIV VĚKOVÉHO USPOŘÁDÁNÍ TŘÍDY NA ROZVOJ MATEMATICKÉ PREGRAMOTNOSTI DĚTÍ POHLEDEM BUDOUCÍCH UČITELŮ

Eva NOVÁKOVÁ
Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
novakova@ped.muni.cz

Abstrakt

Do tříd mateřské školy je možno zařazovat děti stejného či různého věku a vytvářet třídy věkově homogenní či věkově heterogenní. V českém vzdělávacím prostředí není shoda na věkovém uspořádání tříd, které by poskytovalo optimální prostředí pro sociální, emoční a kognitivní rozvoj dětí. Příspěvkem chceme přispět k diskuzi o vlivu uspořádání třídy na efektivitu rozvoje matematické pregramotnosti dětí a obohatit ji pohledem budoucích učitelů. Cílem výzkumu bylo zjistit, které z uspořádání třídy budoucí učitelé preferují a o jaké argumenty svůj názor opírají. Z výzkumných zjištění vyplývá, že názory studentek na věkové uspořádání tříd nejsou jednoznačné, i když je zřetelná prevalence názorů preferujících třídy heterogenní. Za hlavní argument pro heterogenní uspořádání uvádějí, že děti různého věku a různé mentální vyspělosti na sebe mohou navzájem různým způsobem působit, že v heterogenní třídě si mohou mladší děti osvojit mnoho poznatků týkajících se matematických představ od starších dětí. Jako určitou nevýhodu heterogenní třídy považují to, že každá věková kategorie potřebuje jiný způsob vzdělávání. Za nezbytný předpoklad efektivního kognitivního rozvoje, tedy také matematické pregramotnosti, považují osobnostní charakteristiky a kvality učitele, jeho kreativitu a empatii, vysokou kvalitu jeho didaktických a komunikačních dovedností podporujících učení dětí s různou úrovní znalostí, dovedností a schopností.

Klíčová slova: heterogenní třída, homogenní třída, předškolní vzdělávání, matematická pregramotnost, učitelé mateřské školy

THE INFLUENCE OF THE AGE ARRANGEMENT OF CLASSES ON DEVELOPMENT MATHEMATICAL PRELITERACY IN KINDERGARDEN FROM THE PERSPECTIVE KINDERGARTEN TEACHER´S POINT OF VIEW

Abstract

In the Czech Republic, little attention has been paid so far to the aspect of the age arrangement of kindergarten classes. Opinion differ as to which arrangement leads to the optimal environment for social, emotional, and cognitive development of children (Syslová et al., 2021). Abroad, heterogenous and homogenous arrangement is being discussed for a long time, from different perspectives. Reviews investigate the influence of the age arrangement of the class on the potential of children's preliteracy development. (Ansari, 2017; Wood & Frid, 2005) as well as on the teacher's preparations and on the realisation of classroom activities. (Bailey et al., 2016; Helmerhorst et al., 2019). The aim of our research was to find out which age arrangement prospective kindergarten teachers – students of kindergarten education at the Faculty of Education of the Masaryk University in Brno do prefer and which reasons they state for their opinion. Informal thematic writing (essay) was used as the research method. Research findings lead to the interpretation that the age arrangement opinions vary, although there is significant prevalence of heterogenous classes preference. Mainly because in heterogenous classes, younger children have the possibility to acquire mathematical ideas from older children. As certain disadvantage of the heterogenous class, the need of different educational approach for each age category is percepted. Personal characteristics and qualities of the teacher are seen as essential precondition of effective cognitive development including mathematical preliteracy. We believe the research findings may propose relevant information to the kindergarten teachers as well as ideas applicable in the education of prospective kindergarten teachers.

Keywords: mixed-aged classroom, same-age classroom, preschool education, mathematical pre-literacy, kindergarten teachers

1. Úvod

Studenti připravující se na profesi učitele mateřské školy jsou často konfrontováni s rozmanitými podněty pedagogické teorie, školské praxe i rodičů dětí na uplatňování svých osvojovaných profesních kompetencí ve věkově heterogenních třídách mateřské školy. Při formování názorů na uvedenou problematiku hraje důležitou úlohu jejich vlastní zkušenost, která je získávána a formována v konkrétním sociálním a kulturním prostředí, především v procesu vzdělávání a v průběhu jejich dosavadního pedagogického působení. Vhodnost uspořádání tříd vnímají a posuzují na základě prožitých individuálních zkušeností. Zamýšlejí se také nad tím, zda a v jaké míře vytváří heterogenní třída mateřské školy vhodné prostředí pro rozvoj matematické pregramotnosti.[1]

2. Teoretická východiska

Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání (2018, s. 6) uvádí, že „do tříd je možno zařazovat děti stejného či různého věku a vytvářet třídy **věkově homogenní** či **věkově heterogenní**“. Při vymezení pojmu **heterogenní** třída vycházíme z Rathbonovy definice (1993, s. 64), která říká, že „heterogenní třída je ta, ve které jsou děti různého věku a stupně vývoje společně“.[2] Jejím opakem je třída **homogenní,** „do níž jsou zařazováni žáci na základě určitého společného výběru, zpravidla podle schopností, inteligenčního koeficientu a učebních výsledků (Průcha, Walterová & Mareš, 2013, s. 92). Také další charakteristiky heterogenní třídy uváděné v zahraniční literatuře (Katz et al., 1990; Blasco, Bailey & Burchinal, 1993) se zaměřují na úmyslné seskupování dětí alespoň dvou různých věkových skupin za účelem jejich efektivnějšího vzdělávání s využitím různorodosti úrovně dosažených výsledků a stylů učení. Přístup k dětem je v těchto třídách založen na sdílení zkušeností s učením a vytvářením jedinečné (individuální) struktury znalostí.

Problematice heterogenního uspořádání tříd mateřské školy byla dosud věnována v České republice minimální pozornost. Není mu v českém předškolním vzdělávání věnován žádný relevantní výzkum, přestože se s povinnou předškolní docházkou (od 1. 9. 2017)

---

[1] Matematickou pregramotností rozumíme „soubor postupně se rozvíjejících předpokladů pro matematiku u dětí v době před vstupem do školy; komplex schopností, dovedností, postojů a hodnot potřebných pro zahájení a úspěšné rozvíjení matematické gramotnosti i jejímu užívání v různých individuálních a sociálních kontextech“ (Nováková & Novák, 2019). V dalším textu, především v autentických výpovědích studentek, jsou použity i termíny „předmatematická gramotnost“, „matematické představy“, „předmatematické představy“, „předčíselné představy“, které jsou v praxi mateřské školy běžné.

[2] V anglicky psaných publikacích jsou k označení heterogenní (věkově smíšené) třídy nejčastěji používány termíny „mixed-age“, popřípadě „multi-age“ classroom.

i v souvislosti s každoročně vysokým počtům odkladů školní docházky četnost diskuzí o vhodnosti heterogenního uspořádání tříd zvýšila. Na teoretické úrovni lze zmínit Havlovou (2012) nebo Koťátkovou (2014), dílčí empirické výzkumy můžeme najít v závěrečných pracích studentů vysokých škol. Z jejich zjištění vyplývá neopodstatněnost obav, že by heterogenní třídy hůře připravovaly děti na vstup do základní školy (Srbová, 2011; Velíšková, 2014). Často zmiňovaným negativem heterogenních tříd je podle těchto výzkumů náročnost přípravy pro učitele (Luňáková, 2008; Sajbotová, 2016). Je však nutno brát v úvahu určité limity, které z takto omezených zdrojů vychází. Kvalifikační vysokoškolské práce reportují pouze výstupy krátkodobého výzkumu s poměrně malým výzkumným vzorkem.

V zahraničí můžeme sledovat polemiku o výhodách a nevýhodách heterogenního uspořádání tříd již řadu let a to z různého úhlu pohledu (Syslová, Z., Nováková, E. & Najvarová, V., 2021). Převažují výzkumné studie, které si všímají optimálního **socioemočního a kognitivního rozvoje dítěte -** Lanphearová (2016), Okutanová a kol. (2014) a činnosti **učitele mateřské školy** při přípravě a realizaci aktivit ve třídě **-** Bailey a kol. (2016), Helmerhorstová a kol. (2019). Vzhledem k zaměření našeho článku považujeme za relevantní ty zahraniční studie, které jsou zacíleny na věkové uspořádání třídy z hlediska jeho potenciálu k **rozvoji pregramotností dětí** v jednotlivých oblastech předškolního vzdělávání. Zjišťují, zda jsou děti z heterogenních tříd lépe připraveny na vstup do základní školy (Ansari & Purtell, 2018); zda a v jaké míře vytváří heterogenní třída vhodné prostředí pro rozvoj čtenářské pregramotnosti (Ansari, 2017) a **matematické pregramotnosti** (Wood & Frid, 2005). Soustřeďují se na to, jaké jsou hlavní efekty složení heterogenní třídy a jak se promítnou do výkonu dětí.

3. Metodologie výzkumu

Cílem našeho šetření bylo zjistit, jaký je názor studentek na možnosti **rozvoje matematické pregramotnosti ve věkově heterogenních třídách** mateřské školy v porovnání se třídami homogenními; které z těchto uspořádání budoucí učitelé preferují a o jaké argumenty svůj názor opírají.

Jako výzkumnou metodu jsme využili tematické psaní textu formou volné písemné produkce (eseje). Tematické psaní je vlastně kvalitativním protikladem dotazníku, v němž respondenti odpovídají na řadu otázek stanovených výzkumníkem: orientace tematického psaní je opačná (Wiegerová & Gavora, 2014). Pokusili jsme se studentky angažovat k uvažování o sobě, neboť text, který produkovali, je konstrukcí jejich vlastní subjektivity (Nováková, 2018). Výhodou písemné metody je, že mediační efekt výzkumníka je menší v porovnání s interview a participant pracuje vlastním tempem (Elizabeth, 2007).

Výzkum jsme uskutečnili ve dvou souborech respondentů. Tvořilo je 56 studentek 2. ročníku prezenční formy a 22 studentek 1. ročníku kombinované formy bakalářského studia učitelství pro mateřské školy na Pedagogické fakultě MU v Brně. Sběr dat se uskutečnil v letním semestru akademického roku 2019/20. Studentkám jsme vysvětlili záměr výzkumu a dali jim stručné instrukce týkající se obsahu tematického psaní. Téma bylo uvedeno otázkami:

1) *Které uspořádání třídy preferujete vzhledem k potenciálu rozvoje matematické pregramotnosti dětí?*
2) *Jaké aktivity, prostředky a pomůcky považujete za vhodné pro rozvíjení matematické pregramotnosti dětí v heterogenní třídě?*

Obsah ani rozsah textu nebyl nijak přesněji vymezen. Základní metodou, která umožnila následně formulovat zjištění, byla tematická analýza textu (Braun & Clarke, 2006). Jednotlivé výpovědi jsme se pokusili shrnout, strukturovat a analyzovat s cílem hledat odpovědi na výzkumné otázky, uvedené výše.

ISSN 2694-8133

4. Výzkumná zjištění

Výpovědi studentek jsou velmi různorodé, v některých případech až protichůdné. Řada z nich má krátkodobou nebo i dlouhodobější praxi v prostředí mateřské školy buď v homogenních nebo heterogenních třídách nebo v obou uvedených typech uspořádání třídy. Získaná zkušenost se do jejich názorů promítá. Tuto skutečnost si uvědomuje také studentka, která uvedla:

- Byla jsem na praxi v obou typech tříd. Myslím, že není správná nebo špatná odpověď na to, který způsob je lepší. Každé uspořádání má své klady i zápory a nelze jednoznačně určit, který je ten „ideální“. Každý má právo na svůj názor a svůj úhel pohledu.

4.1. Preference uspořádání třídy z hlediska dítěte

Rozvíjení matematické pregramotnosti jako jedné z komponent kognitivního rozvoje (poznávacích schopností a funkcí, myšlenkových operací - pozornosti, soustředění a paměti) dětí považují respondentky za vhodné a pro předškolní dítě za významné **v obou způsobech uspořádání tříd**. Současně si ve svých vyjádřeních zřetelně uvědomují, že rozvoj matematické pregramotnosti je úzce spojen s rozvojem myšlení, řeči, motorických schopností, ale i zrakového a sluchového vnímání, paměťových schopností a pozornosti již v raném věku dítěte. Zdůrazňují požadavek komplexního rozvoje dětské osobnosti, v němž mají matematické představy své nezastupitelné postavení při rozvíjení „myšlení v souvislostech prostřednictvím řešení problémů“. Zkušenosti získané budoucími učitelkami v průběhu dosavadní praxe je vedou k závěru, že příležitosti k rozvíjení matematických představ lze najít v různých praktických souvislostech, aktivitách a činnostech běžného dne dítěte, při nichž se rozvíjí jemná motorika, rozpoznávají různé tvary a barvy, rozvíjí se prostorová představivost.

