Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics

The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Olomouc 2020

ISSN 2694-8133

Univerzita Palackého v Olomouci
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

ve spolupráci s

Jednotou českých matematiků a fyziků
pobočný spolek Olomouc

Elementary Mathematics Education Journal

ročník 2, číslo 1

2020

Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

in cooperation with

The Union of Czech Mathematicians and Physicists
Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 2, No. 1

2020

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Vydavatel: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika

Adresa a kontakty:
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Informace pro autory:
Časopis uveřejňuje články k aktuálním problémům z teorie elementární matematiky, o inovacích, trendech a výzkumech v primárním a preprimárním matematickém vzdělávání. Jednotlivé články jsou anonymně posuzovány dvěma odborníky v recenzním řízením typu „double-blind peer review“. Další informace a podrobné pokyny pro autory jsou k dispozici na webu: http://emejournal.upol.cz.

Za kvalitu obrázků, jazykovou správnost, dodržení bibliografické normy a dodržování publikační etiky odpovídají autoři jednotlivých článků.

Časopis vychází dvakrát ročně.

Ročník 2, číslo 1

ISSN 2694-8133

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Publisher: Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Address and contacts:
Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic
emej@upol.cz

Information for authors:
The journal publishes articles on current issues in the theory of elementary mathematics, about innovation, trends and research in primary and pre-primary mathematics education. Each article is reviewed by two anonymous experts ("double-blind peer review"). More information and other instructions for authors are available at: http://emejournal.upol.cz.

The authors of the articles are responsible for the quality of the images, language accuracy, compliance with bibliographic standards and adherence to publication ethics.

The journal is published twice a year.

Vol. 2, No. 1

ISSN 2694-8133

Obsah

Content

DIRICHLETŮV PRINCIP V PŘÍPRAVĚ UČITELŮ PRVNÍHO STUPNĚ ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Jaroslav BERÁNEK
Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

Příspěvek obsahuje soubor příkladů řešených s využitím Dirichletova principu. Tento princip bývá do výuky matematiky na školách zařazován jen zřídka, ačkoliv jeho formulace je velmi jednoduchá. Užití Dirichletova principu při řešení úloh a problémů přispívá k rozšíření znalostí a rozvoji myšlení studentů, budoucích učitelů matematiky na 1. stupni základní školy.

Klíčová slova: Dirichletův princip, řešení problémů, vyučování matematice.

DIRICHLET PRINCIPLE IN TEACHING FUTURE ELEMENTARY TEACHERS

Abstract

The article discusses one possibility of enlarging and intensifying of the knowledge of students, future elementary teachers. Dirichlet principle nearly does not appear in teaching of mathematical branches, although its formulating is quite easy. Moreover, it is a tool for solving quite simple tasks which can be used at school teaching (e.g. motivation tasks, problems for development of student`s interest in mathematics, preparation for mathematical competitions, etc.)

Keywords: Dirichlet principle, solving of problems, teaching of mathematics.

1. Úvod

Příspěvek je věnován zkvalitňování matematické přípravy studentů, budoucích učitelů na prvním stupni základní školy, a to jak v rozšiřování jejich odborných znalostí, tak i v získávání jejich většího zájmu o studium matematiky. Problém hledání vhodných témat, která by přispěla ke splnění těchto úkolů, tj. rozšířila znalosti studentů a pomohla jim vytvořit potřebný odborný nadhled, přičemž by nevyžadovala složitý formální matematický aparát a navíc nebyla příliš vzdálená od učiva matematiky na ZŠ, je problémem nesnadným. Jedním takovým tématem se jeví využití Dirichletova principu při řešení úloh. Na základních ani středních školách se studenti s tímto kombinatorickým principem takřka nesetkají, proto může mít jeho zařazení do výuky i výraznou motivační funkci. Přestože se jedná o tvrzení na první pohled velmi jednoduché, můžeme jeho použitím dostat poměrně zajímavé výsledky. Poznamenejme, že Dirichletův princip je existenční; umožňuje tedy dokázat existenci objektů, které nelze reálně zkonstruovat. I to je pro studenty učitelství nový a zajímavý fakt. Úlohy řešitelné pomocí Dirichletova principu se jako úlohy rozšiřující občas vyskytují ve sbírkách úloh, bývají obsaženy v matematických soutěžích (Matematická olympiáda, Matematický klokan, atd.).

Vzhledem k metodickému účelu příspěvku uveďme také několik historických poznámek (viz [3]). Německý matematik Peter Gustav Lejeune Dirichlet žil v letech 1805–1859. Studoval

ISSN 2694-8133

v Berlíně, v Gőttingenu a v Paříži. V letech 1822–1827 působil v Paříži jako domácí učitel, od roku 1827 byl docentem na univerzitě ve Vratislavi, od roku 1829 v Berlíně. Po smrti K. Gausse v roce 1855 přešel na jeho místo do Gőttingenu. Zabýval se teorií čísel, matematickou analýzou a matematickou fyzikou a ve všech těchto oborech dosáhl významných výsledků. Mezi jeho žáky patřili např. Riemann, Dedekind a Kronecker. Princip, nesoucí jeho jméno, uvedl Dirichlet v roce 1834 pod názvem Schubfachprinzip (zásuvkový princip). Pod označením zásuvkový princip je dodnes používán např. v italštině (principio dei cassetti). V angličtině je naproti tomu běžnější označení princip holubníku (pigeonhole principle).

Nyní uvedeme tři formulace Dirichletova principu ([1], [4]). Začneme tou nejjednodušší.

Formulace 1: Umístíme-li m předmětů do n přihrádek ($m, n \in \boldsymbol{N}$), pak pro $m > n$ existuje alespoň jedna přihrádka obsahující alespoň dva předměty.

Důkaz: Nechť k_i je počet předmětů v i-té přihrádce pro každé $i \in \{1,\ldots, n\}$. Nechť pro každý index $i \in \{1,\ldots, n\}$ platí $k_i \leq 1$. Pak platí $k_1 + k_2 +\ldots+ k_n \leq 1+1+\ldots+1= n$, a to je spor s předpokladem, podle kterého je předmětů více než n.

Je vidět, že formulace i důkaz jsou poměrně jednoduché a mohou studentům posloužit jako příklad důkazu sporem. Nyní uvedeme obecnější verzi.

Formulace 2: Umístíme-li $nk+1$ předmětů do n přihrádek ($k, n \in \boldsymbol{N}$), pak existuje alespoň jedna přihrádka obsahující alespoň $k+1$ předmětů.

Důkaz: Provedeme opět sporem. Nechť m_i je počet předmětů v i - té skupině pro každé $i \in \{1,\ldots, n\}$. Připusťme, že v každé skupině je nejvýše k předmětů, tj. $m_i \leq k$ pro každé $i \in \{1,\ldots, n\}$. Pak platí $nk+1 = m_1 + m_2 +\ldots+ m_n \leq k +\ldots+ k = nk$, a to je spor.

Při řešení některých úloh (zejména geometrických) se stává, že pracujeme s reálnými čísly (vyjadřujícími např. délky, obsahy, objemy,…) namísto čísel přirozených, která vyjadřují počty prvků konečných množin. Proto uvedeme ještě třetí formulaci, tentokrát již bez důkazu (prováděl by se opět sporem).

Formulace 3: Je-li součet n reálných čísel $x_1, x_2, \ldots x_n$ roven číslu S, pak pro alespoň jedno číslo $i \in \{1,\ldots, n\}$ platí nerovnost $x_i \leq \frac{S}{n}$ a pro alespoň jedno $j \in \{1,\ldots, n\}$ platí $x_j \geq \frac{S}{n}$.

Další zajímavou otázkou, která může studenty v této souvislosti napadnout, je počet všech možných rozmístění daných n předmětů do k přihrádek (viz [3]). Tento problém je ale obecně podstatně složitější a pro studenty učitelství matematiky pro 1. stupeň ZŠ je jeho zařazení již diskutabilní (předměty i přihrádky mohou a nemusí být rozlišitelné). Uvedeme pouze nejjednodušší případ, kdy jsou předměty i přihrádky rozlišitelné. V tom případě je počet možných rozmístění roven k^n (jedná se o variace s opakováním).

Nyní uvedeme sérii příkladů, které jsou pomocí daného principu jednoduše řešitelné. Zařazeny jsou příklady elementární i příklady vyžadující předchozí matematické znalosti i jistý důvtip.

2. Příklady

Příklad 1: (Viz [4]) V podniku pracuje 400 osob. Dokažte, že alespoň dvě osoby mají narozeniny ve stejný den v roce.

Řešení: Počítejme i s přestupnými roky. Dnů pro možnou oslavu narozenin v roce je tedy 366. Zavedeme 366 přihrádek, do nichž budeme zařazovat pracovníky podle data narození. Protože počet pracovníků je větší než počet přihrádek, musí existovat přihrádka obsahující alespoň dvě osoby. Tito lidé mají narozeniny ve stejný den v roce.

Poznámka 1: Poznamenejme ještě, že situace, kdy mezi 365 osobami má narozeniny od 1. 1. do 31. 12. každý den v roce některý z nich, je z hlediska pravděpodobnosti jevem s velmi malou pravděpodobností. S tím souvisí tzv. narozeninový paradox. Lze spočítat, že pravděpodobnost, že dvě osoby z nějaké skupiny mají narozeniny ve stejný den v roce, bude větší než 0,5 již při 23 osobách. Pro informaci uvedeme i tento výpočet.

