ISSN 2694-8133

EULEROVA VETA A KONŠTRUKCIA MNOHOSTENA S DANÝM POČTOM STIEN, VRCHOLOV A HRÁN

Jana FIALOVÁ
Trnavská univerzita v Trnave, Pedagogická fakulta (Slovensko)
jana.fialova@truni.sk

Abstrakt

Eulerova veta hovorí, že medzi počtom stien s, vrcholov v a hrán h ľubovoľného mnohostena, ktorý je topologicky ekvivalentný guli (tj. nemá žiadnu dieru), je pevne daný vzťah $s + v – h = 2$. Otázky, ktoré si kladieme v tejto práci sú: Existuje mnohosten topologicky ekvivalentný guli k ľubovoľnej trojici čísel s, v, h spĺňajúcej tento vzťah? Ak áno, ako možno takýto mnohosten zostrojiť?

Kľúčové slová: mnohosten, Eulerova veta, topológia, konštrukcia mnohostenov.

EULER'S FORMULA AND CONSTRUCTION OF A POLYHEDRON WITH GIVEN NUMBER OF FACES, VERTICES AND EDGES

Abstract

Euler's formula tells us, that there is a formula between number of faces s, vertices v, and edges h of any polyhedron, which is topologically equivalent to a sphere (i.e. it has no hole): $s + v – h = 2$. In the paper, we consider, if there exists a polyhedron topologically equivalent to a sphere for any three numbers s, v, h which fulfil the Euler's formula and if it exists, how could be such polyhedron constructed.

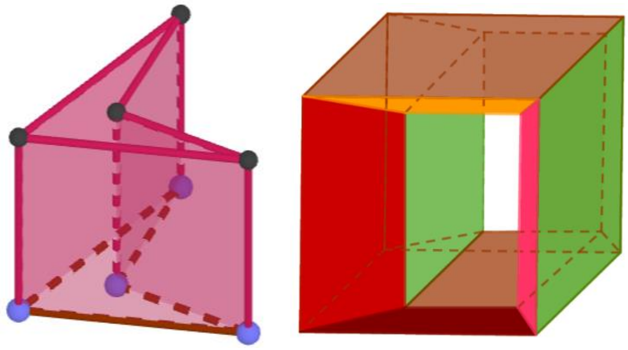
Keywords: polyhedron, Euler's formula, topology, construction of polyhedrons

1. Úvod

Mnohosten je trojrozmerné geometrické teleso, ktorého povrch sa skladá z konečného množstva stien tvorených pravidelnými alebo nepravidelnými mnohouholníkmi. Steny mnohouholníka sa pretínajú v úsečkách, ktoré nazývame hranami mnohostena. Hrany sa spájajú v bodoch, ktoré nazývame vrcholmi mnohostena. Mnohostenom s najmenším počtom vrcholov, hrán a stien je štvorsten. Štvorsten má 4 steny, 4 vrcholy a 6 hrán.

Mnohosteny môžu byť konvexné alebo nekonvexné. Pre konvexné mnohosteny platí, že celý mnohosten leží v jednom podpriestore ohraničenom rovinou incidentnou s ľubovoľnou stenou mnohostena. Toto platí pre všetky steny konvexného mnohostena. Ak existuje stena, ktorá leží v rovine, ktorá delí priestor na dva podpriestory, pričom časť mnohostena leží v jednom a časť v druhom podpriestore, tak takýto mnohosten je nekonvexný. Konvexnosť však nie je pre naše úvahy relevantná. Dôležité je, či mnohosten má nejaké „diery". Na vysvetlenie pojmu diera v mnohostene, musíme trošku odbočiť k zaujímavej oblasti geometrie, zvanej topológia. V topológii vôbec nezáleží na rozmeroch geometrických útvarov. Ak by sme vzali napríklad pravidelný štvorsten zhotovený z plastelíny, mohli by sme ho ľubovoľne stláčať, naťahovať, ohýbať a stále by vzniknutý útvar bol topologicky ekvivalentný pôvodnému štvorstenu. Zakázané je iba robiť do neho diery alebo zlepovať pôvodne nespojené časti. Týmto spôsobom nie je problém pretvoriť štvorsten napríklad na kocku, či guľu. To znamená, že vlastne akékoľvek teleso bez diery, možno pretransformovať na guľu. Hovoríme teda, že je topologicky ekvivalentné guli. Všetky konvexné telesá sú topologicky ekvivalentné guli.