- Ta matematika se odráží všude v životě, ve všem ji děti potřebují. Cokoli dělají, tak všechno má souvislost s matematikou. Takže určitě od malování, stříhání, skládání různých kostek. V podstatě my už ty děti připravujeme od těch tří let tím, že si něco staví z kostiček. Dokážou nějaký tvar už postavit, potom už složitější věci. V tom se v podstatě na matematiku připravují a v tom předškolním věku se dopracují až třeba k nějakým těm společenským hrám zajímavějším, kde řeší už opravdu nějaké složitější úkoly, rébusy a podobně. Určitě pro děti to má přínos pro děti ze všech stran, protože bez té matematiky se člověk těžko bude orientovat dál v životě.
- Na praxi vidím, že k rozvíjení matematických představ mají děti mnohem víc příležitostí, než jsem si myslela. Já jsem tam vždycky jenom viděla ty pracovní listy, co dělají na předškolní přípravě. A jsem ráda, že to není jenom to, že tužtičkou přiřazují motýlky k motýlkům a červené autíčko k červené garáži, ale že třeba venku sbírají přírodniny a třídí je, každý den nějaká taková činnost se naskytne.

Podle mínění studentek je však vliv zařazení dětí do věkově heterogenních či homogenních tříd na úroveň rozvoje jejich matematické pregramotnosti různý. Přitom v některých výpovědích se považuje za vhodnější prostředí heterogenních, v jiných homogenních tříd. Studentky **preferující heterogenní uspořádání** uvádějí, že zde mohou mladší děti pochytit mnoho poznatků týkajících se matematických představ od starších dětí, které již umí pojmenovat tvary, rozlišit počty předmětů, vzájemně je přiřazovat, seřazovat podle velikosti aj., a s mladšími se dělí o své zkušenosti. Jako značný klad tohoto uspořádání vnímají studentky fakt, že **děti různého věku na sebe mohou navzájem různým způsobem působit**. Uvedená skutečnost je dominantně zmiňována jako hlavní argument pro preferenci heterogenního uspořádání **ve výpovědích studentek prezenčního studia.** Mladší děti se chtějí vyrovnat svým starším kamarádům, podporuje se v nich zájem o učení a intelektuální činnost, mnohdy získají mnoho podnětů nejen pro rozvoj matematických představ, které si ani samy neuvědomují:

- Mladší děti díky těm starším získávají nové a nové zkušenosti a dovednosti, které si později osvojí natolik, že to začnou dělat samy automaticky. Díky takovému předávání poznatků se děti učí i řečovým schopnostem, rozvíjí se jejich slovní zásoba. Taková třída je navíc pro děti velmi přirozená, protože s různě starými lidmi se děti stýkají celý život. Je to prostě přirozené prostředí.
- Myslím si, že předmatematické představy se více rozvíjejí v heterogenních třídách, kde máme jak předškolní děti, které se postupně s učitelem připravují na zápis do první třídy základní školy, tak i mladší děti. Mladší děti však vše pozorují, dokonce se i stává, že se mladší děti někdy od svých starších sourozenců naučily různé matematické prvky a radí předškolním dětem. Šikovné mladší děti se velmi zajímají, co předškolní děti vypracovávají u stolečků, proto se stává, že dobrovolně plní různé úkoly se staršími dětmi. Tím se více rozvíjí v předmatematických představách, aniž by k tomu byly nuceny. Starší děti se také rády chlubí tím, že umí něco navíc než ostatní děti.
- Konkrétně u předmatematických představ je dle mého názoru velice důležité, aby dětem jednotlivé kroky a znalosti na sebe vzájemně navazovaly a dávaly logický smysl. Pokud děti nemají dobrý základ, nemohou pochopit složitější věci. Velký problém by mohl nastat, pokud by děti určitému kroku špatně porozuměly. Je pro ně potom velice těžké vynechaný stupeň dohnat a „přeučit“ se ho správně.
- Předmatematické představy by se měly rozvíjet hlavně pomocí her, pozorovaní, experimentu, vlastních zážitků. Děti v heterogenní třídě měly možnost zkusit každou činnost, od navlékání určitého počtu korálku do seskupení tvarů různých velikostí. Mladší děti si vybíraly spíš činnosti, kterým rozuměly, popřípadě starší děti mladším pomáhaly. Šestileté zvládly všechny činnosti během dopoledne.

Ve výpovědích se připomíná smysl „předmatematické přípravy“ pro následné školní vzdělávání i potřebnost a užitečnost matematických poznatků pro praktický život předškoláka:

- V mnoha školkách jsou předškolácké edukační skupinky, kde spolu s rodiči probíhá cílená příprava a rozvoj dovedností pro úspěšné zvládnutí školní docházky. Předškolní děti dovedou diskutovat, probírat témata do hloubky, protože chtějí navázat něčím novým na to, co již znají a umějí.

Názory na vhodnost prostředí heterogenní třídy však **nejsou jednoznačné**. Studentky například uvádějí, že pro rozvoj logického myšlení a matematické pregramotnosti jsou velmi vhodné hry s pravidly. Při takových hrách děti uplatňují různé strategie odpovídající jejich věku či stupni vývoje a tím dochází k rozvíjení jejich logického myšlení. Pro tento rozvoj je ale důležité, aby děti tyto strategie objevily samy, aby je hledaly a zlepšovaly z pozice svého současného stupně vývoje. Právě tím se rozvíjí jejich logické myšlení. Podle názoru jedné studentky dochází v heterogenních třídách k tomu, že starší děti mají tendence mladším radit, jak lépe hru hrát – jakou efektivnější strategii využít, což u mladších blokuje rozvoj jejich hledání a zlepšování. Tyto děti pak mají tendenci buď hru opustit, nebo strategii bezmyšlenkovitě kopírovat. Další argument uvádí jiná studentka. Obtížnost aktivit se odvíjí od věku dítěte a jeho schopností. Zde vidí úskalí vývoje předmatematických představ v heterogenní skupině, kde se didaktické činnosti musí přizpůsobit možnostem všech dětí ve třídě. Starší děti "jednodušší“ hry nemusí zaujmout. Na stranu druhou, když učitelka připraví činnost zaměřenou na přípravu starších dětí do školy, mladší dětí zůstanou v roli pasivního diváka:

- Nejdůležitější je děti nezatěžovat čísly a jinými věcmi, které patří až na první stupeň základní školy. Do činností jako je posuzování, ve které nádobě je více kuliček nebo pokusů, aby dítě spočítalo zvířátka na obrázku, se mohou v heterogenní třídě zapojit děti jakéhokoliv věku. Děti mladší budou pozorovat barvy a pasivně vnímat počítání předškoláků nebo nadanějších žáků.

- Ve školce se setkávám pouze s tím, do kolika umí děti napočítat… V heterogenní třídě, kde v září nastoupila i dvouletá dítka, jsme byli rádi, když znají počet do tří. U předškoláků je to samozřejmě něco jiného.
- Prostředí homogenní třídy často vybízí k rozvoji soutěživosti v kolektivu. Může se stát, že se soutěživost stane nezdravou. Soutěživosti se však dá krásně využít zejména v kolektivu starších dětí, které jsou na prahu mezi mateřskou a základní školou. V tomto věku už jsou děti schopny zpracovat a využít zkušeností, které v kolektivu získávají. Děti si díky tomu upevňují a uvědomují například význam uspořádání – pojmů: první, druhý, poslední. Soutěživosti se dá využít ale nejen během pohybových her, ale i při běžných činnostech. Je však nutné myslet na to, aby se z pobytu v mateřské škole nestala soutěž a dbát na zdravý psychický rozvoj v této oblasti. Na druhou stranu je pro život nás všech důležité naučit se vyhrávat, ale i prohrávat. A srovnat se s tím.

Za určitou nevýhodu heterogenní třídy je považováno to, že **každá věková kategorie potřebuje jiný způsob vzdělávání.** Studentky jsou si z vlastní zkušenosti vědomy toho, že v mateřské škole jsou uplatňovány aktivity spontánní i řízené, vzájemně provázané a vyvážené, v poměru odpovídajícím potřebám a možnostem předškolního dítěte. Pro rozvoj matematických představ dítěte je takovou specifickou řízenou formou, vhodnou pro předškolní vzdělávání v podmínkách mateřské školy, **didakticky zacílená činnost**, která je učitelem přímo nebo nepřímo motivovaná, která je dítěti nabízena a v níž je zastoupeno **záměrné (cílené, plánované) učení**. Tyto činnosti probíhají v heterogenním uspořádání zpravidla v menší skupině či individuálně. V souladu s postupujícím věkem a vyspělostí dítěte a na základě jeho narůstajícího zájmu o činnosti, na které může navazovat systematická školní práce, může přirozeně takových činností v programu dítěte přibývat.

Didaktický styl vzdělávání dětí v mateřské škole je založen na **principu vzdělávací nabídky**, na individuální volbě a aktivní účasti dítěte. Ve výpovědích studentek se objevuje argument, že v heterogenní třídě se malé tříleté děti učí úplné základy a vše se jim musí vysvětlovat jednodušeji, což starší děti nemusí bavit. Naopak, když se bude se staršími dětmi probírat něco přesahující úroveň chápání mladších, nebudou tomu rozumět a neudrží pozornost. Proti tomu se vyskytuje opačný názor, že mladší děti se rychleji posouvají v tom, co už umí, protože to vidí u starších kamarádů a chtějí to zvládat taky. Získávají informace nejen prostřednictvím cílených výchovně vzdělávacích činností, ale i neformálním způsobem, a to pozorováním a napodobováním starších kamarádů; přebírají od starších vzorce chování, celý proces je přirozenější.

4.2. Význam osobnosti učitele, užívaných metod a didaktických pomůcek

Osobnostní předpoklady a kvality učitele, jeho kreativita a empatie („musí věřit tomu, že když se bude dětem věnovat, tak je to užitečné“) jako předpoklad rozvíjení různých stránek osobnosti dítěte, tedy také matematické pregramotnosti, jsou uváděny ve výpovědích, které preferují heterogenní i homogenní uspořádání. Vzhledem k nutnosti přizpůsobit přípravu i vlastní realizaci aktivit různým věkovým skupinám obvykle považují **pro učitelku práci v heterogenní třídě náročnější.** Učitelka musí dětem připravovat různé činnosti, které jsou adekvátní jejich věku a mentální vyspělosti, tím jim pomoci se více rozvíjet v jednotlivých oblastech. Mezi tyto činnosti mohou patřit **spontánní hry i řízené, didakticky zacílené činnosti s didaktickými pomůckami**. Z uvedeného vyplývá nutnost, aby učitelé vykazovali vysokou kvalitu v didaktických a komunikačních dovednostech podporujících učení dětí s různorodou úrovní znalostí, dovedností a schopností. I při tomto způsobu práce jsou pro tvorbu i realizaci vzdělávací nabídky v heterogenních třídách využívány metody a prostředky specifických **didaktik jednotlivých oborů** výchovně vzdělávacích činností, pokud jsou zaměřeny na práci s předškolním dítětem a pokud odpovídají psychologickým a didaktickým specifikám předškolního vzdělávání.

V této souvislosti připomíná jedna studentka závažný moment, vztahující se k oborovým kompetencím učitele: není si jistá, zda si všichni pedagogové dokážou uvědomit, „že tam nějaké ty předmatematické představy jsou“. Považuje za nejobtížnější zvolit nejvhodnější způsob, „jak to (tj. činnosti rozvíjející matematickou pregramotnost) dětem podat, aby to pochopily dobře“. Ve výčtu konkrétních didakticky zaměřených aktivit uvádějí příklady a vlastních zkušenosti z praxe. Opakuje se využití pracovních listů, práce se stavebnicemi, doplňovačky, omalovánky, třídění předmětů podle barev nebo různých jiných kritérií:

- Další činností, která se zaměřuje na rozvoj předmatematických představ, je děj. Někdy dětem zahrajeme pohádku s maňásky, přečteme v knize, případně pustíme na televizi a poté si o ní povídáme. Říkáme si, jaké tam vystupovaly postavy, co která udělala, co se stalo, jestli byla hodná nebo zlá a jak pohádka skončila. K procvičení této dovednosti může být využito popisování obrázků. Vyžadujeme zdůvodnění dítěte, proč například na obrázku chybí u draka ocas. Dítě se učí argumentovat, vytvářet logické odpovědi (např. ocas je za mrakem) a vnímat i to, co nevidí, co na obrázku chybí. Mít přiměřenou slovní zásobu, pojmenovávat jevy ve svém okolí je významné. Poté před děti položíme několik obrázků z dané pohádky s tím, že děti mají za úkol obrázky seřadit podle toho, jak se staly.
- Výhodou smíšené třídy je rozmanitost pomůcek a vybavení. Díky tomu se můžou dostat mladší děti do kontaktu s aktivitami, které by v homogenní třídě určené mladším dětem neměly šanci vyzkoušet. Třeba třídění. Opět platí, že mladší děti potřebují jednodušší třídící prvky. Například pro ně lehce uchopitelné kostky, ze začátku pouze ve dvou barvách a třídí na dvě hromádky. Pro děti předškolního věku je vhodnější zařadit již složitější věci, aby je to podněcovalo k další činnosti.
- Co se týká rozvoje předmatematických představ, jsem jednoznačně zastáncem homogenních tříd, které umožňují jednotnější výchovné a výukové postupy, cílenější zaměření didaktických pomůcek a celkového vybavení třídy. Domnívám se, že v homogenních třídách má učitel větší možnosti a zároveň větší efektivitu, jak děti rozvíjet, protože se nemusí potýkat s velkými věkovými rozdíly. Významný vliv vidím především u předškolních dětí, které již mají výrazně jiný režim dne, s menší potřebou odpočinku, a naopak vyššími nároky na rozmanitost aktivit, podnětů. Cílená jednotnost v přípravě pro školní docházku.