Příklad 1a: Sešla se skupina n osob, $n \geq 2$. Vypočtěte (v závislosti na n) pravděpodobnost, že alespoň dva z nich budou mít narozeniny stejný den v roce. (Předpokládejme, že rok má 365 dní, tj. nebereme v úvahu přestupné roky).

Řešení: Určeme pravděpodobnost komplementárního (doplňkového) jevu A, že žádné dvě osoby z n zúčastněných nebudou mít narozeniny týž den v roce. Vypočteme nejprve, kolik je všech možných případů pro data narození těchto n osob. Pro den narození první osoby je 365 možností, pro dvě osoby je tedy 365^2 možností, pro n osob 365^n možností.

Vypočtěme dále, kolik z těchto případů je příznivých jevu A. První osoba se může narodit kterýkoli den v roce. Je-li ale již známo její datum narození a nemá-li druhá osoba mít narozeniny týž den, „zbývá" pro její datum narození již jen $365 - 1 = 364$ možností. Nemá-li datum narození žádných dvou osob z n zúčastněných připadnout na stejný den v roce, existuje $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$ příznivých případů. Proto pravděpodobnost jevu A, že žádné dvě osoby z n zúčastněných nebudou mít narozeniny týž den v roce, je určena vztahem

$$P(A) = \frac{365 \cdot (365-1) \cdot (365-2) \cdot \cdots \cdot (365-n+1)}{365^n}.$$

Nejmenší hodnota n, pro kterou platí $P(A) < 0,5$, je číslo 23. Pro $n = 23$ je $P(A) = 0,49270$, tj. pravděpodobnost jevu, že mezi 23 osobami nemají žádné dvě narozeniny týž den v roce, je menší než 0,5. Je tedy pravděpodobnější, že nastane jev komplementární, tj. že aspoň dva lidé z této skupiny slaví narozeniny týž den v roce. Podrobnější informace o narozeninovém paradoxu lze nalézt na elektronické adrese https://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem.

Příklad 2: (Viz [4]) Konference se zúčastnilo 40 delegátů ze 13 zemí. Dokažte, že alespoň z jedné země přijela delegace, která měla alespoň čtyři členy.

Řešení: Rozdělíme delegáty do přihrádek podle toho, z jaké země pocházejí. Přihrádek bude proto 13. Delegátů je ale 40, což je více než $3 \cdot 13 = 39$. Proto existuje přihrádka obsahující alespoň čtyři členy, tj. alespoň jedna země vyslala nejméně čtyřčlennou delegaci.

Někdy se Dirichletův princip využívá i v „opačném" myšlenkovém postupu:

Příklad 3: V krabici je 5 kuliček bílých, 5 červených a 5 modrých. Kolik kuliček musíme potmě vybrat z krabice, abychom vybrali určitě dvě kuličky stejné barvy?

Řešení: Máme kuličky tří barev, je tedy možno po vytažení rozmístit vytažené kuličky do tří přihrádek podle barvy. Chceme-li mít zaručeno, že v jedné přihrádce budou alespoň dvě kuličky, musíme vytáhnout víc kuliček, než je přihrádek. Stačí tedy vybrat náhodně 4 kuličky.

Příklad 4: (Viz [4]) Konference se zúčastnilo 70 delegátů, kteří hovoří 11 různými jazyky. Jedním jazykem hovoří nejvýše 15 delegátů. Organizační výbor rozhodl, že za oficiální bude považován takový jazyk, kterým hovoří nejméně 5 delegátů. Dokažte, že na konferenci byly alespoň 3 oficiální jazyky.

Řešení: Řešíme trojím opakováním Dirichletova principu (využijeme formulace 2). Jestliže 70 delegátů hovoří 11 jazyky, pak určitě existuje jazyk, kterým hovoří alespoň 7 osob (protože $11 \cdot 6 = 66 < 70$). Je to tedy jazyk oficiální, označme ho A. Podrobněji: kdyby každým z 11 jazyků hovořilo právě 6 delegátů, byl by součin $11 \cdot 6$ roven 66; delegátů je ale 70, což je více.

Jazykem A hovoří podle zadání úlohy nejvýše 15 osob, tedy zbylými 10 jazyky hovoří alespoň 55 delegátů. Tedy musí existovat další jazyk B, kterým hovoří alespoň 6 delegátů (protože podle stejné úvahy $10 \cdot 5 = 50 < 55$), je tedy druhým oficiálním. Také jazykem B hovoří nejvýše 15 osob, proto zbylými 9 jazyky hovoří alespoň 40 delegátů. Třetím použitím stejné úvahy ($9 \cdot 4 = 36 < 40$) můžeme ze zbylých 9 jazyků vybrat třetí oficiální. Poznamenejme, že existenci čtyř oficiálních jazyků již není možno dokázat. Zbylými 8 jazyky hovoří alespoň 25 delegátů; může nastat situace, kdy 7 jazyky z nich hovoří 3 delegáti a osmým jazykem hovoří 4 delegáti. Čtvrtý oficiální jazyk tedy může a nemusí existovat.

Příklad 5: (Viz [4]) Dokažte, že v každém trojúhelníku je alespoň jeden vnitřní úhel větší nebo roven 60°.

Řešení: Využijeme formulace 3. Pro vnitřní úhly α, β, γ v libovolném trojúhelníku platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Proto musí existovat alespoň jeden vnitřní úhel, jehož velikost je větší nebo rovna $\frac{180}{3} = 60°$.

Příklad 6: (Upraven podle [4]) Je dáno 10 přirozených čísel. Dokažte, že z nich můžeme vybrat dvě tak, že jejich rozdíl je dělitelný číslem 9.

Řešení: Poznamenejme, že čísla jsou zvolena zcela náhodně. Mohou být navzájem různá nebo se některá z nich mohou také rovnat. Rozdělíme daná čísla do zbytkových tříd podle zbytků při dělení číslem 9. Těchto zbytkových tříd je 9 (zbytky 0 až 8). Protože ale čísel je 10, musí ležet v jedné třídě alespoň dvě čísla. Ta dávají po dělení 9 týž zbytek, jejich rozdíl je tedy dělitelný 9. Poznamenejme, že jsme dokázali pouze existenci takových dvou čísel. Určit, která dvě čísla splňují danou podmínku, může být dosti pracné.

Poznámka 2: Příklad 6 lze zobecnit takto: Je dáno m přirozených čísel. Dokažte, že z nich můžeme vybrat dvě tak, že jejich rozdíl je dělitelný číslem $m - 1$. Důkaz tohoto zobecněného příkladu je zcela analogický důkazu příkladu 6. Při dělení číslem $m - 1$ existuje celkem $m - 1$ zbytkových tříd (zbytky 0 až $m - 2$). Všech čísel je ale m, tzn. dvě z nich musí ležet ve stejné zbytkové třídě. Při zařazení této úlohy na 1. stupni ZŠ lze tedy volit např. $m = 4$, kdy dvě čísla ze čtyř zadaných, jejichž rozdíl je dělitelný třemi, lze nalézt v krátkém čase i experimentem. Např. zvolíme čísla 13, 23, 37, 60. Pak třemi je dělitelný rozdíl čísel $37 - 13$.

Příklad 7: (Viz [7]) Je dáno šest přirozených čísel, jejichž součin není násobek 11. Dokažte, že součet nebo rozdíl některých dvou z nich naopak dělitelný jedenácti je.

Řešení: Protože součin daných čísel není dělitelný jedenácti, není ani jedno z nich dělitelné jedenácti. Existuje celkem deset nenulových zbytků při dělení číslem 11. Tyto zbytky rozdělíme do pěti množin: $\{1, 10\}, \{2, 9\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}$. Nyní rozdělíme zadaných šest čísel do pěti množin podle toho, do které z výše uvedených pěti množin patří zbytek při jejich dělení 11. Protože zadaných čísel je šest, určitě alespoň dvě z nich musí patřit do stejné množiny. Zbytky při dělení těchto dvou čísel jedenácti jsou pak ale prvky množiny $\{x, 11 - x\}$, $x = 1, ..., 5$. Součet nebo rozdíl takových dvou čísel musí být dělitelný jedenácti.

Příklad 8: (Viz [1]) Číselná tabulka o třech řádcích a třech sloupcích nechť je libovolně vyplněna čísly 0, 1, 2. Dokažte, že pro jakýkoliv způsob rozmístění těchto čísel v tabulce jsou vždy dva z osmi možných součtů trojic těchto čísel (tři sloupce, tři řádky a dvě hlavní diagonály) stejné.

Řešení: Uvedeme příklad (viz tabulka 1).

Tabulka 1. Možné vyplnění tabulky

2	0	1
2	1	2
0	1	0

Součty jsou 3, 5, 1, 4, 2, 3, 2, 3, tj. existují dvojice stejných součtů. Z daných tří čísel zřejmě nelze dostat jiné součty než 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, což je 7 možností. Výsledných součtů je ale 8 (tři řádky, tři sloupce a dvě hlavní diagonály), dva tedy nutně musí být stejné. Poznamenejme, že i problém nalézt teoreticky možné vyplnění tabulky tak, aby se mezi 8 součty vyskytla všechna čísla z množiny {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} a pouze jediné z nich se jednou opakovalo, je velmi nesnadný.