Na obrázku 1 vidíme dva nekonvexné mnohosteny, z ktorých prvý je a druhý nie je topologicky ekvivalentný guli.



Obrázok 1: Nekonvexné mnohosteny

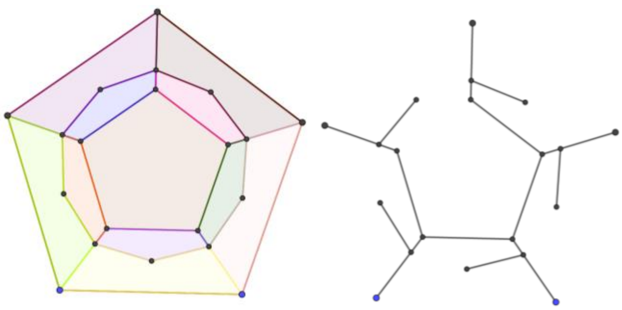
V ďalšom texte budeme všade pod pojmom mnohosten rozumieť mnohosten topologicky ekvivalentný guli.

2. Eulerova veta a jej dôkaz

Eulerova veta pochádza z roku 1750 a hovorí, že v každom mnohostene, ktorý je topologicky ekvivalentný guli (teda aj v každom konvexnom mnohostene), pre počet stien s, počet vrcholov v a počet hrán h platí: $s + v - h = 2$.

Dokonca existuje aj jej zovšeobecnenie pre úplne všetky mnohosteny: $s + v - h = 2 - 2d$, kde d je počet dier. V tomto texte sa však budeme zaoberať iba telesami bez dier.

Dôkaz Eulerovej vety nie je vôbec náročný. Myšlienka nasledujúceho dôkazu pochádza z roku 1811, kedy ju priniesol A. L. Cauchy (Čižmár, 2017). Pri dôkaze postupujeme tak, že si predstavíme dutý model mnohostena. V tomto modeli zrušíme jednu stenu, takže vznikne otvor dovnútra mnohostena. Tento otvor potom rozťahujeme tak, aby sme v konečnej fáze celý model mnohostena „rozpleštili" na plochu. Týmto spôsobom sme síce možno poohýbali nejaké hrany, zmenili tvar stien, ale incidencia vrcholov, hrán a stien zostala zachovaná. Počet stien sa zmenšil o jednu stenu, ktorú sme na začiatku vymazali. Preto budeme dokazovať vzťah $s + v - h = 1$. Tento „rozpleštený" model mnohostena sa nazýva jeho rovinným grafom. Na obrázku 2 vľavo vidíme rovinný graf pravidelného dvanásťstena.



Obrázok 2: Rovinný graf pravidelného dvanásťstena

Teraz vymažeme jednu z vonkajších hrán, čím sa zbavíme jednej hrany a zároveň aj jednej steny. Vrcholy zostanú všetky zachované. Rovnosť $s + v - h = 1$ sa teda nezmení. Toto robíme dovtedy, kým sa nezbavíme všetkých stien (obrázok 2 vpravo).

Ďalej budeme mazať jeden koncový vrchol spolu s hranou. Počet vrcholov sa zníži o jeden, počet hrán tiež, čiže rovnosť je stále zachovaná. Pokračujme ďalej, až kým nezostane iba jediný bod, pre ktorý rovnosť zjavne platí. Eulerov vzťah je dokázaný.