Jiná studentka uvádí na základě vlastní zkušenosti další argumenty ve prospěch homogenního uspořádání:

- V homogenní třídě "předškoláčků" můžeme všechny aktivity více směřovat k hlubšímu rozvoji jejich dovedností tím, že jim můžeme věnovat více pozornosti, než když máme ve třídě zároveň mladší i starší děti. Mám tento dojem z vlastní zkušenosti, jelikož mívám praxe právě v homogenní třídě u dětí předškolního věku. Můžeme lépe vymýšlet i skupinové aktivity a nemusíme děti ve třídě (jako třeba v heterogenních třídách) "rozdělovat". Taktéž můžeme volit složitější a celkově náročnější činnosti.

Nevýhodou heterogenní třídy je podle názoru některých studentek také to, že předškolní děti nemají potřebný klid například na vypracovávání úkolů a přípravy na školu. V homogenních třídách zvládají předškolní děti náročnější strukturované činnosti, které směřují ke kvalitní přípravě na vstup do školy. Aktivity mohou být cíleně přizpůsobeny jejich potřebám a systematicky zaměřeny na předškolní vzdělávání.

Opakuje se argument, že **homogenní třída bývá vhodná zejména pro předškolní děti.** Studentky vycházejí ze své, praxí dosud nekorigované představy, že učitelka se při přípravě aktivit v homogenní třídě může zaměřit pouze na jednu věkovou skupinu, že činnosti může vybrat tak, aby jim všechny plně porozuměly a zároveň nikoho nenudily. Lépe se jim vymýšlejí úkoly pro děti, které jsou stejně staré a mají přibližně stejné schopnosti a dovednosti, podobné potřeby. Volí podobné činnosti pro všechny děti, nemusí tak tyto aktivity přizpůsobovat dětem různého věku:

ISSN 2694-8133

- Z pohledu učitelky vidím homogenní třídu jako hodně jednotvárnou. Učitelka dělá jednotnou přípravu na činnosti. Stejný režim ve třídě. Zastávám názor, že heterogenní třída je na práci učitelky mnohem náročnější než homogenní. Vymyslet aktivity vhodné pro všechny děti, aby je zvládaly a rozvíjely, není úplně jednoduché.

5. Shrnutí, diskuze a závěry

V článku jsme chtěli přispět k diskuzi o rozmanitých aspektech uspořádání tříd mateřské školy a obohatit ji o názory budoucích učitelů. Zaměřili jsme se na jednu stránku osobnosti dítěte, kterou je rozvoj jeho **předpokladů pro matematiku** v době před vstupem do školy.

Pohled budoucích učitelek mateřských škol **na vymezené otázky** poskytl určitou sumu poznatků a dat. Respondenty výzkumu byly studentky, které se mohly ve svých výpovědích opřít nejen o teoretické znalosti získané studiem, ale také o delší nebo kratší praxi v konkrétním prostředí mateřské školy. Uvedená skutečnost se podle našeho mínění mohla promítnout i do intuitivně vnímaných preferencí potenciálu heterogenního nebo homogenního uspořádání vzhledem k rozvoji matematické pregramotnosti dětí. V některých případech se jedná o značně kategorická tvrzení s uvedením argumentů pro autorku významných, jindy jsou vyjádření velmi zdrženlivá, rezervovaná, u vědomí vlastní malé zkušenosti studentky. Uvědomujeme si, že počet respondentů ani zvolená kvalitativní metoda neumožňují jednoznačné závěry, přesto získaná data považujeme za podnětná.

Pokud jde o vnímání věkově heterogenního a homogenního uspořádání tříd v mateřské škole a jejich vlivu na edukaci je zřetelná **prevalence názorů preferujících třídy heterogenní**. V takto zaměřených výpovědích se zdůrazňuje základní smysl věkově smíšeného uspořádání **-** vytvořit dětem podstatně větší prostor pro vzájemnou spolupráci mladších a starších, které lze využít při kognitivním rozvoji dětí, tedy také jejich matematické pregramotnosti. Přístup k dětem je v těchto třídách založen na ocenění rozmanitosti skupiny, na tom, že děti nejsou srovnávány, ale pozornost je zaměřena na jejich **individuální pokroky**. Na základě nabídky aktivit různé náročnosti je v heterogenní třídě možný spontánní „přesun“ mezi dvěma nebo i více skupinami dětí nebo jednotlivců k činnostem pro ně atraktivnějším.

Jak zdůrazňují Burkovičová a kol. (2018), dítě předškolního věku vnímá a zpracovává podněty a zkušenosti jinak než dospělý nebo žák primární či sekundární školy, vytváří si vlastní obraz o světě, ostatních lidech i o sobě samém. Ten si konstruuje na základě individuálních zkušeností, které postupně nabývá. Na vše se dívá optikou tzv. naivních teorií (**prekonceptů**). V heterogenních třídách mateřské škole si děti různého věku, různých schopností a různé úrovně kognitivního vývoje navzájem porovnávají vlastní (pre)koncepty, zejména v rámci kooperativních činností, a zjišťují, že ostatní mohou stejnou věc vnímat jinak. Mohou přijmout (pre)koncepty jiných dětí, a tak rekonstruovat vlastní, nebo je nepřijmout.

Uvedený názor koresponduje také se zjištěními relevantních zahraničních výzkumů. Okutanová a kol. (2014) výzkumně ověřili, že rozmanitost heterogenních tříd je významným stimulem, protože každé dítě má šanci najít si způsob učení vhodný pro svoji úroveň. Pro děti, které vykazují různé pokroky v různých vývojových oblastech, by učení nemělo být omezeno pouze na jeden vzor. Woodová a Fridová (2005) zapracovaly rozvíjení matematických představ do specifického vzdělávacího programu v heterogenní třídě, v němž využívaly příklady a dětem známé situace z běžného života. Děti sdílely během úkolů své nápady, díky čemuž se učily z nápadů ostatních dětí. Pokud se ve skupině objevilo zkušenější a vyspělejší dítě, přebralo roli vedoucího či doučujícího. Učení bylo založeno na intersubjektivitě (intersubjektivitou je nazývána spolupráce a společná pozornost, které jsou základem pro komunikaci a rozšíření dětského chápání nových informací), přičemž starší děti pomáhaly mladším dětem. Autorky upozorňují, že děti si vzájemně pomáhají i v homogenních třídách, avšak v heterogenních jsou daleko větší rozdíly mezi dětmi, čímž je i vyšší efektivita sdílení mezi starším a mladším dítětem.

Studentky v našem šetření však upozorňují na některé problematické momenty, které mluví spíše **ve prospěch tříd homogenních**. Jedním z nich je **efektivnější příprava na systematické školní vzdělávání** v homogenních třídách předškolních dětí. V nich lze klást vyšší nároky na rozmanitost a úroveň kognitivních aktivit, tedy také aktivit cíleně rozvíjejících matematickou pregramotnost. Rovněž z některých zahraničních zkušeností vyplývá (Ansari, 2017), že v heterogenní třídě byl věnován menší rozsah činností, než u dětí z homogenní třídy, rozvoji jazyka a matematických představ. Učitelky v heterogenních třídách ve výzkumu Ansariové měly tendenci přizpůsobit svou práci mladším dětem, což je pro starší a vyspělejší děti nevýhodné. Touto skutečností autorka výzkumu zdůvodňuje, že děti ve smíšené třídě dosahovaly horších výsledků v matematické pregramotnosti a čtení, v rozvoji jazyka a ve výkonových funkcích. Přisuzuje to skutečnosti, že děti dostávaly méně učitelem řízených instrukcí.

Závěrem uveďme, že v českém vzdělávacím prostředí nepanuje shoda na významu a efektivitě jednoho či druhého uspořádání tříd mateřských škol. Nejsou k dispozici ani data, z nichž by bylo zřejmé, jakému uspořádání tříd dávají přednost samy mateřské školy. Z hospitací prováděných Českou školní inspekcí vyplynulo[3], že v roce 2019 bylo z celkového počtu 4103 navštívených tříd 1112 věkově smíšených, pro děti od tří do šesti let věku. Z toho můžeme usuzovat, že jde asi o čtvrtinu z celkového počtu tříd v České republice.

Domníváme se, že otázky související s efektivitou heterogenních a homogenních tříd v českém prostředí by bylo třeba ověřit výzkumně. Nová výzkumná zjištění by mohla přinést relevantní informace učitelům mateřských škol, ale také využitelné v přípravném vzdělávání učitelů. Danou problematiku považujeme za velmi aktuální, nového významu nabývá také v souvislosti s povinným posledním rokem předškolního vzdělávání.

Literatura

Ansari, A. (2017). Multigrade kindergarten classrooms and children's academic achievement, executive function, and socioemotional development. *Infant & Child Development 26*(6), 2-19.

Ansari, A., & Purtell, K. M. (2018). Continuity and changes in classroom age composition and achievement in Head Start. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *58*, 86-95.

Bailey, G. J., Werth, E. P., Allen, D. N., & Sutherland, L. L. (2016). The Prairie Valley project: Reactions to a transition to a schoolwide, multiage elementary classroom design. *School Community Journal, 26(1)*, 239-264.

Blasco, P. M., Bailey, D. B., Jr., & Burchinal, M. A. (1993). Dimensions of mastery in same-age and mixed-age integrated classrooms. *Early Childhood Research Quarterly, 8*, 193-206.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3(4)*, 77-101.

Elizabeth, V. (2007). Another string to our bow: Participant writing as research method. Forum Qualitative Sozialforschung/Forum. *Qualitative Social Research*, *9(1)*, Art. 31.

Havlová, J. (2012). Výhody či nevýhody věkově smíšených skupin? *Poradce ředitelky mateřské školy, 2(1)*, 20-22.

[3] Výroční zpráva České školní inspekce za rok 2019. Dostupné na https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el._publikace/V%c3%bdro%c4%8dn%c3%ad%20zpr%c3%a1vy/Vyrocni-zprava-Ceske-skolni-inspekce-2019-2020_zm.pdf

Helmerhorst, K. O. W., Colonnesi, C., &Fukkink, R. G. (2019). Caregiver's mind-mindedness in early center-based childcare. *Early Education and Development, 30(7)*, 854-871.

Katz, L. G., Evangelou, D., & Hartman, J. A. (1990). *The case for mixed-age grouping in early education.* Washington, D.C.: National Association for the Education of Young Children.

Koťátková, S. (2014). *Dítě a mateřská škola: co by měli rodiče znát, učitelé respektovat a rozvíjet.* Praha: Grada.

Lanphear, J. (2016). Inquiry and intersubjectivity in a Reggio Emilia-inspired preschool. *Journal of Research in Childhood Education, 31(4)*, 597-614.

Luňáková, J. (2008). *Význam věkově heterogenních tříd v mateřské škole pro rozvoj dětí.* (Bakalářská práce). České Budějovice: PdF JČU.

Nováková, E. (2018). Jak vnímají matematiku budoucí učitelé mateřské školy. *Magister: reflexe primárního a preprimárního vzdělávání ve výzkumu*, *6 (1)*, 7-24.

Okutan, S., Tepeli, K., Tugrul, B., & Gunes, G. (2014). Preschool education in mixed- versus single-age groups: Effects on developmental characteristics of young children. In: Yasar, M., Galbraith, J., & Ozkan, O. (Eds.) *Contemporary Perspectives and Research on Early Childhood Education* (pp. 373-383). Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing.

Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2013). *Pedagogický slovník*. Praha: Portál.

Rathbone, C. (Ed.). (1993). *Multi Age Portraits: Teaching and learning in mixed-age classrooms*. Peterborough, NH: Crystal Springs Books.

Sajbotová, M. (2016). *Heterogenní nebo homogenní uspořádání dětské skupiny v mateřské škole?* (Bakalářská práce). Ostrava: PdF OU.

Srbová, V. (2011). *Rozdíly homogenně a heterogenně uspořádaných tříd v MŠ a jejich vliv na připravenost dítěte pro vstup do 1. třídy základní školy.* (Diplomová práce). Praha: PdF UK.

Syslová, Z., Nováková, E., Najvarová, V., (2021). Vliv věkového uspořádání tříd na edukaci v mateřských školách v zahraničních výzkumech. *Studia paedagogica*, *25 (2)*.

Velíšková, B. (2014). *Věkově heterogenní versus věkově homogenní třídy v mateřské škole.* (Bakalářská práce). České Budějovice: PdF JČU.

Výroční zpráva ČŠI 2019-20. Kvalita a efektivita vzdělávání a vzdělávací soustavy. Česká školní inspekce. https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el._publikace/Výroční%20zprávy/Vyrocni-zprava-Ceske-skolni-inspekce-2019-2020_zm.pdf.

Wiegerová, A. & Gavora, P. (2014). Proč se chci stát učitelkou v mateřské škole? Pohled kvalitativního výzkumu. *Pedagogická orientace*, *2014, roč. 24, č. 4*, 510-534.

Wood, K.,_& Frid, S. (2005). Early childhood numeracy in a multiage setting. *Mathematics Education Research Journal, 16(3)*, 80-99.