Příklad 9: (Viz [4]) Nechť je dána množina obsahující 10 různých přirozených čísel ležících mezi 1 a 99 (včetně). Dokažte, že existují dvě disjunktní neprázdné podmnožiny této množiny se stejným součtem svých prvků.

Řešení: Z dané množiny deseti čísel můžeme vytvořit $2^{10} - 1 = 1023$ jejích různých neprázdných podmnožin. Každá z těchto množin má součet svých prvků menší než 1000. Proto podle Dirichletova principu musí mít dvě podmnožiny, označme je A, B, stejný součet svých prvků. Nyní stačí vzít množiny $X = A - (A \cap B)$, $Y = B - (A \cap B)$. Tyto množiny X, Y jsou disjunktní. Jsou také neprázdné, neboť v opačném případě by platilo $A \subset B$ nebo $B \subset A$, což nelze, neboť součet prvků množin A, B je stejný a jejich prvky jsou kladná čísla.

Příklad 10: (Viz [4]) Nechť je dán rozklad množiny M = {1, 2, 3,…, 9} na tři třídy. Dokažte, že součin všech čísel v alespoň jedné ze tříd je větší než 71.

Řešení: Využijeme formulace Dirichletova principu 3. Součin všech přirozených čísel od 1 do 9 (tzn. 9!) je roven 362 880. Kdyby v každé ze tří tříd rozkladu byl součin čísel menší nebo roven 71, pak by součin všech devíti čísel nepřevyšoval 7^{13} = 357 911, což je spor.

Příklad 11: (Viz [4]) V zahradě tvaru obdélníka o rozměrech 20 m × 15 m chceme vysázet stromy. Vzdálenost mezi libovolnými dvěma stromy má být větší než 5 m. Dokažte, že stromů lze vysadit nejvýše 25.

Řešení: Připusťme, že v zahradě bude více než 25 stromů. Rozdělíme zahradu na obdélníky o rozměrech 4 m × 3 m. Takových obdélníků je právě 25. Proto musí v jednom z nich být alespoň dva stromy, jejich vzdálenost je však menší než 5m (velikost úhlopříčky každého z malých obdélníků je 5 m).

Příklad 12: (Viz [3]) Na večírku je přítomných n osob. Dokažte, že dva účastníci večírku znají stejný počet lidí (relace „znát" je symetrická, tzn. zná-li jedna osoba druhou, zná i druhá první).

Řešení: Každý člověk může znát od 0 do $n - 1$ osob. Podle toho všechny přítomné rozdělíme do přihrádek. Je tedy n přihrádek i n osob. Dirichletův princip nelze přímo použít, využijeme však podobnou úvahu. Připusťme, že v každé přihrádce je jediný člověk. To ale není možné, neboť by existovala osoba, která nezná nikoho a současně osoba, která zná všechny. Proto musí být v jedné přihrádce alespoň dva lidé, kteří tedy znají stejný počet účastníků.

Příklad 13: (Viz [1]) Na klasické šachovnici 8 × 8 stojí 33 věží. Dokažte, že z nich lze vybrat 5, které se vzájemně neohrožují.

Řešení: Připomeňme, že dvě věže se neohrožují, stojí-li v různých řadách a zároveň v různých sloupcích. Nyní rozdělíme 64 polí šachovnice na 8 skupin podle následující tabulky 2 (pole ve stejné skupině mají stejná čísla). Jedná se o užití „cyklické záměny“ a rozdělení polí postupuje „po úhlopříčkách“.

Tabulka 2. Rozdělení šachovnice

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Z tabulky je vidět, že v každé z osmi skupin se umístěné věže navzájem neohrožují. Stačí dokázat, že alespoň jedna ze skupin obsahuje alespoň 5 věží. To však je snadné podle Dirichletova principu, neboť skupin je 8 a věží je 33 (tj. $8 \cdot 4 + 1$). Jedna ze skupin tedy musí obsahovat alespoň pět věží, které se vzájemně neohrožují.

Příklad 14: (Viz [9]) V krychli s hranou délky 19 cm je dáno 1332 bodů. Dokažte, že mezi nimi existují alespoň dva body, jejichž vzdálenost je menší než 3 cm.

Řešení: Každou stranu krychle rozdělíme na jedenáct stejných dílů. Pomocí těchto dělení rozdělíme krychli na $11^3 = 1331$ shodných krychliček, z nichž každá bude mít délku hrany rovnou $\frac{19}{11} \doteq 1{,}72$ cm a velikost tělesové úhlopříčky v centimetrech $\frac{19}{11} \cdot \sqrt{3} \doteq 2{,}9917 < 3$. Podle Dirichletova principu existuje krychlička obsahující alespoň dva body; jejich vzdálenost tedy bude menší než 3 cm.

Příklad 15: (Viz [9]) V prostoru je dáno 9 bodů s celočíselnými souřadnicemi. Dokažte, že z nich lze vybrat alespoň dva body tak, že střed jimi určené úsečky má celočíselné souřadnice.

Řešení: Platí, že součet dvou sudých čísel i součet dvou lichých čísel je sudé číslo. Souřadnice bodů v prostoru je podle zadání uspořádaná trojice celých čísel, která mohou být sudá (S) nebo lichá (L). Podle parity existuje pro souřadnice osm možností: [L, L, L], [L, L, S], [L, S, L], [S, L, L], [L, S, S], [S, L, S], [S, S, L], [S, S, S]. Bodů je ale 9, tzn. dva z nich budou mít stejnou paritu všech tří souřadnic. Střed úsečky ohraničené těmito dvěma krajními body bude mít rovněž celočíselné souřadnice (souřadnice středu úsečky jsou určeny aritmetickými průměry prvních a druhých souřadnic krajních bodů této úsečky).

Příklad 16: (Viz [9]) Dokažte, že z 50 libovolně zvolených navzájem různých prvočísel lze vždy vybrat 13 prvočísel tak, že rozdíl každých dvou je dělitelný pěti.

Řešení: Každé prvočíslo má při dělení pěti jeden z následujících tvarů: $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$. První z tvarů má pouze jediné prvočíslo 5. Rozdíl čísla 5 a jakéhokoliv jiného prvočísla nemůže být dělitelný pěti. Je-li tedy mezi zvolenými prvočísly číslo 5, vypustíme ho a budeme pracovat pouze se zbývajícími 49 prvočísly. Všechna prvočísla (49 nebo 50) rozdělíme do zbytkových tříd C_1, C_2, C_3, C_4. Prvočísel je alespoň $49 = 12 \cdot 4 + 1$. V jedné ze čtyř nenulových zbytkových tříd tedy bude 13 prvočísel. Všechna tato prvočísla dávají při dělení pěti stejný zbytek a proto je rozdíl kterýchkoliv dvou z nich dělitelný pěti.

ISSN 2694-8133

3. Závěr

Z předloženého souboru úloh je patrné, že úlohy řešitelné pomocí Dirichletova principu jsou poměrně jednoduché a studentům přístupné, navíc svými tématy vhodně doplňují a rozvíjejí jejich předchozí znalosti. Proto lze zařazení tohoto tématu do výuky, zejména v seminářích v závěrečných ročnících, plně doporučit. Další informace o Dirichletově pricipu lze nalézt v publikacích [2], [3], [5], [6] a [8].

Literatura

[1] Beránek, J. (2014). Dirichletův princip ve školské matematice. In: *8. didaktická konferencia, Zborník príspevkov* (s. 50-57). DTI Dubnica nad Váhom.

[2] Bukovský L & Kluvánek, I. (1970). *Dirichletov princíp.* Praha: Mladá fronta.

[3] Fuchs, E. (2011). *Diskrétní matematika pro učitele.* Brno: Masarykova univerzita.

[4] Hanáková, R. (2001). *Dirichletův princip*. Diplomová práce. Brno: Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta.

[5] Herman, J. & Šimša, J. (1987-1988). O jednom užití Dirichletova principu v teorii čísel. *Rozhledy matematicko-fyzikální 66,* s. 353-356.

[6] Herman, J, & Kučera, R, & Šimša, J. (2011). *Metody řešení matematických úloh I*. Brno: Masarykova univerzita.

[7] Kučera T. (2013). *Dirichletův princip.* Závěrečná práce SOČ. Brno: Gymnázium, třída kapitána Jaroše 14.

[8] Larson, L C. (1990). *Metódy riešenia matematických problémov.* Bratislava: Alfa.

[9] Volfová, M. (2010). *Úlohy využívající Dirichletův princip*. Dostupné z http://black-hole.cz/cental/wp-content/uploads/2010/03/Dirichletuv_princip.pdf.

VYUČOVÁNÍ PRAVDĚPODOBNOSTI NA 1. STUPNI ZÁKLADNÍCH ŠKOL V NĚMECKU

Jan FIALA
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Ekonomická fakulta (Česká republika)
fiala@ef.jcu.cz

Abstrakt

Kurikulum matematiky v primárním vzdělávání v Německu pružně reaguje na soustavně se měnící stav lidské společnosti a vědy. Příkladem toho je výuka pravděpodobnosti na 1. stupni základních škol. V Německu je učivo pravděpodobnosti díky kvalitní legislativní opoře integrální součástí vzdělávání na všech typech a stupních škol. Didaktici matematiky se věnují výzkumu této problematiky a informují o svých výsledcích převážně v úzce zaměřených studiích. Německé učebnice matematiky pro 1. stupeň obsahují základní učivo pravděpodobnosti. Výuka pravděpodobnosti se na 1. stupni převážně hravou formou zaměřuje na budování prvotních představ žáků o náhodných procesech a pravděpodobnosti jevů. Příspěvek shrnuje podstatné rysy výuky pravděpodobnosti v primárním vzdělávání v Německu a poskytuje množství podnětů pro české učitele při výuce pravděpodobnosti na 1. stupni českých základních škol.