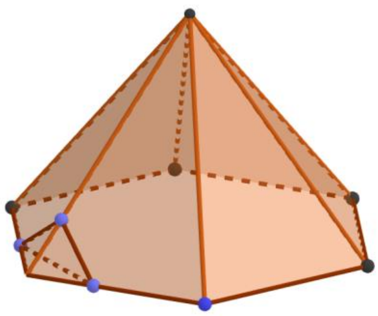
Problematikou vzťahu medzi mnohostenom a jeho grafom sa hlbšie venoval geometer Ernst Steinitz, ktorý dokázal, že každému mnohostenu možno priradiť graf, ktorého všetky vrcholy sú incidentné s aspoň troma hranami (3-connected) a každé dve hrany majú spoločný najviac jeden bod – vrchol. Steinitzova veta platí aj obrátene – ku každému takémuto grafu vieme priradiť nejaký mnohosten (de Oliveira, 2013). Zo Steinitzovej vety potom vyplýva, že je možné zostrojiť mnohosten s daným počtom stien, vrcholov a hrán v prípade, že sú splnené určité podmienky. Tieto podmienky odvodíme v poslednej kapitole tohto článku.

V nasledujúcej kapitole priblížime vlastný jednoduchý postup, ako zostrojiť konkrétny mnohosten s daným počtom stien, vrcholov a hrán.

3. Konštrukcia mnohostena metódou odrezávania rohov

V tejto časti budeme konštruovať mnohosteny tak, že začneme n-bokým ihlanom. Každý n-boký ihlan má práve $n + 1$ stien, $n + 1$ vrcholov a $2n$ hrán. Hraničným prípadom je trojboký ihlan, čiže štvorsten s $n = 3$.

V každom ihlane je zaručene aspoň jeden vrchol, z ktorého vedú práve tri hrany. Pri takomto vrchole urobíme rez tak, ako na obrázku 3.



Obrázok 3: Metóda odrezávania rohov

Rezom sme zvýšili celkový počet stien o jednu, počet vrcholov o dva, pretože vznikli tri nové vrcholy, ale jeden pôvodný sme odstránili. Počet hrán sa zvýšil o tri.

Tento postup môžeme opakovať, pretože tri nové vrcholy sú práve také, z ktorých vedú tri hrany, čiže aj po „odrezaní“ budeme mať zaručene taký vrchol, z ktorého idú tri hrany a ktorý teda môžeme „odrezať“.

Ak si označíme počet rezaní písmenom t, tak po t rezoch na n-bokom ihlane budeme mať mnohosten so $s = n + 1 + t$ stenami, $v = n + 1 + 2t$ vrcholmi a $h = 2n + 3t$ hranami.

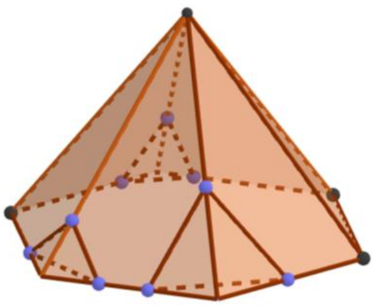
Keď si všimneme vzťah medzi počtom stien a vrcholov, vidíme že $v - s = t$. Takže týmto postupom vieme zostrojiť taký mnohosten, ktorého počet stien je ľubovoľné číslo väčšie alebo rovné štyrom, počet vrcholov je väčší ako počet stien, ale nie oveľa. Konkrétne, ak t je rozdiel medzi počtom stien a vrcholov, počet stien musí zostať aj po odpočítaní tohto t väčší alebo rovný štyrom, aby platilo, že $n + 1$ je rovné aspoň 4. Z toho dostávame $s - t \geq 4$. Ak za t dosadíme $v - s$, tak dostaneme $v \leq 2s - 4$.

Metódou odrezávania rohov teda vieme zostrojiť mnohosteny, pre také tri čísla s, v, h, pre ktoré platí:

1. Počet stien s je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako tri,
2. Počet vrcholov v je ľubovoľné prirodzené číslo z intervalu $[s; 2s - 4]$,
3. Počet hrán je $h = s + v - 2$.

Príklad 1: Zostrojte mnohosten, ktorý má 10 stien, 13 vrcholov a 21 hrán.