MODELY SYMETRIE S PRVKAMI HUDBY V MATEMATICKEJ EDUKÁCII

Alena PRÍDAVKOVÁ
Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)
alena.pridavkova@unipo.sk

Abstrakt

V matematike a hudobnej výchove je možné identifikovať mnoho spoločných elementov. Obe oblasti poznania využívajú jazyk, kde sú koncepty a vzťahy medzi nimi prezentované pomocou špecifických symbolov. Výskumy ukazujú na pozitívny vplyv realizácie činností hudobného charakteru na rozvoj matematických schopností (Kolodziejski, 2012, Luczak, 2015), ale aj naopak – matematické schopnosti sú prediktorom porozumenia hudobných konceptov. Edukačné aktivity integrujúce matematiku a hudobnú výchovu podporujú proces porozumenia rôznych matematických pojmov. Východiskom pre kreovanie návrhov aktivít uvedeného charakteru je analýza obsahu vzdelávania oboch vyučovacích predmetov. V príspevku budú prezentované možnosti využitia elementov matematiky a hudobnej výchovy pri porozumení pojmov z geometrie. Hudobné modely konceptu symetria môžu byť prostriedkom pre lepšie pochopenie pojmu osová súmernosť.

Kľúčové slová: matematika, hudobná výchova, symetria, osová súmernosť

THE MODELS OF SYMMETRY WITH MUSIC ELEMENTS IN MATHEMATICS EDUCATION

Abstract

Many common elements can be identified in mathematics and music education. Both areas of knowledge use language, where the concepts and the relations between them are presented using specific symbols. Results of research show to the positive impact of application musical activities to developing mathematical abilities, and vice versa – mathematical abilities are predictors of musical concepts understanding (Kolodziejski, 2012, Luczak, 2015). Educational activities integrating mathematics and music support the process of understanding various mathematical concepts. The analysis of the education content of both areas/subjects is a key starting point for creating the mentioned proposals for activities. The possibilities of using mathematical and musical elements within the process of understanding the geometrical concepts are presented in the paper. Musical models of the concept of symmetry can be a means of better understanding the notion of axial symmetry.

Keywords: mathematics, music, symmetry, axial symmetry

1. Úvod

Pre zhodné zobrazenia platí, že pri zobrazovaní útvarov sa ich tvar a veľkosť zachováva, zatiaľ čo ich pozícia sa môže meniť. V prípadoch, kedy je útvar rotovaný (rotácia), zrkadlovo zobrazený (osová súmernosť) alebo posunutý (translácia) hovoríme o zhodnom zobrazení. Tieto zobrazenia sú často referované s preklopením, posunutím, otočením útvaru, objektu

(Jorgensen & Dole, 2011). V texte budú pojmy symetria a súmernosť (útvary symetrické, súmerné) používané v ekvivalentom význame.

Spolu s predstavami o rôznych útvaroch sa v myslení detí rozvíjajú aj poznatky o symetrii a zhodnosti (Clements & Sarama, 2014). Vnímajú symetriu objektov vyskytujúcich sa v ich okolí, akými sú napríklad listy stromov, motýle, kvetiny, lienka a pod., ktorých modely sú buď reálne objekty alebo sú znázornené v rovine vo forme obrázkov či fotografií. Postupne deti pracujú aj so symbolmi, ikonami, ktoré sú symetrické – srdce, kvet, smejko, číslice, písmená, rôzne značky, logá, piktogramy atď. Prezentovaná môže byť aj súmernosť podľa zvislej roviny, ktorá je spojená s udržiavaním rovnováhy tela (Nováková & Novák, 2019).

Existuje pomerne veľké množstvo manipulatívnych prostriedkov, prostredníctvom ktorých majú žiaci možnosť nadobúdať skúsenosti s konceptom symetria (Žilková, 2010, Nováková & Novák, 2019, Šimčíková & Tomková, 2005). Pri niektorých je prioritná manipulácia s predmetmi v reálnom priestore, v iných prípadoch ide o prácu s digitálnymi prostriedkami vo forme hier. Návrhy na manipulačné predmetné, ale aj virtuálne aktivity, zamerané na skúmanie súmernosti predstavuje Žilková (2010). Poukazuje na rôzne možnosti aplikácie osovej súmernosti využitím zrkadla, v manipulatívnej verzii. Reprezentácie na vyššej úrovni abstrakcie sú často využité pri elektronických hrách, vytvorených v rôznych dynamických geometrických prostrediach. Na základe vyššie uvedených skutočností možno uvažovať o existencii rôznych typov reprezentácie objektov slúžiacich ako prostriedok na vytvorenie predstavy o koncepte symetria.

Bruner (1960) vymedzuje tri typy reprezentácií: (1) enaktívna – spojená s priamou činnostnou skúsenosťou; (2) ikonická – skúsenosti sú zaznamenávané pomocou obrazcov, zástupných modelov reálnych objektov a (3) symbolická – kde sa pracuje so symbolickým (matematickým) jazykom a zápisom. Jednotlivé typy reprezentácie majú svoj význam, preto je dôležité, aby bol v praxi aplikovaný každý z nich. Týka sa to aj matematických konceptov, kde sú dôležité ich rôzne reprezentácie v procese kreovania predstavy o danom pojme, pri riešení problémov, pri zaznamenávaní myšlienkových postupov a pod. Inak tomu nie je ani v prípade pojmu symetria.

Rôzne typy reprezentácií je možné využiť aj v činnostiach spojených s pojmom symetria. Enaktívna reprezentácia sa vyskytuje napríklad v činnostiach, kedy je využitá práca s geometrickým zrkadlom. Žiak tak má možnosť overiť vlastnosti objektu manipulačnou činnosťou s geometrickým zrkadlom. V zrkadle vidí obraz modelu, ktorý predstavuje vzor (konkrétny predmet, obrázok, časť obrázka a pod.). Ikonický typ reprezentácie je možné pozorovať v situáciách, kedy je práca realizovaná v rovine, napríklad na papieri, bez použitia pomôcok typu zrkadlo. Žiak má napríklad vytvoriť v štvorcovej sieti obraz útvaru (t. j. obraz vzoru v osovej súmernosti). Pri symbolickom type reprezentácie môžu byť za vzory považované rôzne abstraktné obrazce, symboly – napríklad noty, rôzne symboly pre rytmus, pohyb a pod.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) uvádza odporúčanie týkajúce sa využívania manipulatívnych činností pri identifikácii a znázorňovaní rôznych typov symetrií. Výsledky pozorovania riešenia úloh z oblasti symetrie predstavujú Hoyles & Healy (1997). V rámci štúdie boli pri práci detí evidované tri módy úlohy – enaktívna (pohyb modelu korytnačky), ikonická (vizualizácia cesty) a symbolická (záznam pohybu pomocou kódu). Aplikovaná bola aj činnosť spojená s prekladaním papiera, na ktorú nadväzovala práca v štvorcovej sieti znázornenej na papieri.

Predpokladom úspešného riešenia úloh využitím symetrie sú, ako uvádzajú Hoyles & Healy (1997), predchádzajúce osobné, životné skúsenosti žiaka, jeho práca v škole spojená s realizáciou aktivít, činností, riešenie úloh propedeutického charakteru. Ide predovšetkým o činnosti, ktoré využívajú manipuláciu s reálnymi objektami, resp. s ich rovinnými modelmi vo forme obrázkov. Modely objektov prechádzajú postupne rôznymi úrovňami abstrakcie – od konkrétnych objektov (ich modelov) až ku symbolickým reprezentáciám. Vo všetkých prípadoch ide o vizuálne modely objektov, či už priestorových alebo rovinných. Okrem vizuálnej prezentácie je možné aplikovať aj auditívne reprezentácie objektov, v ktorých sa vyskytujú elementy symetrie. Na zisťovanie schopnosti úspešne riešiť úlohy z oblasti osovej súmernosti sa ukazuje ako vhodný prostriedok súbor úloh s gradovanou úrovňou náročnosti (Xistouri, 2007; Sinclair & Kaur, 2011).

Zámerom príspevku je predstaviť námety aktivít, implementujúcich elementy hudobnej výchovy s využitím auditívnych reprezentácií symetrie. Niektoré z nich využívajú aj prvky spojené s pohybom v priestore. Spoločnou črtou návrhov je fakt, že sú realizované využitím skupinovej resp. frontálnej formy, čo predikuje aj rozvoj kooperatívneho učenia a sociálnych vzťahov v kolektíve žiakov. Prezentované budú ukážky aktivít, ktoré je vhodné aplikovať v edukácii na primárnom stupni vzdelávania, ako aj v príprave učiteľov v rámci ich vysokoškolského štúdia. Význam prípravy budúcich učiteľov v danej oblasti potvrdzuje aj Son (2006, In Jones & Tzekaki, 2016), ktorý konštatuje, že budúci učitelia na základných školách majú často limitované vedomosti o symetrii a zamieňajú si koncepty symetria a rotácia. Nedostatky v uchopení pojmov majú následne vplyv na spôsob, akým realizujú proces učenia danej problematiky v triede. Námety sú vytvorené tak, aby pri ich realizácii bolo možné úroveň náročnosti prispôsobiť cieľovej skupine. V každej z nich je možné identifikovať niekoľko elementov, ktoré predstavujú tzv. gradačné kritériá kognitívnej náročnosti aktivity. Je možné tak kreovať niekoľko variácií/obmien v závislosti od cieľovej skupiny, ako aj od nastavených cieľov práce a činnosti žiakov.

2. Pojem symetria v obsahu matematickej edukácie

Ako už bolo v úvode spomenuté, práca so súmernými (symetrickými) útvarmi je súčasťou aktivít realizovaných pri hrových činnostiach už v predškolskom veku. Predstavuje kľúčový predpoklad pre vytvorenie predstavy o koncepte osová súmernosť, ktorý je v školskej matematike v slovenskom kontexte sprístupnený na 2. stupni základnej školy. Vychádzajúc z analýzy obsahu kurikulárnych dokumentov (na Slovensku) pre matematické vzdelávanie od predprimárneho až po nižší sekundárny stupeň vzdelávania, uvádzame prehľad zastúpenia danej problematiky vo forme štandardov.

(1) Predprimárny stupeň vzdelávania: aj napriek skutočnosti, že v obsahových štandardoch nie sú explicitne špecifikované úlohy spojené s pojmom symetria (ani na propedeutickej úrovni), majú deti priestor na nadobudnutie prvotných skúseností so súmernými útvarmi (v rovine a priestore) a obrázkami (Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách, 2016).

(2) Primárny stupeň vzdelávania: obsahové a výkonové štandardy sú pre danú problematiku vymedzené v tematickom celku *Geometria a meranie* (Matematika – primárne vzdelávanie, 2015, s. 6).

Obsahové štandardy: zhodné zobrazenie – osová súmernosť (na propedeutickej úrovni); zhodné zobrazenie – posunutie (na propedeutickej úrovni), vzor, obraz; zväčšenie a zmenšenie rovinných útvarov v štvorcovej sieti, podobné útvary (na propedeutickej úrovni).

Výkonové štandardy: v štvorcovej sieti dokresliť (dorysovať) osovo súmerný obrázok;
v štvorcovej sieti dokresliť (dorysovať) zhodný obrázok;
zväčšiť a zmenšiť rovinné útvary v štvorcovej sieti (štvorec, obdĺžnik).

(3) Nižší sekundárny stupeň vzdelávania: v 5. ročníku, v tematickom celku *Súmernosť v rovine,* je možné identifikovať štandardy v danej oblasti (Matematika – nižšie stredné vzdelávanie. 2015, s. 9).

Obsahové štandardy: súmernosť a zhodnosť geometrických útvarov,
os súmernosti, osová súmernosť, útvary osovo súmerné, vzor, obraz, konštrukcia rovinného geometrického útvaru v osovej súmernosti.

Výkonové štandardy: pre daný bod nájsť (nakresliť/zostrojiť) bod, s ktorým je osovo súmerný podľa danej osi,
identifikovať rovinné geometrické útvary súmerné podľa osi,
nájsť (nakresliť/zostrojiť) os súmernosti dvojice bodov, úsečky,
nájsť (nakresliť/zostrojiť) osi súmernosti osovo súmerného útvaru, zostrojiť obraz bodu, úsečky, priamky, kružnice alebo jednoduchého útvaru (obrazca) zloženého z úsečiek a častí kružnice v osovej súmernosti,
pracovať s osovo súmernými útvarmi vo štvorcovej sieti, dokresliť, opraviť ich.

Výsledky obsahovej analýzy kurikulárnych dokumentov od predprimárneho, cez primárny až po nižší sekundárny stupeň vzdelávania ukazujú, že problematika osovej súmernosti je na prvých dvoch uvedených stupňoch vzdelávania prezentovaná cez činnosti, aktivity a úlohy propedeutického charakteru a do učiva je zaradená na druhom stupni základných škôl.

3. Návrhy aktivít s využitím elementov hudobnej výchovy

V ďalšej časti sú predstavené návrhy edukačných aktivít, ktoré je možné realizovať v rámci vyučovania matematiky. Aktivity sa netýkajú priamo učiva z oblasti geometrie, no aj napriek tejto skutočnosti obsahujú vlastnosti súmernosti. Návrhy využívajú elementy hudobnej výchovy v zmysle podporných prostriedkov pre porozumenie, resp. upevnenie vlastností pojmov symetria, osová súmernosť, zrkadlový obraz. Spoločným cieľom návrhov je oboznamovanie sa s pojmami vzor, obraz, osová súmernosť – jej objavovanie a vlastnosti. Zámerom prezentovaných námetov je poskytnúť podnety na vnímanie, skúmanie a porozumenie symetrie aplikovaním zvukových a rytmických modelov a pohybových aktivít, ako aj využitím rôznych typov reprezentácií daného pojmu.

- Aktivita 1: Hudobný zrkadlový obraz

Aktivita využíva hudbu a jej elementy ako podporný prostriedok pre porozumenie konceptu symetria (Mall et al., 2016).