Klíčová slova: matematika, vyučování matematice, pravděpodobnost, propedeutika pravděpodobnosti

TEACHING PROBABILITY AT PRIMARY SCHOOLS IN GERMANY

Abstract

Mathematics curriculum at primary schools in Germany responds promptly to permanently changing situation of human society and science. Teaching Probability at elementary schools can be set as an example. In Germany the Probability curriculum is owing to fine legislative support an integral part of education at all sorts and stages of schools. The didacticians of Mathematics deal with research of this topic and they inform of their results mostly in narrowly focused studies. The German mathematical schoolbooks for primary schools contain the fundamental curriculum of probability. The Teaching of Probability at primary schools focuses mainly by a playful form to build primal pupil concepts about random processes and probability of phenomena. The article summarizes the fundamental attributes of teaching Probability at primary schools in Germany and it provides a lot of impulses for Czech teachers during teaching Probability at Czech primary schools.

Keywords: Mathematics, Teaching Mathematics, Probability, Propedeutics of Probability

1. Úvod

Učivo pravděpodobnosti je nedílnou součástí školního vzdělávání v mnoha vyspělých zemích. Rychlost, s jakou si pravděpodobnost získala své místo ve školní výuce[1], lze považovat

[1] V Německu se podle Cordt (2012 , s. 4) učivo pravděpodobnosti objevilo ve vzdělávacích plánech pro vyšší ročníky gymnázií již v roce 1901, avšak až do roku 1945 hrály statistika a pravděpodobnost spíše bezvýznamnou roli. V 70. letech 20. století byla pravděpodobnost voliteným učivem k maturitě a vyučovala se během jednoho

za velký úspěch, neboť axiomatická výstavba teorie pravděpodobnosti se objevila až na počátku minulého století[2] a dále se ještě upravovala v padesátých letech.[3] Zatímco zařazení učiva pravděpodobnosti do výuky matematiky pro žáky 2. sekundárního vzdělávání (asi od 11 do přibližně 15 let věku žáků) bývá dnes většinou obvyklé, není jeho zařazení do výuky v primárním vzdělávání[4] samozřejmé. Podrobnější analýzu rozdílů ve vyučování pravděpodobnosti v různých zemích zde neprovádíme a zaměřujeme se pouze na výuku pravděpodobnosti v Německu (kap. 3). Aby mohl čtenář aspoň částečně porovnat vyučování pravděpodobnosti mezi ČR a Německem, připomínáme některé aspekty výuky pravděpodobnosti v ČR (kap. 2). V kapitole 4 a se pak věnujeme propedeutice pravděpodobnosti na 1. stupni německých základních škol.

2. Výuka pravděpodobnosti v ČR

Pravděpodobnosti se v českém školním prostředí nevěnuje dostatečná pozornost, jde u žáků i učitelů o méně oblíbené učivo a většinou se jeho důležitost pro budování matematické gramotnosti žáků během školního vzdělávání podceňuje. Učivo pravděpodobnosti je zastoupeno v RVP ZV až pro 2. stupeň ZŠ a v RVP na SŠ. Na 1. stupni ZŠ se s učivem pravděpodobnosti žáci prakticky nesetkají a jeho zařazení záleží čistě na konkrétním učiteli. Pro zařazení učiva pravděpodobnosti do výuky matematiky na 1. stupni chybí legislativní opora, jak pro učitele, tak i např. pro tvůrce učebnic.

Většina dostupných výzkumných příspěvků českých autorů se týká výuky pravděpodobnosti na vyšším než primárním vzdělávání. Autorovi není známa žádná ucelená práce českých autorů, která by se komplexně zabývala zařazením učiva pravděpodobnosti v učebnicích nebo ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ v ČR, ani třeba jen jako součást komplexnějšího pohledu na výuku matematiky na 1. stupni. Okrajově se výuky pravděpodobnosti dotkly snad jen autorky v publikaci (Hošpesová, Stehlíková, Tichá 2007), která se věnuje tématu kultury vyučování matematice. J. Slezáková vytváří *Koncept pravděpodobnosti v prostředí Krokování* (první ročník a vyšší ročníky) (Hošpesová, Stehlíková, Tichá 2007, s. 131-132), ve kterém představuje tzv. krokování k budování propedeutiky pravděpodobnostního myšlení: *...pětice žáků závodí na trase dlouhé* 8-12 *kroků. První žák hodí hrací kostkou, řekne číslo, které padlo, a udělá příslušný počet kroků. Pak následují další žáci. Kdo je první v cíli? Popsaná hra je hazardní hrou.* Autorka dále představuje obtížnější hru, tzv. hru Fáborky, ve které si hráč vytváří *pravděpodobnostní intuici*. Tu využije ke zvýšení nadějí (šance) na výhru: *Žák dostane* 4 *fáborky a ty položí na čtyři značky krokovacího jeviště. Například na značky vzdálené od začátku jeviště o* 2 kroky, 5 *kroků,* 8 *kroků a* 12 *kroků. Pak se žák postaví na začátek krokovacího jeviště a hodí dvěma kostkami. Souček ok, která* na *kostkách padnou, odkrokuje. Například, když padne* 2 *a* 6, odkrokuje 8 *kroků. Má-li na značce, ke které došel, fáborek, získává bod. Nemá-li, nezíská nic. [...]*. Výsledky jsou zaznamenávány do tabulky. Žák si vytváří tzv. klastr[5] budoucího schématu pravděpodobnosti výsledku v jevu „hod dvěma kostkami", ke kterému se lze vrátit znovu na 2. stupni ZŠ a opětovně na SŠ.

---

pololetí školního roku. Na přelomu tisíciletí se podle Sill a Kurtzmann (2019, s. 11) pravděpodobnost na 1. stupni vyučovala pouze na dvou z 16 spolkových zemích, stochastika jako celek pak na 14 ze všech spolkových zemích.

[2] Axiomatickou výstavbu pravděpodobnosti vytvořil světově známý ruský matematik Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903-1987) v díle *Grundbegriffe der Wahrscheilichkeitsrechnung* v roce 1933.

[3] Kolmogorovou teorii dále rozvíjel např. maďarský matematik Alfréd Rényi (1921-1970).

[4] Jde o primární a sekundární vzdělávání ISCED 1 a 2 podle mezinárodní standardní klasifikace vzdělávání (*International Standard Classification of Education*), který trvá v Německu 4 roky a probíhá v rámci základní školy (*Grundschule*).

[5] Tzv. klastrem se rozumí předstupeň schématu pojmu, jde o propojení izolovaných informací o daném objektu, procesu, situaci, vztahu v procesu poznávání a učení žáka.

Učivo pravděpodobnosti se v českých učebnicích pro 1. stupeň ZŠ objevuje jen velmi sporadicky. Výjimkou jsou nově např. Hejného učebnice matematiky z nakladatelství Fraus, kde je pravděpodobnost označena jako učivo rozšiřující. Žáci se po řešení vhodně vybraných úloh nejdříve z kombinatoriky, později také z pravděpodobnosti přímo seznamují s výpočtem pravděpodobnosti v Laplaceových pokusech.

Jsme přesvědčeni o zásadním významu zařazení učiva pravděpodobnosti do výuky matematiky na 1. stupni ZŠ a v dalších kapitolách představujeme německé pojetí. Jsme si vědomi toho, že výuka pravděpodobnosti na 1. stupni v Německu je pro české učitele pouhou inspirací a že k této problematice je potřeba vést dlouhodobou odbornou diskusi.

3. Výuka pravděpodobnosti v Německu

V Německu je pravděpodobnost spolu se statistikou[6] součástí tzv. stochastiky. V pedagogické literatuře se tak běžně používá označení „stochastické vzdělávání“ nebo „výuka stochastiky“. Z komplexního oboru stochastiky se v dalších kapitolách zaměřujeme pouze na pravděpodobnost. Představíme, jak jsou její základy vyučovány v primárním vzdělávání v Německu, kde se jí ve srovnání s ČR věnuje výrazně větší pozornost. Čerpáme především z monografie (Sill, Kurtzmann 2019)[7] a mnoha jiných především časopiseckých zdrojů.

3.1. Důležitost vyučování a učení se pravděpodobnosti

Význam pravděpodobnosti jako součásti vzdělávání zdůraznila řada osobností z oblasti vědy. Můžeme připomenout maďarského matematika Alfréda Renyia (1921-1970), který zdůraznil užitečnost počtu pravděpodobnosti v běžném životě i v různých oblastech vědy a techniky. Podle něj se žáci učí pravděpodobnost především proto, neboť hraje důležitou roli ve vývoji jejich myšlení. Také se vizionářsky domníval, že je pravděpodobnost nepostradatelná pro další rozvoj matematiky jako vědy.[8] Nemýlil se. Ke všem jeho postřehům se dodnes vracíme. Dokladem toho je zřejmý stále rostoucí význam pravděpodobnosti ve stále širší a pestřejší škále vědních oborů: Znalosti z pravděpodobnosti se využijí v matematické statistice, fyzice, biologii, meteorologii, chemii, medicíně, stavebnictví, ekonomii, finančnictví, pojišťovnictví, farmacii a farmakologii, právu, ale i např. v lingvistice, reklamě aj. Zajímavým příkladem je kryptografie, která přímo využívá nepředvídatelnost nahodilých jevů v šifrování a pomocí posloupnosti (pseudo)náhodných čísel vytváří účinné šifrovací klíče. Německá společnost si uvědomuje tento argument. V roce 2005 byl vyslyšen politický požadavek a s výukou pravděpodobnosti se od té doby začíná v Německu již na 1. stupni ZŠ.