Riešenie: Najprv overíme, či pre túto trojicu platí Eulerova veta. Keďže platí a aj počet vrcholov je v intervale $[10, 2 \cdot 10 - 4]$, tak zistíme počet rezaní ako rozdiel medzi počtom vrcholov a počtom stien, $t = 13 - 10 = 3$. Nakoniec nájdeme pôvodné n zo vzťahu $s = n + 1 - t$, teda $n = 10 - 3 - 1 = 6$. Konštrukcia teda začína šesťbokým ihlanom, z ktorého postupne odrežeme tri rohy – také, z ktorých idú tri hrany. Jednu z možností vidíme na obrázku 4.

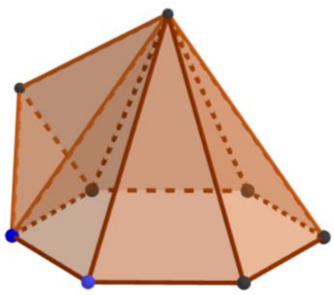


Obrázok 4: Mnohosten so $s = 10$, $v = 13$ a $h = 21$

4. Konštrukcia mnohostena metódou dolepovania trojbokých ihlanov

Aj v tejto časti budeme konštruovať mnohosteny tak, že začneme n-bokým ihlanom. Každý n-boký ihlan má práve $n + 1$ stien, $n + 1$ vrcholov a $2n$ hrán, kde n je väčšie alebo rovné trom.

Každý ihlan má aspoň jednu stenu trojuholníkového tvaru. Nad touto stenou zostrojíme trojboký ihlan tak, že pôvodná stena sa stane jeho podstavou a spoločne zaniknú.



Obrázok 5: Metóda dolepovania trojbokých ihlanov

Dolepením sme zvýšili počet stien o dve, pretože sme pridali tri nové steny, ale odobrali sme jednu pôvodnú. Počet vrcholov sa zvýšil o jeden a počet hrán o tri.

Tri nové steny, ktoré vznikli, sú trojuholníkového tvaru, čo nám dáva istotu, že vždy bude možné nájsť stenu trojuholníkového tvaru, nad ktorou možno znova dolepiť trojboký ihlan. Po t opakovaniach dostaneme mnohosten so $s = n + 1 + 2t$ stenami, $v = n + 1 + t$ vrcholmi a $h = 2n + 3t$ hranami.

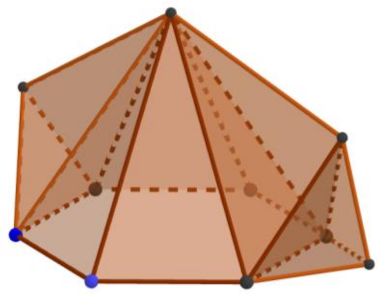
Rozdiel medzi počtom stien a vrcholov je opäť t. V tomto prípade je ale počet stien väčší ako počet vrcholov. Analogicky k predchádzajúcemu postupu dostávame tento výsledok:

Postupným dolepovaním trojbokých ihlanov na pôvodný n-boký ihlan možno skonštruovať mnohosteny pre takéto tri čísla s, v, h:

1. Počet vrcholov v je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako tri,
2. Počet stien s je ľubovoľné prirodzené číslo z intervalu $[v; 2v - 4]$,
3. Počet hrán je $h = s + v - 2$.

Príklad 2: Zostrojte mnohosten, ktorý má 13 stien, 10 vrcholov a 21 hrán.

Riešenie: Keďže počet stien je väčší ako počet vrcholov, ale stále leží v intervale $[10, 2 \cdot 10 - 4]$, použijeme metódu dolepovania trojbokých ihlanov. Dolepovať bude treba trikrát, keďže rozdiel medzi počtom stien a počtom vrcholov je tri. Číslo n vypočítame zo vzťahu $v = n + 1 + t$. Začneme teda opäť šesťbokým ihlanom. Ihlany dolepujeme na akékoľvek trojuholníkové steny. Jeden príklad vidíme na obrázku 6.



Obrázok 6: Mnohosten so $s = 13$, $v = 10$ a $h = 21$

5. Zhrnutie a dôkaz

Konkrétnymi konštrukciami sme dokázali, že možno zostrojiť mnohosteny pre také trojice čísel s, v, h, pre ktoré platí Eulerova veta a zároveň väčšie z čísel s a v nie je väčšie ako dvojnásobok menšieho čísla zmenšeného o štyri.