Žiaci skúmajú osovú súmernosť prostredníctvom piesne, hry na inštrumentálne nástroje a fyzického pohybu. Aplikovaním tímovej práce a spolupráce budú schopní využívať hudbu ako podporný prostriedok pri ďalšom rozvoji porozumenia pojmu transformácia v zmysle geometrického zobrazenia.

Z elementov hudobnej výchovy sú v aktivite aplikované kompozícia a improvizácia, fyzické vnímanie hudby a fyzická reakcia na hudbu. Z pohľadu matematiky je využité matematické uvažovanie a vytváranie súvislostí, komunikácia nápadov a myšlienok z matematickej oblasti využitím viacerých formálnych aj neformálnych reprezentácií a pojem osová súmernosť.

Pred samotnou realizáciou by mali mať žiaci osvojené elementárne vedomosti o pojme osová súmernosť (symetria) – v zmysle jej porozumenia. Z hudobnej výchovy je nutné porozumenie a uvedomenie si výšky tónu a skúsenosti s grafickým/notovým zápisom.

Postup:

Odporúča sa realizovať aktivitu v miestnosti, kde je vytvorený dostatočný priestor na to, aby si žiaci mohli sadnúť na zem, do kruhu a pracovať v skupinách. Učiteľ zaspieva alebo zahrá jednoduchú hudobnú frázu s reflexnou symetriou/osovou súmernosťou (fráza a jej „retrográdny" efekt - napr. C D E E D C alebo rytmický vzor, ktorý má prvky symetrie). Prezentovaný môže byť aj vzor v podobe postupnosti pohybov tak, aby mal vlastnosti symetrie (napríklad: krok, krok, krok, skok, skok, krok, krok, krok a pod.). Prípadne je prezentovaná postupnosť zvukov využitím hry na tele (napríklad: plesknutie, lúsknutie, lúsknutie, dupnutie, dupnutie, lúsknutie, lúsknutie, plesknutie).

Žiaci pracujú v skupinách alebo vo dvojiciach a pokúšajú sa zistiť, kde je v prezentovanej ukážke pomyselná os súmernosti, napríklad identifikovaním dvoch častí frázy, ktoré sú navzájom symetrické (jedna je zrkadlovým obrazom druhej). Danú frázu si môžu vypočuť aj viackrát. Môžu sa pokúsiť zaznamenať frázu symbolmi alebo ju fyzicky znázorniť pomocou pohybov. V ďalšej časti žiaci ďalej pracujú v skupinách alebo vo dvojiciach a pomocou osovej súmernosti (zrkadlovej symetrie) tvoria vlastné návrhy jednoduchej frázy. Môžu pritom využiť rôzne zvuky, nástroje (napr. Orffov inštrumentár), hru na tele, pohyby a pod. Návrhy sú následne prezentované ostatným skupinám spolu s vysvetlením a zdôvodnením prečo je ich fráza symetrická. Žiaci pritom hľadajú os súmernosti (reflexnej/zrkadlovej symetrie).

Odporúčané je mať vopred pripravené pomôcky: farebné perá, flipchartový papier, vyladené bicie nástroje (s používaním ktorých už majú žiaci skúsenosť), orffove nástroje. Náročnosť aktivity je možné gradovať na základe niekoľkých atribútov: dĺžka prezentovanej frázy, počet zvukov, pohybov, rôznorodosť použitých zvukov, pohybov, krokov, smer pohybu a pod.

- Aktivita 2: Zahraj symetrické číslo

Aktivita využíva akustickú reprezentáciu *n*-ciferných prirodzených čísel v desiatkovej číselnej sústave.

Cieľom činnosti z pohľadu matematiky je identifikovať resp. vytvoriť symetrické *n*-ciferné prirodzené číslo na základe jeho akustickej reprezentácie v desiatkovej číselnej sústave. Číslo bude považované za symetrické, ak pre jeho zápis platí, že poradie cifier je v smere zľava doprava rovnaké ako v smere sprava doľava. Z hudobnej výchovy sú v aktivite aplikované pojmy rytmus, metrum, metrorytmus. Pre realizáciu aktivity je potrebné, aby žiaci ovládali pojmy číslo, číslica, jednotky, desiatky, stovky, skrátený a rozvinutý zápis čísla v desiatkovej číselnej sústave, aby správne vedeli prečítať *n*-ciferné čísla.

Postup:

V úvode je vhodné zopakovať možnosti pre grafické znázornenie viacciferných čísel, s ktorými pracovali na vyučovaní, kde sú pre číslice jednotlivých rádov využité konkrétne symboly. Žiakom sú následne prezentované zvukové modely prirodzených čísel. Úlohou je identifikovať dané číslo na základe transformácie vopred dohodnutých zvukových kódov (napríklad: stovky – lúsknutie, desiatky – potlesk, jednotky – dupnutie). Počet zvukov prislúchajúcich danému rádu je postupne pretransformovaný na číslicu/číslice (daného rádu), až je identifikované dané prirodzené číslo. Úlohou je určiť, či dané zahrané číslo je/nie je symetrické. V prípade, že žiaci majú problém s udržaním počtu zvukov v pamäti, môžu si ich postupne zapisovať. Odporúča sa, aby zvuky boli prezentované v poradí od číslice najvyššieho rádu. Napríklad je zahrané číslo 535: 5-krát lúsknutie, 3-krát potlesk, 5-krát dupnutie. Na spôsobe kódovania je možné sa dohodnúť so žiakmi a používať vopred dohodnuté zvuky na reprezentáciu číslic jednotlivých rádov v danom čísle. Dôležité je počas celej aktivity používať rovnaké kódovanie.

ISSN 2694-8133

V ďalšej časti žiaci v skupinách (dvojiciach) vytvárajú akustické modely čísel tak, aby boli symetrické. Ostatní žiaci, na základe prezentácie posúdia, či zahrané čísla majú požadovanú vlastnosť.

Obmeny:

- v prípade gradácie úlohy je možné zmeniť poradie prezentovaných zvukov – od jednotiek, k desiatkam atď.;
- možné je modelovať aj také čísla, v zápise ktorých sa vyskytuje číslica nula (daný zvuk nezaznie);
- v závislosti od schopností cieľovej skupiny je možné voliť rôzny počet cifier v čísle (3, 4, 5, 6, 7).

4. Záver

Elementy hudobnej výchovy predstavujú prostriedky, ktoré je možné využiť pri tvorbe modelov pojmov vyskytujúcich sa v matematickej edukácii. Predstavené boli námety na aktivity zamerané na poznávanie a osvojenie si pojmu osová súmernosť. V aktivitách boli využité rôzne typy reprezentácií pojmu symetria, využívajúce pohyb, zvuk, symboly, pričom tie boli vytvorené na rôznej úrovni abstrakcie. Typ využitého modelu môže byť indikátorom úrovne náročnosti aktivity, či úlohy. Naznačené boli rôzne možnosti pre atribúty kognitívnej náročnosti, na základe ktorých je možné kreovať súbory gradovaných činností. Hudobná výchova poskytuje možnosti na tvorbu auditívnych modelov matematických konceptov, ktoré sú vzhľadom na abstraktný charakter, vo väčšine prípadov na vysokej úrovni kognitívnej náročnosti. Komplementom k abstraktným zvukovým modelom sú iné, menej abstraktné modely, akými sú napríklad pohyb, gestikulácia, vlastné návrhy symbolov.

Ďalšie príklady edukačných aktivít, ktoré integrujú obsah matematiky a hudobnej výchovy je možné nájsť v prácach Hnatová 2020a, 2020b, 2020c, Hnatová & Prídavková 2019, 2020, Prídavková, 2020.

Acknowledgements

Príspevok je výstupom grantového projektu KEGA 028PU-4/2019 *Inkorporácia hudobných činností do matematickej pregraduálnej prípravy študentov v študijnom odbore Predškolská a elementárna pedagogika*

Literatúra

Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Oxford, England: Harvard University Press.

Clements, D., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math.* Routledge. N.Y. and London.

Hnatová, J. (2020a). Presah učebných štýlov žiakov do výučby matematiky podporovanej začlenením hudobných elementov. In: *Osvita i suspiľstvo V* (s. 33-40). Opole: Wyższa Szkoła Zarządzania i Administracji w Opolu.

Hnatová, J. (2020b). Hudobné podnety v matematickej edukácii na primárnom stupni vzdelávania – rovnosti a rovnice s Geogebrou. In: *Dva dny s didaktikou matematiky 2020* (s. 52-56). Praha: PF UK v Praze.

Hnatová, J. (2020c). Interaktívny pracovný list rovnosti s notami. *Bigeche*, *23*, 52-61.

Hnatová, J. & Prídavková, A. (2019). Propedeutika zlomkov v matematike s využitím hudby a počítačov. *South Bohemia Mathematical Letters,* 34-41.

Hnatová, J. & Prídavková, A. (2020). Matematika v hudobnej edukácii na primárnom stupni vzdelávania – rytmické modely. In: *Jak učit matematice žáky ve věku 10-16 let* (s. 38-47). Praha: JČMF.

Hoyles, C., & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *2(1)*, 27-59.

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In: *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense.

Jorgensen, R., & Dole, S. (2011). *Teaching mathematics in primary school.* Sydney: Allen & Unwin.

Kolodziejski, M. (2012). Developing and stabilised musical aptitudes versus non-verbal production and readiness for improvisation in elementary school pupils demonstrating significant mathematical abilities. *Journal of Educational Review, 5(2)*, 173-182.

Luczak, A. (2015). Tvorba matematických pojmov v hudobnej výchove na primárnom stupni integrovaného vzdelávania (na prvom stupni základnej školy). *Múzy v škole, 20*(3-4), 50-69.

Mall, P., Spychiger, M., Vogel, R., & Zerlik, J. (2016). *European Music Portfolio (EMP) – Maths 'Sounding Ways into Mathematics'. Teacher´s Handbook.* Frankfurt: University for Music and Performing Arts Frankfurt.

Matematika – nižšie stredné vzdelávanie. (2015). Bratislava: ŠPÚ. https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf.

Matematika – primárne vzdelávanie. (2015). Bratislava: ŠPÚ. https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles, Standards, and Expectations* (content standards). https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Principles,-Standards,-and-Expectations/.

Nováková, E., & Novák, B. (2019). *Matematická pregramotnost a učitelé mateřských škol.* Brno: MU.

Prídavková, A. (2020). Matematická úloha s elementami hudobnej výchovy – prostriedok rozvoja pracovnej pamäti. *Elementary Mathematics Education Journal, 2020(1)*, 53-62. http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol2No1/Pridavkova_2020_Vol2No1.pdf.

Sinclair, N., & Kaur, H. (2011). Young children's understanding of reflectional symmetry in a dynamic geometry environment. In B. Ubuz (Ed.), (2011). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Developing Mathematical Thinking*. Vol 4 (s. 193-200). Ankara, Turkey: PME.

Šimčíková, E., & Tomková, B. (2015). *Matematika v predškolskej edukácii*. Prešov: PF PU.

Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách. (2016). Bratislava: ŠPÚ. https://www.statpedu.sk/files/articles/nove_dokumenty/statny-vzdelavaci-program/svp_materske_skoly_2016-17780_27322_1-10a0_6jul2016.pdf

Xistouri, X. (2007). Students´ ability in solving line symmery tasks. In: *How do students from primary school discovery the regularity.* (s. 526-535).

Žilková, K. (2010). Manipulácie na tému súmernosť. In: *Acta Facultatis Paedagogicae Universitates Tyrnaviensis. C(14)*, (s. 3-9). Trnava: TU Pedagogická fakulta.

UČÍME BUDOUCÍ UČITELE LOGICKY MYSLET?

Jana PŘÍHONSKÁ, Jiří BŘEHOVSKÝ
Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická (Česká republika)
jana.prihonska@tul.cz, jiri.brehovsky@tul.cz

Abstrakt

V příspěvku se zaměříme na rozvoj schopností učitele porozumět myšlenkám žáka při zadávání a řešení logických úloh. Nezastupitelnou roli při řešení úlohy hraje správný postoj a vedení učitele. Žák potřebuje dostatečný prostor a čas k objevení potřebných postupů a logických závěrů. Východiskem pro přípravu budoucích učitelů je pochopení obtížnosti úlohy z pozice žáka. Na rozboru konkrétní úlohy si ukážeme přístup, jak je možno tyto postupy u budoucích učitelů rozvíjet. Za jednu ze základních činností učitele při hledání fenoménů porozumění, obtížnosti a správné argumentace považujeme rozbor žákovského řešení, proto uvádíme nejprve ukázku s komentářem k žákovskému řešení dvou kombinatorických problémů.

Klíčová slova: logická úloha, logické myšlení, vyvozování úsudku, řešitelská strategie

DO WE TEACH FUTURE TEACHERS TO THINK LOGICALLY?

Abstract

In this paper we focus on the development of the teacher's ability to understand the pupil's ideas in assigning and solving logical tasks. The right attitude and guidance of the teacher plays an irreplaceable role in solving the task. The pupil needs enough space and time to discover the necessary procedures and logical conclusions. The starting point for the preparation of future teachers is to understand the difficulty of the task from the position of a pupil. In the analysis of a specific task, we will show the approach of how these procedures can be developed with future teachers. The analysis of pupils' solutions we consider as one of the basic activities for teachers for phenomena understanding, difficulty and correct argument. So first we will present a sample with a commentary on pupil's solutions of two combinatorial problems.