Dalším zásadním argumentem je zkušenost, že téma pravděpodobnosti není ani malým žákům vlastně vůbec cizí. Zřejmě nenajdeme děti, které by se nemusely někdy rozhodovat v situaci, která je (často jen částečně nebo i zcela skrytě) spojena s náhodou. Žáci mladšího školního věku mají naopak s náhodou už řadu zkušeností, jak z předškolních zařízení, tak i z rodinného prostředí. Určitě se setkali s náhodou při různých dětských hrách, které jsou často založeny na principu náhody. Děti tedy vlastně mají i zkušenosti s náhodnými generátory (losovacími zařízeními), jako jsou kostka, pouťové kolo štěstí či losování předmětu z dlaně apod. Při různých hrách (tedy bez pomoci školní výuky) si děti rozvíjí své první představy o náhodě, často si vytváří vlastní animistické představy a marně pátrají po „tajemství“, díky kterému by jim při hodu hrací kostkou zaručeně padla stěna se 6 puntíky. Všechny jejich odhady o nastání toho kterého jevu jsou vždy subjektivní. Pokud nedojde k rozvoji ale i korekci

---

[6] Někdy také společně s kombinatorikou.

[7] Recenze publikace byla uveřejněna v časopise e-Pedagogium a je dostupná z https://e-pedagogium.upol.cz/archive.php?filtered=1&mag=epd&year=2018.

[8] Volně podle Cordt (2002, s. 5).

těchto prvotních intuitivních představ o pravděpodobnosti, zafixují si žáci až do začátku výuky pravděpodobnosti na 2. stupni své chybné představy a nerealistická očekávání, což výrazně ztíží výuku pravděpodobnosti na 2. stupni. Prvostupňoví učitelé by měli zavčas využít tento potenciál malých žáků, neboť s každým ročníkem klesá podle psychologů zájem žáků o zkoumání nových věcí i nadšení pro matematiku.

Pravděpodobnost je jako matematická disciplína definována axiomaticky, což má za důsledek to, že mnoho jejích pojmů zůstává ve výuce dlouhou dobu nedefinováno, a i později jsou tyto základní pojmy ve školním prostředí velmi těžko uchopitelné. To všechno však není překážkou pro zařazení pravděpodobnosti na 1. stupeň! Pravděpodobnost je možné vyučovat jedině tak, že se žáci budou dlouhodobě a opakovaně setkávat s pravděpodobností, a to vhodnou formou. Toto „setkávání" je proces, který by měl začít již na 1. stupni tak, jak je tomu na německých školách. Pojem pravděpodobnost je potřeba "pěstovat" a rozvíjet. Experimentování a pozorování – běžné z výuky pravděpodobnosti na 2. stupni – může provádět snadno i prvostupňový žák, používané učební metody, založené na hrách a experimentech také nebrání zařazení tohoto učiva. Naopak budou vzbuzovat u žáků zájem, radost a zvědavost. Výuka pravděpodobnosti na 1. stupni by měla být hravá a měla by umožnit udělat výuku "živou" a pro žáky zajímavou. Kromě toho se také při experimentech, při zápisech a zpracování výsledků pokusů žáci učí techniky a metody podstatné i pro další oblasti matematiky, např. statistiky.

3.2. Odborná literatura a výzkum výuky pravděpodobnosti v Německu

Výuce pravděpodobnosti na primárním vzdělávání se v Německu věnuje mnoho odborných didaktiků matematiky, psychologů, odborníků v oblasti primární i sekundární pedagogiky i učitelů z praxe. Sill a Kurtzmann hned v úvodu své publikace (2019, s. 1) upozorňují, že mezi německými didaktiky existuje více různých představ o smysluplné výuce stochastiky (včetně pravděpodobnosti). V kapitole 4.1 čerpáme především z publikace (Sill, Kurtzmann 2019). Pro hlubší studium problematiky je však možné využít řadu dalších odborných i populárně-naučných publikací, které poskytují ucelený či jen částečný metodologicko-didaktický vhled do tématu výuky pravděpodobnosti v Německu.[9]

Eichler, A. & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Eichler, A. & Vogel, M. (2011). *Leitfaden Stochastik.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Kütting, H. & Sauer, M. J. (2008). *Elementare Stochastik: mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte.* Berlin (aj): Springer.

Kütting, H. (1994). *Didaktik der Stochastik.* Mannheim: BI-Wiss.-Verlag.

Schupp, P. (1979). *Zugänge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Tübingen: DIFF.

Gigerenzer, G., Swijtink, Z., Poter, Th., Daston, L., Beatty, J. & Krüger, L. (1999). *Das Reich des Zufalls. Wissen zwischen Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeiten und Unschärfen.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Grünewald, R. (1989). *Untersuchungen unter Einbeziehung kombinatorischer und stochastischer Aufgaben in den Mathematikunterricht der unteren Klassen* (Schulmathematische Forschung). Preprint č. 221, Humboldt-Universität zu Berlin: Sektion Mathematik.

[9] Vybíráme jen nejcitovanější publikace, vynechali jsme odborné publikace k teorii pravděpodobnosti a statistiky.

ISSN 2694-8133

Grünewald, R. (1991). Schwierigkeiten mit der (statistischen) Wahrscheinlichkeit in den ersten Schuljahren. In: Stampe, E., Schulz, W., & et al. *Berliner Tagung zur Didaktik der Mathematik*, s. 49-52.

Grünewald, R. (1991). Zum Unterrichten von Stochastik in der Primarstufe – Standpunkte und erste Erfahrungen. In: R. Grünewald (ed.), *Stochastik im Mathematikunterricht der unteren Klassen; Kolloquium am* 4. 2. 1991 *in Berlin*, s. 44-53.

Heitele, D. (1977) Fragmente einer Geschichte der Wahrscheinlichkeitsdidaktik (insbesondere des Primarbereiches). *Didaktik Mathematik.* 12(4), s. 245-262.

Hilsberg, I. & Warmuth, E. (1991). Stochastik von Klasse 1 bis zum Abitur – ein Lehrgangsentwurf. In: R. Grünewald (ed.), *Stochastik im Mathematikunterricht der unteren Klassen; Kolloquium am* 4.2.1991 *in Berlin*, Preprint Nr. 91-18, (s. 6-14). Humboldt-Universität zu Berlin: Fachbereich Mathematik.

Neubert, B. (2006). Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ in Schulbüchern für den Primarbereich. In Eichler, A., & Meyer, J. (ed.), *Tagungsband* 2006/2007 *des Arbeitskreises "Stochastik in der Schule" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. Anregungen zum Stochastikunterricht, Band* 4 (s. 49-63). Hildes-heim: Franzbecker.

Panknin, M. (1974). *Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit und Statistik für die Klassen* 1-6. Bochum: Verlag Ferdinand Kamp.

Sill, H-D., & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Wollring, B. (1994). Fallstudien zu frequentistischen Kompetenzen von Grundschulkindern in stochastischen Situationen – Kinder rekonstruieren verdeckte Glücksräder. In H. Maier & J. Voigt (ed.), *Untersuchungen zum Mathematikunterricht. Verstehen und Verständigung* (s. 144-180). Köln: Aulis Verlag.

Mnoho příspěvků, informací z výzkumných zpráv, zkušeností z realizovaných experimentů ve výuce, různé případové studie a návrhy na realizaci výuky stochastiky lze nalézt především v německých časopisech matematicko-didaktického a pedagogického zaměření, k nimž patří např. *Stochastik in der Schule*, *Grundschule*, *Grundschulunterricht Mathematik*, *Grundschulmagazin*, *Mathematik lehren*, *Mathematik in der Schule*, *Mathematik*, *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe*, *Statistik in der Schule* aj.[10]

Převážná část výzkumů výuky pravděpodobnosti v Německu se týká sekundárního vzdělávání I a II, začíná se však také zvyšovat počet příspěvků k témuž tématu pro 1. stupeň ZŠ. Cordt (2012, s. 3) shrnuje výsledky dosud realizovaných výzkumných šetření a zmiňuje především výsledky studie PISA z roku 2003, podle kterých považují němečtí učitelé pravděpodobnost spíše za tzv. „téma na konec školního roku”. Šetření rovněž poukázalo na to, že učitelé v Německu učí pravděpodobnost (stochastiku) často neradi a věnují jí ve výuce na 1. stupni prostor v míře nezbytně nutné. Příčin spíše negativního pohledu na výuku pravděpodobnosti v názorech učitelů může být více: teprve nedávno (přelom 19. a 20. století) byla pravděpodobnost zařazena do výuky na německých školách, více aktivně působících učitelů neprošlo na VŠ odpovídající přípravou v pravděpodobnosti aj. Přesto 42,5 % tázaných učitelů souhlasí s rostoucím významem stochastiky pro běžný život žáků a potřebou zařadit toto učivo do výuky, s výukou pravděpodobnosti na primárním vzdělávání souhlasí 17,5 % respondentů. Přestože působí žáci při výuce pravděpodobnosti jako pozornější a motivovanější,

[10] Podrobný přehled lze nalézt v seznamu použité literaury diplolové práce Cordt (2012).