Veta 1: *Nech sú dané tri čísla s, v, h, pre ktoré platí* $s + v - h = 2$ *a zároveň platí, že* $4 \leq s \leq v \leq 2s - 4$. *Potom existuje aspoň jeden mnohosten, ktorého počet strán sa rovná číslu s, počet vrcholov číslu v a počet hrán číslu h.*

Jeden z možných mnohostenov vieme zostrojiť tak, ako sme popísali v kapitole 3.

Veta 2: *Nech sú dané tri čísla s, v, h, pre ktoré platí* $s + v - h = 2$ *a zároveň platí, že* $4 \leq v \leq s \leq 2v - 4$. *Potom existuje aspoň jeden mnohosten, ktorého počet strán sa rovná číslu s, počet vrcholov číslu v a počet hrán číslu h.*

Jeden z možných mnohostenov vieme zostrojiť tak, ako sme popísali v kapitole 4.

ISSN 2694-8133

Zostáva ešte otázka, či existujú aj také mnohosteny, pre ktoré neplatí podmienka o vzťahu medzi počtom vrcholov a stien.

Na dôkaz tvrdenia, že takéto mnohosteny nemôžu existovať, použijeme tieto jednoduché tvrdenia:

a) Z každého vrcholu musia nutne viesť aspoň tri hrany. Zároveň každá hrana spája práve dva vrcholy. To znamená, že celkovo v mnohostene musí byť minimálne $3v/2$ hrán. Takže $h \geq 3v/2$. Po dosadení Eulerovho vzťahu: $h = s + v - 2 \geq 1{,}5v$. Z čoho dostávame $v \leq 2s - 4$.

b) Ďalej v každom mnohostene platí, že každá stena je ohraničená minimálne tromi hranami a zároveň každá hrana je spoločná pre práve dve steny. Takže celkovo musí byť v mnohostene minimálne $3s/2$ hrán. Po dosadení Eulerovho vzťahu dostaneme hľadanú nerovnosť $s \leq 2v - 4$.

Tým sme dokázali nasledujúcu vetu:

Veta 3: *Nech s, v sú také prirodzené čísla, pre ktoré:* $\max(s, v) > 2 \cdot \min(s, v) - 4$. *Potom neexistuje žiaden mnohosten, pre ktorý s je počet jeho stien a v počet jeho vrcholov.*

6. Záver

V tomto článku sme ukázali, aké vlastnosti musia spĺňať tri čísla s, v, h, aby existoval mnohosten, ktorého počet strán bude s, vrcholov v a hrán h. Na konštrukciu jedného takéhoto mnohostena stačí využiť jednu z dvoch jednoduchých metód popísaných vyššie. Toto je zaujímavé, keďže týmito postupmi zďaleka nemožno zostrojiť celú plejádu mnohorakých mnohostenov. Je zrejmé, že k danej trojici s, v, h existuje veľa rôznych mnohostenov. Dokonca aj našimi metódami je možné zostrojiť viac ako jeden mnohosten, keďže v každom kroku vyberáme vrchol alebo stenu ľubovoľne z viacerých možných.

Našim cieľom bolo zistiť, či existuje mnohosten pre ľubovoľnú trojicu s, v, h. Dokázali sme, že nie a zároveň sme presne určili, pre ktoré trojice je to možné. Druhým cieľom bolo ukázať jednoduchú metódu, ako konkrétne možno takýto mnohosten zostrojiť, čo sa nám podarilo.

Acknowledgements

Tento článok vznikol vďaka podpore KEGA projektu č. 001UMB-4/2020.

Literatúra

Čižmár, J. (2017). *Dejiny matematiky (od najstarších čias po súčasnosť).* Bratislava: PERFEKT. ISBN 978-80-8046-829-3.

De Oliveira, A.G. (2013). *Graphs of polyhedra and the theorem of Steinitz*. Porto: CiM Bulletin, číslo 34. Dostupné na: http://www.cim.pt/magazines/bulletin/6/article/60/pdf.