Keywords: logical task, logical thinking, inferring judgment, problem solving strategies

1. Úvod

Jedním z cílů matematického vzdělávání je rozvíjet schopnost žáků řešit jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.

ISSN 2694-8133

I přes běžně přijímaný názor, že matematika přispívá k rozvoji logického myšlení, není naplňování tohoto cíle snadné, na což poukazují také výsledky žáků a studentů ČR v mezinárodních srovnávacích studiích PIRLS a TIMSS (PIRLS & TIMSS, 2011). I když je matematika a její výuka založena na přesné logické výstavbě, mnohdy se zcela tuto skutečnost nedaří při výuce na žáky přenést. Cílem přípravy budoucích učitelů by proto mělo být naučit je správně formulovat a modifikovat úlohy a zamýšlet se nad různými řešitelskými strategiemi. Následně analyzovat řešení žáka a odstranit příčiny jeho chybných úvah

2. Jak rozvíjet myšlení žáků

Název článku úzce koresponduje s otázkou: *Je možné naučit studenty logicky myslet?*, která zazněla na semináři projektu *Logika jako součást pedagogického vzdělávání*. Prof. Kuřina tuto otázku transformuje na poněkud skromnější problém: *Je možné učit mládež myslet?* (Kuřina, 2002).

Myšlení není reprodukční proces a naučit se myslet je v podstatě totéž, jako naučit se řešit problémy. Ve škole učíme žáky řešit určité typy problémů, učíme je pečlivému logickému rozboru jazyka, vedeme je k poznání výrokové a predikátové logiky a aplikace pravidel vyvozování. To však ještě neznamená, že je učíme myslet. Dítě se učí myslet od prvních kontaktů s realitou, při poznávání mateřského jazyka, při řešení životních konfliktů. Naší snahou je přirozeně připravit studenty, budoucí učitele tak, aby svým přístupem rozvíjeli myšlení žáků již od první třídy. Prof. Kuřina (2007) upozorňuje na případy, kdy učitel opraví správné řešení žáka jako chybné jen proto, že se striktně drží výsledku uvedeného v učebnici. Rozvíjet myšlení je možné jen v rozumně koncipovaném vzdělávacím procesu, kde nepůjde jen o předávání hotové struktury jednotlivých disciplín, ale kde bude dán prostor pro vznik poznatků, místo reprodukování hotových schémat, kde žák nebude pouze naslouchat, ale naučí se přemýšlet nad tím, čemu se učí.

Myšlení je nejvyšší forma aktuálního obrazu objektivní skutečnosti, spočívající v cílevědomém, zprostředkovaném a zobecněném poznávání podstatných souvislostí a vztahů předmětu subjektem, ve vytváření nových idejí, v předvídání událostí a činů lidí. Vzniká a realizuje se v procesu kladení a řešení praktických i teoretických problémů (Melichar, 2007). Proces myšlení se opírá o určité myšlenkové operace. K základním operacím myšlení patří *srovnávání* a *analogie* (podobnost), *rozlišování*, *generalizace* (zevšeobecnění) a *abstrakce* (myšlenková činnost, při níž se cestou analýzy určitých jevů či pojmů vytvářejí obecné poznatky). Opírá se však i o smyslovou zkušenost, avšak na rozdíl od smyslového obrazu jeho výsledky přepracovává, poskytuje možnost získávat poznatky o takových vlastnostech a vztazích předmětů, jež jsou bezprostřednímu smyslovému poznání nedostupné (Melichar, 2007).

Schopnost provádět logicko-matematické operace se objevuje již při nejobecnější činnosti v kojeneckém věku a postupně se rozvíjí v prvním a druhém desetiletí života, až obsáhne poměrně velký počet nervových center, která pracují ve vzájemné shodě. I když dojde k poškození některého centra, logicko-matematické myšlení to většinou nezasáhne. Bližší vymezení a vysvětlení psychologických záležitostí logicko-matematického myšlení a schopností můžeme nalézt v rozsáhlém díle Jeana Piageta.

Prof. Rosický (2006) z Přírodovědecké fakulty MU uvádí: ***„Matematika má vychovávat k logickému a korektnímu myšlení“.*** Matematika poskytuje prostor pro tvůrčí práci – dává prostor pro rozvíjení schopnosti vytvářet úsudky, analytické myšlení, fantazii, dává i prostor jistým estetickým kritériím. Aby však mohla tuto svoji úlohu plnit, je nutné u žáků probudit zájem o matematiku. Určitý estetický moment může v matematickém uvažování hrát jistou roli. Matematik si musí umět vytvořit mentální představu situace, kterou se zabývá, a pracovat s ní jako s realitou. Jinými slovy představit si ten svět, který se pak ve finále zobrazí nějakými vzorečky a formulkami. Většinou přitom platí, že výsledná řešení jsou jednoduchá, elegantní a krásná. Je to samozřejmě estetika, která není přístupná každému – podobně jako hudba také vyžaduje určitou průpravu (Rosický, 2006).

Jedním z důležitých aspektů vyučování matematice v dnešní době je neustále překonávat formalismus v poznávání ve výuce. Je nutno odpoutat se od transmisivního vyučování, založeného na pouhém předávání poznatků, instrukcí a návodů, jak postupovat. Takovýto formální přístup k poznávání vede pouze k ukládání informací do paměti, pouhému reprodukování poznatků u zkoušení a rychlému zapomínání. Na určité nechuti žáků k matematice se podílí mimo jiné právě způsob, jakým je vyučována. Na tom určitě hodně záleží. Matematice a zejména pak učitelům matematiky se mnohdy daří přehnaně mechanickým způsobem odradit hodně studentů, kteří by o ni mohli mít zájem. Po studentech a žácích by se nemělo chtít jen počítat určité příklady nebo memorovat fakta. Učitel by měl vyvolat zájem, pokusit se ukázat, co je matematické uvažování, čím může být matematika v určitých oblastech prospěšná. Látku často lépe vysvětlí motivační příklady než nějaké formální vysvětlování za pomocí výrazů: „Nechť x je…“. Na druhou stranu se takový výklad nesmí stát pouhým nic neříkajícím „plácáním“ (Rosický, 2006). Rozvíjet myšlení žáků a studentů s cílem procvičovat jejich logické uvažování je nutno již na 1. stupni ZŠ.

3. Podstata matematického myšlení

Matematické myšlení vychází ze znalosti matematických pojmů (definice, věta, axiom, předpoklad a tvrzení věty, věta obrácená, důkaz věty, výrok, výroková forma, množina, relace, operace, rovnice, rovnost, nerovnice, nerovnost, atp.), ze znalostí matematických teorií (matematická logika, teorie množin, statistika, pravděpodobnost, teorie řešení rovnic, infinitesimální počet, geometrie, teorie algebraických struktur, atp.), matematické frazeologie a znalostí matematické symboliky. K tomu, abychom mohli pochopit základní matematické pojmy, je třeba mít dobré základy logiky. Základy logiky jsou nutnou znalostí k tomu, abychom si uvědomili, co je logické myšlení. (Příhonská, 2008)

Logické myšlení je v psychologickém slovníku charakterizováno jako vývojově vyšší forma myšlení, které je založeno na správném usuzování podle zákonů formální logiky. Slovník cizích slov vymezuje formální logiku jako učení o zákonech a pravidlech nutných pro získávání pravdivých závěrů při usuzování. Za jejího zakladatele je považován Aristoteles. Oč cennější je správné řešení problému získané usuzováním podle daných pravidel oproti náhlému nápadu – vhledu, i když nelze výsledek logicky zdůvodnit? Právě díky druhé variantě řešení problému přeci vzniklo mnoho slavných vynálezů, které lidstvo používá dodnes.

Dnešní věda i školství vyžadují řešit problémy pružně, rychle, přesně, dle daných pravidel postupů. Kdo to neumí, mívá při studiu a potom i v mnoha směrech v praktickém životě problémy. Z toho vyplývá, že je prospěšné logické myšlení rozvíjet.

4. Logické myšlení

Jak již bylo řečeno, logické myšlení je takové myšlení, které vychází ze znalostí základů logiky. Úzce souvisí s pojmem výroku a rozhodováním o jeho pravdivosti či nepravdivosti, s mateřským jazykem, vyjadřováním se ve větách a určováním jejich pravdivosti anebo nepravdivosti. Věta je jazykové vyjádření myšlenky. Základním pojmem logiky je pojem *výrok*.

Za výrok považujeme *každou oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco, co může být jen pravdivé anebo nepravdivé*. Většina lidí je v domnění, že výrok je vždy pravdivý. Výrokem je však i oznamovací věta nepravdivá. Věta „Jedna a jedna rovná se pěti“ je výrokem. Jde o oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco, co je nepravdivé. Tuto oznamovací větu lze zapsat místo slov číselnými symboly „1 + 1 = 5“. Zápis je různý, ale slovní vyjádření je stejné. Věty „Přeskoč!“, „Kolik je hodin?“ nejsou výrokem, neboť nejde o oznamovací věty.

ISSN 2694-8133

Na druhé straně např. oznamovací věta "Kočka je násobkem psího ocasu", není výrokem, neboť srozumitelně nic neoznamuje (Melichar, 2007).

U výroků zjišťujeme jejich pravdivost, tj. zda výrok je či není pravdivý. Jak zjišťujeme tuto pravdivost? Je zřejmé, že na základě svých životních zkušeností, z odborné literatury, dnes i z Internetu a na základě informace od věrohodných osob. I zde však může dojít k omylu. Příkladem mohou být rozpory v některých uváděných datech – vynález knihtisku je např. v různé literatuře uváděn různým datem. Je zřejmé, že praxí v takovém případě rozhodnout nemůžeme. Výrokem můžeme tedy rozumět tvrzení (nebo popření), které dává smysl, když si před něj položíme otázku: *Je pravda, že…?* Na tuto otázku můžeme odpovědět buď *ano* (jde o výrok pravdivý) nebo *ne* (výrok nepravdivý), (Melichar, 2007).

Výrok, který něco tvrdí nebo popírá, budeme nazývat *kategorickým.* Pravdivost kategorického výroku je určena vztahem ke skutečnosti. Výrok „Prší" není pravdivý, pokud nepadne ani kapka. Pravdivostní hodnota kategorického výroku je objektivní záležitost. Není to záležitost toho, kdo to říká. V některých výrokách se udává *počet nebo odhad počtu osob, věcí, matematických objektů* apod., které mají jistou vlastnost. Jde o údaje vyjádřené slovy: aspoň jeden, aspoň dva, aspoň tři,…, právě jeden, právě dva, …, nejvýše jeden, nejvýše tři, …, každý, všichni (Melichar, 2007). S přesným chápáním těchto pojmů, resp. s pochopením množství, které vyjadřují, mají žáci i studenti učitelství značné potíže. Ještě větší potíže pak nastávají při negování těchto pojmů. Ve spojení např. … *alespoň tři jsou…* často dochází k negování nejen kvantifikátoru, ale i příslušného slovesa, jako např. ... *nejvýše dva nejsou ...*

5. Logické úlohy v učebnicích matematiky pro 1. stupeň základní školy

V první fázi řešení projektu jsme se zaměřili na rešerši učebnic matematiky pro první stupeň základní školy. Vybrali jsme učebnice, které jsou při výuce nejvíce využívány, a zaměřili jsme se na identifikaci typových úloh, které mají potenciál rozvíjet logické myšlení. U každé učebnice jsme zjišťovali výskyt logických spojek (konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence), dále pak negace a kvantifikátorů. Výstupem z této analýzy je navržená kategorizace úloh, která bude blíže popsaná v článku pro Aplimat21 a proto ji na tomto místě nebudeme více rozvádět. Ukazuje se, že největší zastoupení mají úlohy s využitím konjunkce ve smyslu výčtu prvků, úlohy s uvedením pokynů (vypočítej a seřaď), dále pak úlohy s explicitním zadáním (využití logických spojek – nejčastěji implikace). Zvláštní pozornost zasluhuje kategorie logických úloh, které lze zařadit do tzv. „rekreační matematiky" a při jejichž řešení je nutno z daných předpokladů vyvozovat jisté závěry. Řešitel je vyzýván k logickému úsudku na základě jeho předchozích znalostí, dovedností a zkušeností. Např. v učebnici pro 5. ročník je úloha: *Když jsou x a y čísla sudá, pak i $x + y$ je sudé. Je toto tvrzení pravdivé?* (Hejný et al., 2001, 5. ročník). Nezastupitelnou roli při řešení logických úloh hraje správný postoj a vedení učitele, který musí dát žákovi prostor k objevení potřebných postupů a logických závěrů.

6. Logické úlohy v přípravě budoucích učitelů

V další části se zaměříme na rozvoj schopností učitele porozumět žákovi, resp. jeho myšlenkám při zadávání a řešení logických úloh. Východiskem pro přípravu budoucích učitelů je pochopení obtížnosti úlohy z pozice žáka, které je charakterizováno následujícími prvky (Příhonská, 2008):

- Porozumění úloze – úloha se jeví obtížná z hlediska intelektuálního
- Užití konkrétní řešitelské strategie
- Možné propojení shledaných prvků – žák něco ví a něco ne

ISSN 2694-8133

- Úmornost řešení – obtížnost je spojována s úmornou a titěrnou prací, která je časově náročná nebo jen s kvantitou použitých znaků nikoli ve smyslu kombinování různých možností
- Evidence řešení – problémem je volba vhodného jazyka k vyjádření vlastních myšlenek

S výše uvedenými prvky úzce souvisí vytváření správných úsudků, které následně vedou k volbě vhodné řešitelské strategie, která ve finále nevede do slepé uličky a probouzí u žáků objevitelskou zvědavost.