ISSN 2694-8133

hodnotí učivo jako obtížné.[11] Cordt se domnívá, že příčinou posledního zjištění by mohl být nedostatek vlastních zkušeností žáků z mimoškolního prostředí.

Výuka pravděpodobnosti trpí v primárním i sekundárním vzdělávání podle Sill a Kurtzmann (2019, s.12) dodnes značně tím, že se v různých spolkových zemích dost liší vysokoškolská příprava budoucích prvostupňových učitelů: podíl matematické složky vzdělávání učitelů kolísá mezi 3-33 % celkového obsahu vysokoškolské přípravy!

3.3. Učivo pravděpodobnosti v německých legislativních kurikulárních dokumentech

Pravděpodobnost je v Německu zakotvena především ve dvou kurikulárních dokumentech, které jsou závazné pro všechny spolkové země. Jde o tzv. *Vzdělávací standardy matematiky pro primární vzdělávání* (vyd. 2005, dále je *Standardy*)[12] a tzv. *Doporučení k cílům a tvorbě stochastické výuky…* (vyd. 2002, dále jen *Doporučení*).

3.3.1 Učivo pravděpodobnosti ve vzdělávacích standardech

Standardy stručně shrnují cílové obsahové kompetence žáků pro oblast *Data, četnost a pravděpodobnost*. Odstavec k pravděpodobnosti začíná heslem *Srovnávat pravděpodobnosti jevů v náhodných experimentech* a je dále upřesněn dvěma body:

- *znát základní pojmy (např. jistý, nemožný, pravděpodobný)*,
- *odhadovat šance na výhru v jednoduchých náhodných experimentech (např. hry s kostkou)* (2005, s. 11).

Žáci v primárním vzdělávání v Německu by se měli naučit především kvalitativně ohodnocovat pravděpodobnost, a to pomocí přídavných jmen *nemožné*, *pravděpodobné* a *jisté*, případně se zdůrazněním jako *spíše nemožné*, *téměř jisté* apod. Cílem výuky je také naučit se znázorňovat pravděpodobnost výsledků náhodných procesů na tzv. pravděpodobnostní škále. Žáci by se měli dále pokoušet odhadovat šance na výhru v různých hrách o náhodě a přemýšlet o tom, zda je hra spravedlivá či nikoliv. Ze *Standardů* citujeme typové úlohy, které představují cílový standard žáků na konci 4. třídy německé základní školy.

Úloha 1: *U hrací kostky je součet ok proti sobě ležících stěn stále* 7. *Tedy např.* 3 *proti …, … proti … apod.*

Úloha 2: *Představ si, že házíš hrací kostkou pětkrát a sčítáš počty ok na vrchní stěně kostky po dopadu. Nejmenší součet je… Největší možný součet je…*

Úloha 3: *Představ si, že házíš dvěma hracími kostkami. Při jednom hodu sčítáš počty ok na vrchních stěnách obou kostek. Jaké součty jsou možné? Všechny vypiš…*

Úloha 4: *Při házení dvěma hracími kostkami je součet* 7 *ok, která padnou na vrchních stěnách kostek, podstatně častější než součet* 12. *Čím to je?…*

[11] Více k tomu například v článku Martignon, L. & Wassner, C. (2005). Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 2/2005, s. 202-222.

[12] Pro dokreslení kompaktnosti systému kurikulárních dokumentů v Německu dodáváme, že oba dokumenty navazují na tzv. *Společný rámec pro spolkové země ve vzdělávání dětí v předškolních zařízeních* (v originále *Gemeinsamer Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen*, vyd. 2004 a dostupné z https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_06_04-Fruehe-Bildung-Kitas.pdf). Dokument naznačuje hlavní směry a cíle vzdělávání žáků v mateřských školách. Každá spolková země kromě toho vydává pro učitele svůj tzv. *Orientační plán pro vzdělávání a výchovu v předškolních zařízeních* (*Orientierungsplan für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen*), který je pro učitele z dané spolkové země k dispozici na https://www.bildungsserver.de).

Úloha 5: *Hraješ si s kamarády s hrací kostkou. Každý z hráčů si smí vybrat jedno pravidlo, podle kterého bude získávat body.*

- *Získáš bod, když bude počet ok na vrchní stěně kostky sudý.*
- *Získáš bod, když bude počet ok na vrchní stěně kostky dělitelný třemi.*
- *Získáš bod, když bude počet ok na vrchní stěně kostky menší než pět.*
- *Získáš bod, když bude počet ok na vrchní stěně kostky větší než pět.*
- *Získáš bod, když bude počet ok na kostce nulový.*

Chceš získat co nejvíce bodů. Které pravidlo bys zvolil? (2005, s. 33-35)[13]

Z typových úloh vyplývá, že žáci by na 1. stupni měli řešit v hodinách matematiky úlohy, se kterými se setkávají čeští žáci nejdříve na 2. stupni ZŠ! Mezi úlohami rozhodně není úkol vypočítat hodnotu pravděpodobnosti (kvantifikovat ji), ale pouze získávat první zkušenosti s náhodnými procesy a jejich výsledky a pravděpodobnosti výsledků kvalitativně ohodnocovat.

3.3.1 Učivo pravděpodobnosti v Doporučeních k výuce pravděpodobnosti

Tzv. *Doporučení* (2002)[14] precizují cíle vzdělávání žáků v pravděpodobnosti na 1. stupni ZŠ v Německu. Ve své úvodní části kladou autoři dokumentu směrem k současné výuce matematiky jasný požadavek: *K úkolům vzdělávání moderní výuky matematiky patří […] rozvíjet dovednosti žáků rozhodovat se a zdůvodňovat pomocí dat či pravděpodobnostních úvah a soudů.* (2002, s. 22-23) Taková výzva našla v Německu svou odezvu: učivo pravděpodobnosti je zařazeno v učebnicích matematiky pro 1. stupeň a také budoucí prvostupňoví učitelé jsou školeni v propedeutice pravděpodobnosti na VŠ. Autoři dále požadují, aby učivo pravděpodobnosti nestálo ve výuce matematiky osamoceně, ale výhradně propojené s ostatním učivem. V rámci absolventské úrovně ve stochastice na primárním vzdělávání by žáci mimo jiné měli:[15]

- *být konfrontováni s pravděpodobnostními výpověďmi, měli by zkoušet hry s generátory náhodných čísel aj.,*
- *odhadnout a kvalitativně srovnávat pravděpodobnosti jednoduchých náhodných jevů na základě dat, zkušeností nebo analýzy podmínek průběhu náhodného procesu,*
- *disponovat prvními zkušenostmi s jednoduchými náhodnými experimenty.* (2002, s. 23)

3.4. Sonda zařazení učiva pravděpodobnosti v německých učebnicích[16]

Německé školy si vybírají z široké nabídky učebnic matematiky pro žáky 1. stupně.[17] Každá spolková země nebo jejich skupiny preferují své vzdělávací materiály, které reflektují obsahové požadavky na vzdělávání podle školní legislativy příslušné spolkové země.

[13] Formulace úloh byly oproti originálu terminologicky mírně zpřesněny.

[14] *Doporučení* vydala v roce 2002 německá Společnost pro didaktiku matematiky (*GDM – Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*). Více informací na https://didaktik-der-mathematik.de.

[15] Citujeme pouze část k pravděpodobnosti.

[16] Srovnáním učebnic pro 2. stupeň základních škol (a víceletá gymnázia) se zabývala Jana Vincencová ve své diplomové práci *Pravděpodobnost a statistika v německých, rakouských a českých učebnicích matematiky pro nižší stupeň gymnázia.* (2013) Masarykova univerzita v Brně, Pedagogická fakulta. Dostupné z https://is.muni.cz/th/fds94/.

[17] K nejčastěji užívaným učebnicím matematiky pro žáky 1. stupně v Německu patří: *Denken und Rechnen (Ausgabe Ost, Arbeitsheft Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit, Westermann Schulbuchverlag, Braunschweig), Eins zwei drei /Cornelsen verlag, Berlin), Mathefreunde (Volk und Wissen Verlag, Berlin), Mathematikus (Westermann Schulbuchverlag, Braunschweig), Nussknacker (Ernst Klett Verlag, Stuttgart), Rechenwege (Volk und Wissen Verlag, Berlin), Zahlenzauber (Oldenbourg Schulbuchverlag, München).*

Zdržujeme se úmyslu poskytnout zde přehled o zařazení učiva pravděpodobnosti v učebnicích pro žáky 1. stupně vzdělávání. Na ukázku ale představujeme zařazení učiva pravděpodobnosti v učebnici *Nussknacker* (2014) z nakladatelství *Ernst Klett Verlag*, která se užívá od roku 2014 v téměř všech spolkových zemích. Učivo pravděpodobnosti se v ní vyskytuje v učebnicích pro 2., 3. a 4. třídu v kapitole s názvem *Náhoda – pravděpodobnost – kombinatorika*[18] a pod heslem *Experimenty s kostkami.*[19] Formálně velmi pěkně zpracované a tvořivě pojaté učebnice obsahují mnoho doprovodných barevných obrázků motivačního i výkladového významu. Průvodcem žáků je havran Trax, jehož rady jim pomáhají při řešení. K učebnici jsou k dispozici pracovní sešity (tištěné nebo na CD ROMu), učebnice pro učitele, učitelský balík s materiály, předlohy ke kopírování rozlišené podle náročnosti pro možnost diferenciace ve vyučování, motivační sešit a další didaktické materiály do výuky.