6.1. Tvorba úsudků

Logický úsudek, jinými slovy, logická úvaha je velice účinnou strategií při řešení úloh. Spočívá ve vyvození soudu z jiných soudů. Je používán většinou s jiným strategiemi řešení k dosažení platného závěru ze série tvrzení. Základními pravidly správného myšlení jsou pak logické zákony, které musíme při přemýšlení dodržovat – zákon totožnosti, zákon sporu, zákon vyloučení třetího a zákon dostatečného důvodu. Správné a jednoduché usuzování je velice důležité např. při řešení kombinatorických problémů a na ně navazujících problémů z pravděpodobnosti, které rozvoj logického myšlení významně podporují. Uveďme ukázky problémů, které lze řešit pouhou logickou úvahou bez využití hlubších znalostí z kombinatoriky, a jejichž rozmyšlení ponecháme čtenáři:

V obchodě měli 5 druhů lízátek. Kolika způsoby mohla Katka koupit 3 lízátka?

Určete počet anagramů, které lze získat z písmen slova ACONCAGUA (nejvyšší hora Jižní Ameriky).

Ve skupině 9 mincí osm váží stejně a devátá je těžší. Na pohled jsou mince stejné. Použitím miskových vah určete nejmenší počet vážení potřebných na označení těžší mince.

Komentář

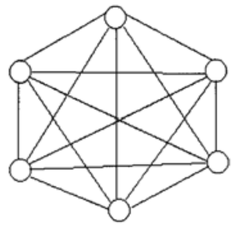
První dva problémy nejsou záměrně blíže specifikovány z hlediska možnosti opakování lízátek (stejná, či různá) a smysluplnosti vytvořených slov v případě anagramů. Před vlastním řešením by měly předcházet rozbor zadání a diskuze se žáky, případně následná diskuze k nalezenému řešení.

6.2. Rozbor žákovských řešení

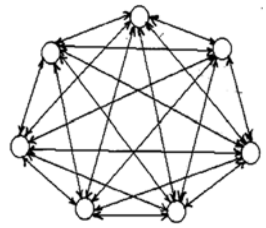
Pokud chceme naučit žáky na prvním stupni využívat logickou úvahu, jako jednu z řešitelských strategií, pak musíme tímto způsobem vést i studenty, budoucí učitele, při jejich přípravě na vysoké škole. Na rozboru konkrétní úlohy si ukážeme přístup, jak je možné tyto postupy rozvíjet. Začneme však nejprve ukázkou a rozborem žákovského řešení dvou kombinatorických problémů (P1, P2). Rozbor žákovského řešení považujeme za jednu ze základních činností učitele při hledání fenoménů porozumění, obtížnosti a správné argumentace.

P1	*Na turnaji ve volejbale hraje šest družstev systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?*
P2	*Do soutěže v košíkové bylo zapojeno 7 družstev ze 7 různých měst. Kolik zápasů bylo sehráno, když se hrálo v sídelním městě **každého** družstva?*

Řešení pomocí grafů ukazuje Obrázek 1. a Obrázek 2.:



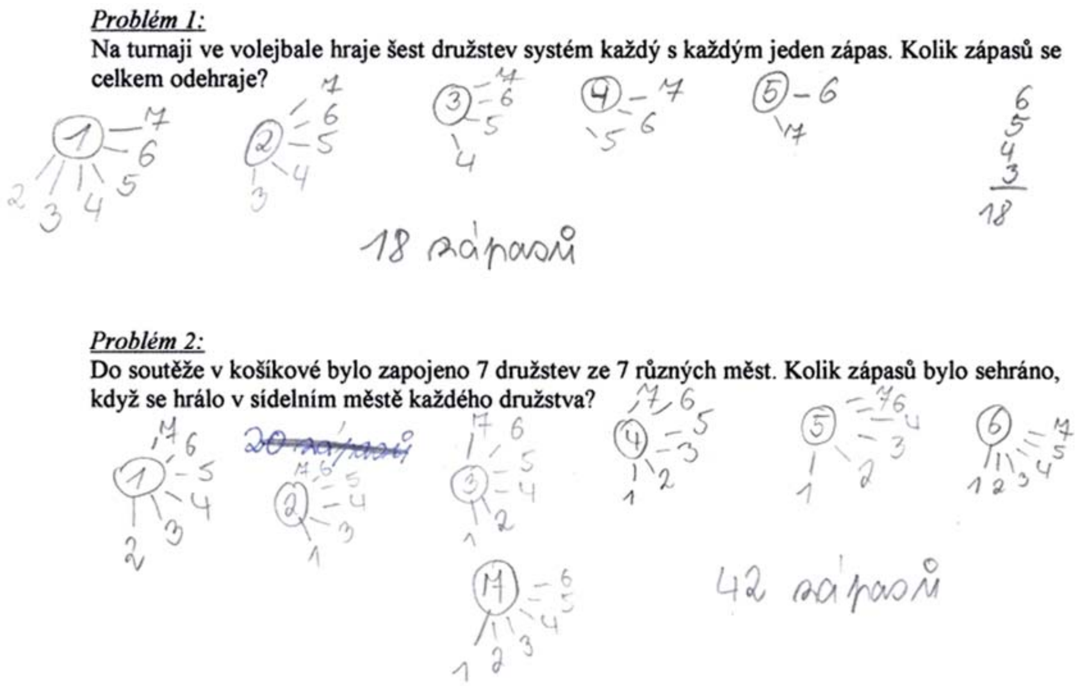
Obrázek 1. Řešení P1



Obrázek 2. Řešení P2

Nicméně žáci využívají nejvíce grafické znázornění pro dílčí zápasy (Obrázek 3.)

Ukázka žákovského řešení



Obrázek 3. Ukázky žákovských řešení

Komentář

Zadané problémy se ukázaly jako problematické pro studenty učitelství z hlediska pochopení rozdílnosti v zadání a způsobu řešení. Jejich řešení vyvolalo diskuzi, v jejímž závěru se objevily náměty pro novou formulaci úlohy a byly formulovány návody pro řešení a porozumění textu pro žáky. Např. místo formulace …*v sídelním městě* ***každého*** *družstva*… použít: …*v každém městě každý s každým*… nebo …*v každém městě vzájemná odvetná utkání*… Je však na zvážení, zda nová formulace nedává již přímý návod pro řešení, zatímco původní formulace vybízí k důkladnějšímu zamyšlení. Přestože se graf u obou problémů liší pouze svojí orientovaností, působí řešení potíže.

Diskuze k předloženým žákovským řešením zaznamenala následující tvrzení.

U problému 1:

- Není pravda, že když první hrál s druhým, tak druhý hrál s prvním.
- Není pravda, že jestliže hrál první s druhým, tak druhý s prvním nehrál.

U problému 2 naopak:

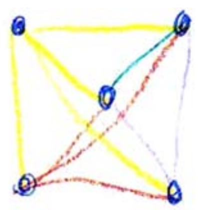
- Co znamená v sídelním městě každého družstva: nejdříve tam a pak ve druhém městě?
- Otázka byla též: v čem je rozdíl od předchozího problému?

Uvedená tvrzení byla ve shodě se zaznamenanými výroky žáků ve škole. Daná problematika velice úzce souvisí se slovním vyjádřením myšlenky a usuzováním, jinými slovy odvíjí se od jazykových schopností a schopností porozumět psanému či mluvenému slovu a tedy s integrací českého jazyka.

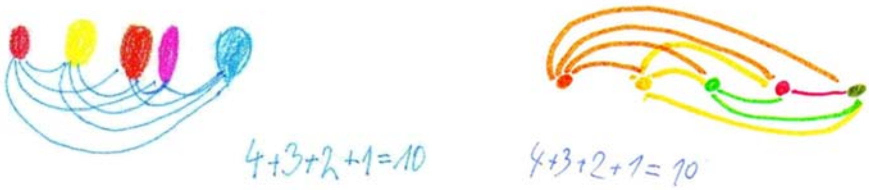
Analogická úloha byla zadána v rámci diplomové práce (Vilimovská, 2016):

Ve škole se koná florbalový turnaj. Přihlásilo se do něj pět družstev: TUČŇÁCI, MISTŘI, PARTIČKA, SPRÁVNÁ PĚTKA a NEBOJSOVÉ. V turnaji si zahrají všechny týmy navzájem (každý s každým jednou). Kolik bude celkem zápasů?

Ani v tomto případě žáci nevyužívají prioritně uzlový graf jako jednu z možných strategií řešení. Přijatelné se pro ně jeví řešení pomocí tabulky, výpisu všech možností nebo grafického znázornění. Využití grafu ilustruje obrázek 4, obrázek 5a,b ilustruje řešení, kde žák na základě grafického znázornění objevuje kombinatorický princip součtu (Melichar, 2007).



Obrázek 4. Využití grafu v řešení žáka



Obrázek 5a,b. Grafické znázornění – kombinatorické pravidlo součtu

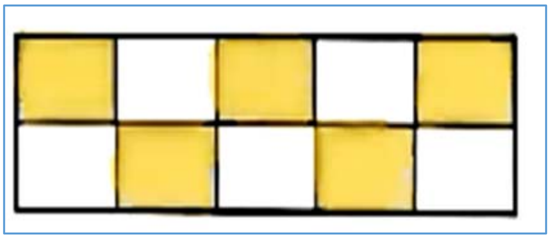
6.3. Ukázka rozboru vybrané úlohy studentkou učitelství 1. stupně základní školy

Poslední ukázka se týká samotné činnosti učitele při přípravě na zadání úlohy žákům – rozbor, formulace, modifikace úlohy pro využití ve výuce, v neposlední řadě zamyšlení se nad různými řešitelskými strategiemi. Úloha byla zadána v rámci předmětu *Matematika pro praxi*. Studenti měli nejen úlohu vyřešit, ale zamyslet se nad možnou modifikaci na prvním stupni a využít tak vhodné metody řešení.

ISSN 2694-8133

Úloha (Koman & Dřízal, 1995)

Doplňte na všechna pole šachovnice na Obrázku 6 čísla 1, 2, 3, 4, …, 9, 10 (na každé právě jednou) tak, aby čísla ve žlutých polích byla vždy součtem čísel v přilehlých bílých polích.



Obrázek 6. Magická šachovnice

Poznámka:

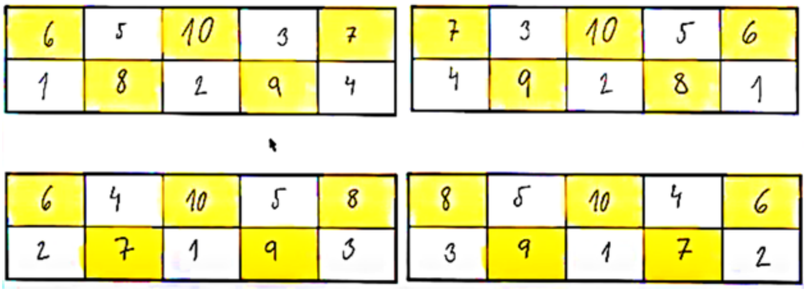
Stejná úloha byla zadána v rámci zkoumání rozdílů ve strategiích u devítiletých žáků a identifikaci nadprůměrných žáků, které popisuje Kaslová (2007). Ukazuje se, že u zdánlivě jednoduché úlohy zůstalo řešení u některých žáků ve fázi úmorného, víceméně systematického zkoumání pokusů. Úloha je opakovaně zadávána i studentům učitelství 1. stupně a i pro ně se ukazuje jako celkem obtížná – nejen z hlediska porozumění zadání, ale i z hlediska pochopení matematických vztahů a vlastního řešení. Zaměříme se na logickou úvahu při zpracování této úlohy, s ohledem na její využití na prvním stupni.

První metoda řešení: **Pokus – ověření – korekce**

Strategie je zdokonalením strategie pokus-omyl, která vede k řešení často až po mnoha pokusech, mnohdy i neúspěšných, které k řešení nemusí vést vůbec. Metoda pokus-ověření-korekce obsahuje určité zákonitosti. Řešitel nejprve odhadne řešení, ověří ho a nový odhad dělá již na základě předchozího výsledku. (Eisenmann at al., 2015)

Dále uvádíme postup, který zvolila studentka, přímo s komentáři k řešení. Zde je vidět prvopočáteční odhad a uvědomění si souvislostí mezi čísly, které vedou k dalším úvahám a nalezení správného řešení.

- *Vezmeme čísla 1-10 a zkoušíme doplňovat/dosazovat do zadání, aby byla splněna všechna pravidla* – viz Obrázek 7.



Obrázek 7. Nalezené řešení

Studentka: *…když jsem je blíž zkoumala, tak jsem zjistila, že jak jsou vedle sebe v řádku, tak jsou akorát zrcadlově převrácená přes prostřední sloupec…*

Poznámka:

V souvislosti s uvedenou metodou se nabízí několik otázek, které by si měl učitel položit:

- *Uvědomění si souvislosti s geometrickým zobrazením….. didaktický vhled do situace – vede k dalším úvahám: Jsou to různá řešení?*
- *Jak jinak by se dalo řešení objevit?*
- *Jakou metodu zvolit?*
- *Je něco, co si můžeme matematicky vyjádřit a spočítat?*
- *Existují nějaké vztahy, nad kterými by mohly přemýšlet i děti a usnadnit si tak řešení?*

Druhá metoda řešení je založena na logickém vyvození „lepšího" začátku vyplňování tabulky. Na základě znalostí z aritmetiky si žák logicky vyvodí, která čísla mohou/nemohou být v daných polích. To potom urychlí cestu k nalezení správného řešení, neboť se redukuje počet možností k vyplnění tabulky. Studentka si ve fázi řešení toto vše neuvědomuje, což vyplynulo až z následné diskuze s vyučujícím či ostatními studenty.

Logické a matematické postupy v kombinaci s metodou pokus-ověření-korekce

Postupné úvahy studentky byly následující:

- *Jelikož ve žlutých polích má být součet čísel v přilehlých bílých polích, tak by děti mělo napadnout, že ve žlutém poli nikdy nemůže být číslo 1, protože to už nijak nerozdělíme*
- *Nemůže tam být ani číslo 2, neboť ho nelze rozdělit na součet dvou různých čísel (každé číslo mohu použít pouze jednou)*
- *Stejně tak např. číslo 10 nemůže být v žádném bílém poli, protože největší číslo, které máme do tabulky umístit je právě 10.*

Tímto způsobem se dají najít všechna pravidla pro jednotlivá čísla.

- *Dále si uvědomíme, že u tří žlutých polí uprostřed tabulky, budeme vždy sčítat tři bílá pole; znamená to, že v těchto třech žlutých polích musí být čísla, která se dají rozložit na tři **různé** sčítance (čísla se nesmějí opakovat)*
- *Vypíšeme všechny možné rozklady… skončíme u čísla 6 (5 nelze již rozdělit na tři různé sčítance … tím nalezneme čísla, která mohou ležet ve třech bílých polích* (Obrázek 8)

Při bližším zaměření se na řešení si všimneme, že

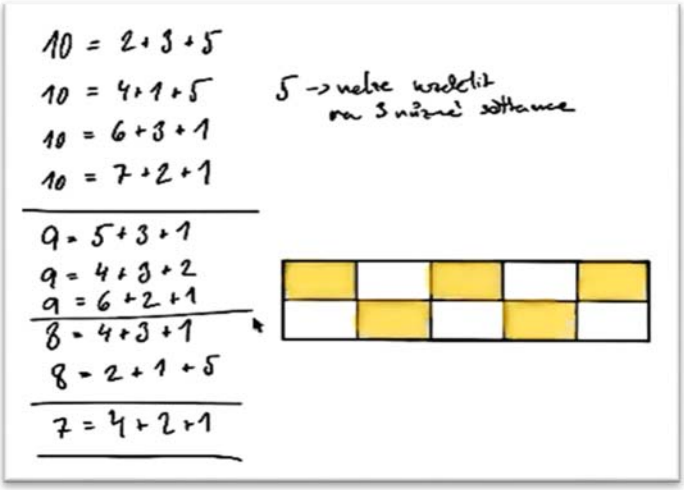
- *ve žlutých polích jsou vždy čísla 6 až 10*
- *v bílých polích jsou vždy čísla 1 až 5*

Tím, že si toto uvědomíme, můžeme pomocí strategie pokus-ověření-korekce rychleji objevit všechna řešení, nebo ověřit pouze jedno správné.

Poznámka:

Sdělení, která čísla se mohou vyskytovat v bílých, resp. žlutých polích, je jednou z možností, jak usnadnit zadání pro děti. Studentka považovala celý uvedený postup za metodu pokus-omyl a položila si otázku, zda neexistuje nějaký postup, který by byl více matematicky podložený. Na navrženém postupu je možné ilustrovat přesah úlohy na vyšší úroveň.

ISSN 2694-8133

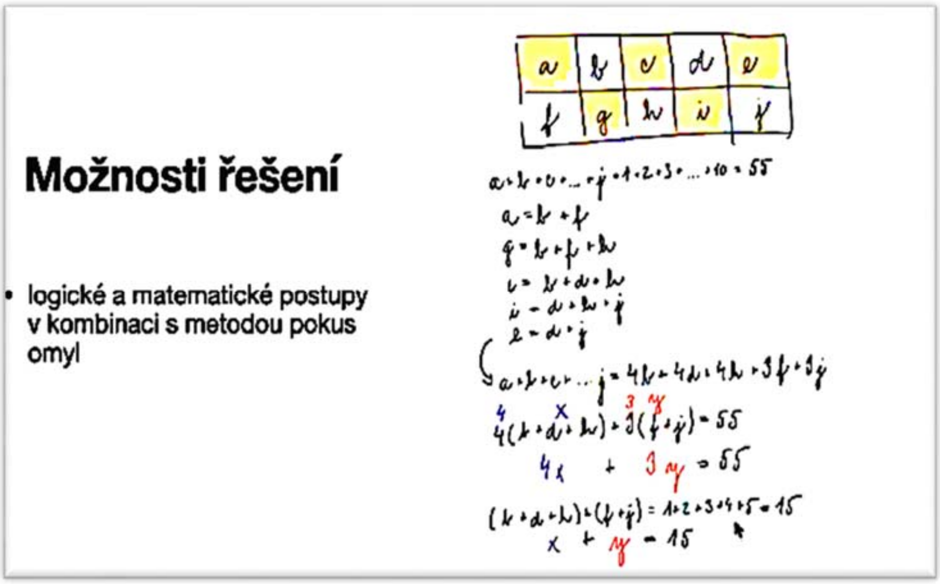


Obrázek 8. Rozklady čísel

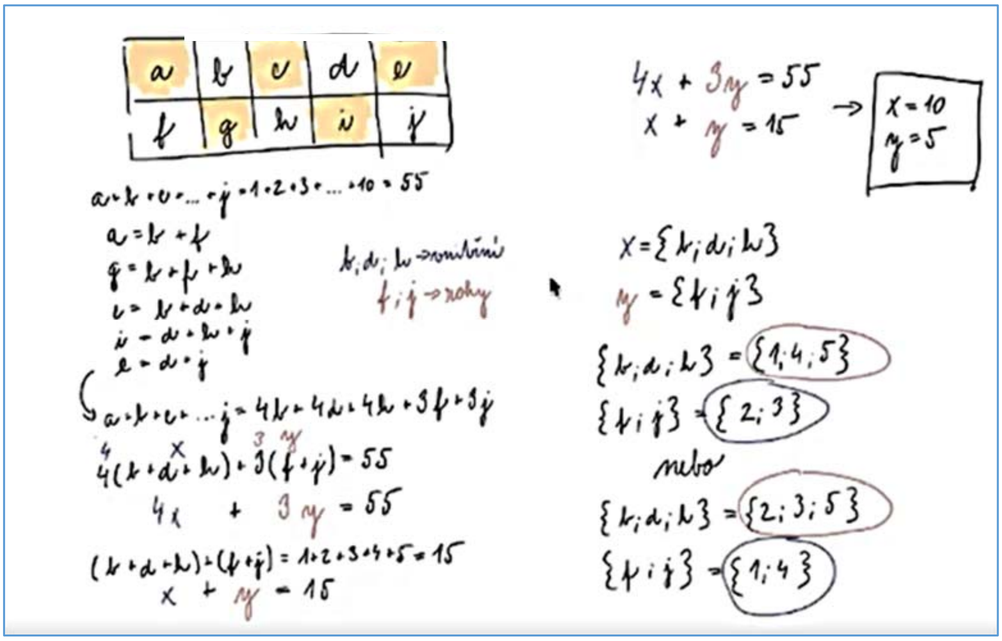
Studentka:

- *… zkoušela jsem různě čísla sčítat…*
- *… takže když sečteme čísla 1 až 10, dostaneme 55…*
- *… poté jsem si zapsala vztahy, které vyplývají z té šachovnice…*
- *… po označení všech políček a naznačení uvedených součtů jsem dosadila do původní rovnice….*
- *… vznikla mi rovnice: a + b + c + +… +j = 4b + 4d + 4h + 3f + 3j….*
- *… následně už jsem pracovala jen s informací, že v bílých polích jsou čísla 1až 5, kde je tedy součet 15… a na základě toho jsem si dokázala určit možnosti, co může ležet v krajních polích …*
- *… Našla jsem f, j …. všimla jsem si, že v řešení je tam vždy buď 1 a 4 nebo 2 a 3, čísla mají vždy součet 5*
- *… Když dosadím ta čísla 1 a 4/resp. 2 a 3, usnadní se mi další řešení*

Myšlenkové procesy studentky ukazují Obrázek 9 a Obrázek 10.



Obrázek 9. Algebraické řešení



Obrázek 10. Algebraické řešení - pokračování

Možné problémy řešení:

- Neporozumění zadání
- Opakování čísel v šachovnici
- Chyby ve sčítání
- Nedostatečná časová dotace

Usnadnění řešení na 1. stupni:

- Kartičky s čísly 1 až 10 (žáci nezapisují do šachovnice, ale pokládají kartičky – tím nedojde k chybě, že dané číslo bude využito vícekrát)
- Označení žlutých a bílých čísel (v souvislosti se sdělením, která čísla se mohou vyskytovat v bílých a která ve žlutých polích)
- Vepsání některých čísel do šachovnice
- Zmenšení šachovnice (méně políček) a poté navázat touto šachovnicí

S ilustrovaným přístupem studentky korespondují i výsledky šetření, které uvádí Kaslová (2007) a které potvrzují, že se jako metoda řešení úlohy se šachovnicí objevuje zkusmé doplňování čísel do tabulky a ověřování podmínek, třídění na větší-menší, úvahy o potenciálních sousedech (rozklady čísel na dvojice či trojice sčítanců), práce s charakteristikami čísel (sudost-lichost) či jisté zkoumání, které vede k systematičnosti v hledání všech možností, aby nebyla některá vynechána.

7. Závěr

Přechod od tradičního transmisivního pojetí vyučování s předáváním hotových poznatků učitelem ke konstruktivnímu pojetí vybízí k navození příznivé situace, kdy se poznatků zmocňují samotní žáci. Toto pojetí více respektuje individuální zvláštnosti jednotlivých žáků, lépe je motivuje a aktivizuje. Proto vystupuje do popředí potřeba tvořivého přístupu učitele, vytváření příznivého učebního klimatu a rozvíjení samostatnosti a tvořivosti žáků.

Z těchto důvodů je potřeba studenty-budoucí učitele matematiky na toto pojetí připravovat, využívat a rozvíjet jejich tvůrčí potenciál, předkládat jim dostatek námětů a příkladů tvořivých aktivit, metod a forem práce. Vést je ke zveřejňování vlastních námětů a vzájemně výměně zkušeností a realizovaných produktů. Jsou to úkoly především pro didaktickou přípravu studentů. Avšak i v odborné matematické přípravě by mělo být učivo předáváno tak, aby použité metody a formy práce přispívaly k tomuto pojetí, aby docházelo ke zdůraznění aplikací teorie ve vyučovací praxi a k výraznějšímu propojení odborných předmětů s didaktikou matematiky.

Acknowledgements

Příspěvek je jedním z výstupů vědeckého projektu SGS 21374 „*Matematika jako účinný nástroj k rozvoji logického myšlení žáků primární školy*."

Literatura

Eisenmann, P. et al. (2015). *Pokus – ověření – korekce*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem. http://trilian.ujep.cz/~pribylk/souby/pok.pdf.

Hejný, M. et al. (2005). *Matematika 5: učebnice pro základní školy*. Plzeň: Fraus.

Kaslová, M. (2007). Rozdíly ve strategiích řešení u devítiletých žáků. In: *Ani jeden matematický talent nazmar*. Sborník příspěvků 3. ročníku konference učitelů matematiky a přírodních oborů na základních, středních a vysokých školách. Praha: Univerzita Karlova.

Koman, M, Dřízal, V. (1995). *Dejte hlavy dohromady a řešte úlohy*. Praha: Prometheus.

Kuřina, F. (2002). Učíme myslet v matematice? *Miscellanea logica*, *2018 (tom iv)*, 51-59. http://logika.ff.cuni.cz/papers/misclogiv.pdf.

Melichar, J. (2007). *Matematika a její aplikace – utváření a rozvoj klíčových kompetencí*. Ústí nad Labem: Pedagogické centrum Ústí nad Labem, o.p.s.

PIRLS 2011 & TIMSS 2011, Vybraná zjištění. (2013). Praha: Česká školní inspekce.

Příhonská, J. (2008). Tvořivost učitele ve vztahu k rozvoji myšlení žáka. In: *Sborník příspěvků z konference didaktika řečové a neřečové výchovy v mateřské škole a na 1. stupni základní školy* (s. 135-149). Ústí nad Labem: Pedagogická fakulta UJEP v Ústí nad Labem.

Rosický, J. (2006). *Matematika má vychovávat ke korektnímu myšlení*. Magazín M. Masarykova univerzita. https://www.em.muni.cz/veda-a-vyzkum/260-matematika-ma-vychovavat-ke-korektnimu-mysleni.

Vilimovská, L. (2016). *Aktivizující činnosti pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků 1. stupně ZŠ.* [Diplomová práce]. Technická univerzita v Liberci.

ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL

Editorial Office: Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

Address: Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Phone: +420 58 563 5709

E-mail: emej@upol.cz

Electronic edition: http://emejournal.upol.cz/issues

2021

Vol. 3, No. 1

ISSN 2694-8133