V učebnici *Nussknacker* pro 2. třídu je hlavní pozornost věnována porozumění a správnému užívaní pojmů *nemožný*, *pravděpodobný* a *jistý.* Slouží k tomu tzv. pravděpodobnostní škála (bez označení krajních bodů čísly 0 a 1 jako mezních hodnot pravděpodobnosti). Žáci na 1. stupni nacvičují pouze kvalitativní ohodnocení pravděpodobnosti. Jedna z prvních úloh využívá házení kostkou, tedy Laplaceův náhodný pokus. Překvapivě následuje úloha na házení připínáčkem, což je ne-Laplaceův pokus. Ta demonstruje žákům, že každý z hodů nenastává při sérii opakování „stejněkrát“.[20] V dalších úlohách žáci procvičují rozhodování o „férových” hrách, kde se již využívá hodu dvěma kostkami.

V učebnici pro 3. třídu se žáci poprvé seznamují s náhodným procesem losování různě barevných kostek ze sáčku a na řadě úloh trénují své odhady, který výsledek losování je *nemožný*, *pravděpodobný* a *jistý*. Opět tedy jde o nácvik kvalitativního ohodnocení pravděpodobnosti. Dále žáci srovnávají dvě pravděpodobnosti: *V prvním sáčku je* 1 *červená a* 2 *modré kostky, v druhém sáčku jsou* 3 *červené a* 2 *modré kostky. Ze kterého sáčku je výhodnější losovat, chci-li vylosovat červenou kostku?* Apod. Překvapivě se zde objevuje již také obtížnější úloha na losování dvou kostek bez vracení.

V učebnici pro 4. třídu se nově objevuje losovací zařízení kolo štěstí, také nazývané ruletka, které není v českém prostředí příliš známé a využívané. S koly štěstí lze řešit mnoho různých úloh, velkou výhodou je možnost vyrobit si vlastní ruletku a využít ji např. při rozhodování o férovosti hry. Žáci opět odhadují, zda jsou sledované náhodné výsledky *nemožné*, *pravděpodobné* nebo *jisté.* Na pravděpodobnostní škále přibyl ještě stupeň *nepravděpodobný*, umístěný mezi *pravděpodobný* a *nemožný.* V některých úlohách se využívají strukturně složitější kola štěstí, u nichž jsou jednotlivá pole (výseče kruhové ruletky) odlišena symbolem a zároveň také barvou. Díky tomu lze sledovat i složitější náhodné jevy.

Úlohy z pravděpodobnosti zařazené v učebnicích *Nussknacker* pro 2. až 4. třídu rozvíjí další úlohy v doplňkových učebních materiálech vydávaných k učebnici.

4. Propedeutika pravděpodobnosti v primárním vzdělávání v Německu

Propedeutikou zde budeme dále podle Pedagogického slovníku (Průcha, Walterová, Mareš 2003, s. 184) rozumět *průpravu* či *přípravu ke studiu určitého oboru*. Užíváme tento termín ve smyslu přípravy žáků 1. stupně na učení se pravděpodobnosti na 2. stupni ZŠ. Tam žáci navazují na své zkušenosti o náhodných jevech ze tříd 1. stupně, své zkušenosti a představy o matematických fenoménech rozvíjí a zpřesňují obsah dosud používané „dětské” terminologie. V Německu se tak i v případě učiva pravděpodobnosti dodržuje spirálový princip zařazování

[18] V originálním znění *Zufall – Wahrscheinlichkeit – Kombinatorik.*
[19] V originálním znění *Würfelexperimente*.
[20] Připínáček je tzv. asymetrický náhodný generátor.

učiva do výuky, který navrhl vývojový psycholog J. Bruner (1915-2016) na základě objevu spirálového vývoje dětského myšlení.

První propedeutiku pravděpodobnosti v Německu, avšak pro nižší třídy gymnázia (v ČR by šlo o nižší třídy 4letého gymnázia) zpracoval A. Engel v roce 1966[21], která se však pro primární vzdělávání kvůli své náročnosti nehodí. Reformní hnutí v 60. a 70. letech „New Math“ v mnoha zemích změnilo učební plány matematiky, v jejímž duchu napsali V. Lindenau a M. Schindler učebnici *Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe* I[22]. Koncepci jejich vyučování pravděpodobnosti lze považovat za možnou, Sill a Kurtzmann (2019, s. 8-9) však pouze komentují její výhody a nevýhody. Didaktiku stochastiky rozvíjeli také např. H. Kütting (1994) či D. Heitele (1977) v dílech uvedených v kapitole 3.2 aj.

Ve svém konceptu výuky pravděpodobnosti na 1. stupni ZŠ v Německu (kap. 4.1 a 4.2) Sill a Kurtzmann (2019, s. 4) dokládají, že zařazení učiva pravděpodobnosti na 1. stupeň je v souladu s konstruktivistickou teorií učení švýcarského filozofa a psychologa J. Piageta (1896-1980).

4.1. Koncept propedeutiky a výuky pravděpodobnosti v 1. a 2. ročníku ZŠ v Německu podle Sill a Kurtzmann (2019)

Výchozím pojmem koncepce výuky stochastiky (jejíž součástí je pravděpodobnost) jsou pro Sill a Kurtzmann (2019, s. 18) *stochastické situace*, kterými rozumí „jednak situace v realitě, ve kterých vznikají a z nichž mohou být zpracovávána data, ale také situace, v nichž jsou možné různé výsledky, ale ve kterých není s jistotou dáno, který z výsledků nastane.“ Stochastické situace lze nalézt všude v přírodě i společnosti: stavy počasí, růst rostlin, tělesný vývoj člověka a zvířat, produkce výrobku, změny ve volnočasových aktivitách dětí, průběh spánku, realizace snídaně, cesta do školy, psaní testu atd. Typické stochastické situace vznikají při hodech mincí nebo jinými předměty, točení kolem štěstí, losování z osudí apod.

Na stochastické situace nahlíží Sill a Kurtzmann (2019, s. 21-29) jako na každý proces, děj, který označují za „náhodný proces”, má-li při své realizaci více možných (navzájem různých) výsledků. Přitom který z výsledků nastane, rozhoduje náhoda. Sill a Kurtzmann (2019, s. 22) rozlišují procesy, které už byly ukončeny (např. Arne již napsal test.), které ještě trvají (např. růst stromu) nebo procesy, které teprve očekáváme (např. házení mincí). Některé procesy trvají velmi krátce (např. házení mincí), některé trvají déle (např. napsání testu) a některé velmi dlouho (např. růst stromu). Rozlišit lze také stochastické děje, u kterých výsledek neovlivníme (např. házení mincí) a u jiných zase ano (např. napsání školního testu). Výsledkem každého stochastického děje jsou určité výsledky (stavy, objekty nebo myšlenky) vybavené určitými znaky. Chceme-li proces studovat prostředky statistiky či pravděpodobnosti, je důležité se pro určitý znak rozhodnout, stejně jako metody, pomocí nichž zjistíme jeho hodnotu. Podstatné je také zjistit, za jakých podmínek děj probíhá a jaké faktory mají na výsledek vliv. Ne samozřejmou vlastností procesu je jeho opakovatelnost za stejných podmínek, jak jsme tomu zvyklí u náhodných experimentů. Jako stochastické situace jsou označovány tedy i takové, které proběhnou jen jedenkrát, bez možnosti svého opakování (např. fotbalový zápas). Většina stochastických procesů v přírodě, společnosti a v životě člověka proběhne pouze jedenkrát, málokdy se dají opakovat a většinou mají více možných výsledků.

[21] Engel, A. (1966). Propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie. *Mathematikunterricht* 12(4), s. 5-20.
[22] Lindenau, V., & Schindler, M. (1978). Neuorientierung des Mathematikunterrichts. 1. vyd. Studientexte zur Grundschuldidaktik. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

ISSN 2694-8133

Koncept zprostředkování základních obsahů z pravděpodobnosti v počáteční výuce na 1. stupni (v 1. a 2. ročníku ZŠ) rozdělili Sill a Kurtzmann (2019, s. 59, 60) do 5 fází, které v dalších kapitolách stručně okomentujeme a doložíme úlohami:

- *Rozpoznání možných výsledků procesu*
- *Porovnávání (Srovnávání) pravděpodobností*
- *Popis a interpretace pravděpodobností*
- *Znázornění pravděpodobností na škále*
- *Zkoumání vlivu podmínek procesu na pravděpodobnost výsledků*

4.1.1 Rozpoznání možných výsledků procesu

Prvním krokem k získávání prvotních zkušeností s výpověďmi o pravděpodobnostech je podle Sill a Kurtzmann (2019, s. 62-70) dovednost rozpoznat možné výsledky stochastického procesu, přičemž je s tím podle jejich názoru spojena řada problémů a úskalí.

Předně problémy terminologické: zatímco jsou pojmy *jistý jev* a *nemožný jev* definované pojmy z teorie pravděpodobnosti, používá se běžně při výuce také hovorové spojení *možný (výsledek)*. *Náhodný jev*, který se jako termín na 1. stupni nepoužije, je chápán jako libovolná podmnožina množiny všech možných výsledků nebo také jako výpověď o výsledku náhodného procesu. Je proto potřeba rozlišovat mezi *náhodným jevem* a *výsledkem náhodného procesu*, často označovaným jako *elementární jev*. *Jev* označuje v hovorové řeči něco výjimečného, zatímco v teorii pravděpodobnosti je to pojem zcela neutrální. Pojmy *jistý*, *možný* a *nemožný* by se měly používat pouze ve spojeních s *výsledkem: jistý výsledek* (ve významu *bezpečný*, *spolehlivý*, *bezproblémový*, *zaručený* apod.), *možný výsledek, nemožný výsledek* (ve významu *neproveditelný*, *nemyslitelný* apod.). Za vhodná lze považovat synonymní zdůraznění slov *jistý* a *nemožný*: *Je jediná možnost, že… Je absolutně jisté, že… Je zcela jisté, že… Bez pochyby nastane, že… Není žádná možnost, že… Vůbec není možné, aby… Je úplně nemožné, aby… Je vyloučeno, aby…* Apod. Porozumění „mezím” kvalitativního ohodnocení pravděpodobnosti se opře o skutečnosti, že výsledek nastane jistě (s jistotou) tehdy, když může nastat jediný tento výsledek jako možný, naopak výsledek je *nemožný*, když nemůže nastat žádný možný výsledek. Znak sledovaný v procesu má jedinou hodnotu, nebo žádnou hodnotu, nemají tedy charakter náhodnosti a nepůjde o stochastický proces, neboť každý stochastický proces má aspoň dva (spíše více) různých výsledků. Autoři v tomto případě doporučují vynechat úlohy o losování předmětu z osudí, v němž jsou pouze tytéž identické předměty. Důvodem je hlavně to, že takové losování nedává smysl a ani neodpovídá praxi, kde je většinou více možných výsledků.

Přebíráme úlohy podle Sill a Kurtzmann (2019, s. 67, 68).

Úloha 1. *S využitím obrázku*[23] *doplň do vět* $\boxed{\textit{jistý}}$, $\boxed{\textit{možný}}$, $\boxed{\textit{nemožný}}$. *a) Je…, že Natálka poběží rychleji. b) Je…, že se Dilara potí. c) Je…, že Timo vstřelí gól. d) Je…, že Mateo upadne. e) Je…, že Emira dá gól.*

Úloha 2. *Doplň do věty* $\boxed{\textit{jistý}}$, $\boxed{\textit{možný}}$, $\boxed{\textit{nemožný}}$. *Je…, že o Velikonocích postavím sněhuláka.*

Úloha 3. *Při školním sportovním dnu se koná běh na* 50 m. *Rozhodni, jestli jsou následující výsledky možné, jestli mohou nastat s jistotou nebo jsou zcela nemožné. A. Vítěz potřebuje méně než* 5 *sekund. B. Jeden žák odstoupí ze závodu. C. Vítěz potřebuje víc než* 5 *sekund.*

Úloha 4. *Jaké bude u nás zítra počasí? Co jistě nastane, co je možné a co vůbec není možné? A. Zítra bude pršet. B. Zítra bude sněžit. C. Zítra znovu vyjde slunce. D. Zítra bude velmi větrno. E. Zítra budou padat kroupy.*

[23] Obrázek zde neuvádíme. Obrázek znázorňuje hřiště, na kterém si hrají děti. Dětem na obrázku byla před řešením úlohy přiřazena jména.

Aby se učitel vyhnul pojmu *výsledek*, spojí žáci ve svých výpovědích kvalitativní ohodnocení přímo se sledovaným jevem: *Déšť je zítra pravděpodobný. Vyšplhat do* 10 s *je nemožné.* Apod. Nebo také jednoduše: *To je jisté. To je nemožné.*

4.1.2 Porovnávání pravděpodobností

Jestliže se ve výuce naváže na dosavadní zkušenosti žáků s hovorově užívaným slovem *pravděpodobný*, měli by se žáci naučit rozhodovat a vyjadřovat svá přesvědčení o tom, že jeden možný výsledek je *pravděpodobnější* než druhý a ve speciálním případě že může být první výsledek *stejně (přibližně stejně) pravděpodobný* jako druhý. Pravděpodobnosti se tedy buď sobě blíží (nebo jsou si zjevně rovny), nebo jsou (značně) rozdílné.

Při porovnávání pravděpodobností dvou výsledků téhož procesu se musí zjistit, který z obou výsledků má *větší* a který má *menší* pravděpodobnost. Slouží k tomu připojení příslovce *spíše,* případně *víc*, jako např. *Králík sežere spíše mrkev než bramboru.*, nebo druhý stupeň *pravděpodobnější*, jako např. *Je pravděpodobnější, že králík sežere mrkev nebo bramboru?*

Porovnání pravděpodobností výsledků má zvláštní význam, když se při sledovaném procesu mění podmínky, jako např. *Kdo se pilně učí, dostane dobrou známku.* Tedy dobrou známku dostane s větší pravděpodobností ten, kdo se pilně učí. Změna v přístupu žáka k učení zřejmě ovlivní kvalitativní hodnotu pravděpodobnosti, která se sníží: *Nebude-li se žák pilně učit, je méně pravděpodobné, že dostane dobrou známku.*

Podle Sill a Kurtzmann (2019, s. 72) je možné porovnat i dvě malé pravděpodobnosti a uvádí tento příklad: *Co je pravděpodobnější? Že zítra odpadne vyučování, protože bude učitelka nemocná, nebo kvůli tomu, že budou vyhlášeny prázdniny z důvodu nadměrného horka?*

Porovnávání pravděpodobností by samozřejmě bylo snazší, pokud bychom mohli pravděpodobnosti obou výsledků číselně vyjádřit zlomkem nebo desetinným číslem a čísla jednoduše porovnat. To je však možné až po zavedení kvantitativního hodnocení pravděpodobnosti, což se stane až na druhém stupni ZŠ. Na 1. stupni tuto cestu tedy využít nelze.

Úloha 1. *Představ si, že se při hodině tělocviku učíš skok do dálky s rozběhem. Jaký výsledek je pro tebe pravděpodobnější, je-li skok platný?*
A. Skočíš více než 2 m. *B. Neskočíš dál než* 2 m.

Úloha 2. *Potřebuješ do školy ještě jednu knížku. Kde ji pravděpodobněji koupíš?*
A. V supermarketu. B. V knihkupectví.

Úloha 3. *Jsi na cestě do školy. Co spíše uvidíš? A. Autobus. B. Kočár.*

Úloha 4. *Kdy je pravděpodobnější, že bude u nás teplo? A. V červenci. B. V prosinci.*

Úloha 5. *Kdy budeš mít spíše úpal od slunce?*
A. Při jízdě na kole v říjnu. B. Při slunném letním dni v červnu.

Úloha 6. *Co si pes spíše vybere? Co je pravděpodobnější? A. Kost. B. Okurku.*

Úloha 7. *Co je pravděpodobnější? A. Vyšplháš nahoru do* 10 s. *B. Nevyšplháš do* 10 s*?*

4.1.3 Popis a interpretace pravděpodobností

Potom co žáci porovnali pravděpodobnosti výsledků daného stochastického procesu, musí je kvalitativně ohodnotit. Slovo *pravděpodobný* je používáno ve svém hovorovém významu a vyjadřuje, že nějaký výsledek nastane s velkou jistotou, jako např. *Pravděpodobně bude zítra pršet.* Podobné výpovědi žáci sami bez problémů vytvářejí již v 1. ročníku ZŠ. (Sill, Kurtzmann 2019, s. 75) Pod popisem pravděpodobnosti výsledku se na 1. stupni ZŠ rozumí výhradně její kvalitativní popis pomocí *pravděpodobný* a *nepravděpodobný.* Synonymy mohou být pro

ISSN 2694-8133

pravděpodobný (resp. *nepravděpodobný*) *Nastane to s (poměrně) velkou pravděpodobností. Očekává se, že to nastane. Spíše to nastane.* apod. (resp. *S (poměrně) velkou jistotou to nenastane. Neočekává se, že to nastane. Spíše to nenastane.*). Výpovědi o pravděpodobnostech jsou předpovědi (prognózy, odhady, domněnky) o budoucích výsledcích, kterými žáci vyjádří, do jaké míry očekávají „nastoupení" daného výsledku. Zdůvodnit zvolené subjektivní kvalitativní hodnocení pravděpodobnosti lze odkazem na zkušenosti či znalosti o větší skupině stejných objektů, jak vysvětluje příklad, ve kterém se označí výpověď *Je možné, že zajíc doskočí dál než morče.* jako *pravděpodobná*, neboť spíše nastane, výpověď platí pro většinu zajíců, zatímco výpověď *Je možné, že morče doskočí dál než zajíc.* se ohodnotí jako *nepravděpodobná*, neboť nastane jen zřídka. Sill a Kurtzmann (2019, s. 80) nedoporučují užívat formulaci *Jak (Do jaké míry) pravděpodobné je, že…?*, neboť žáci znají odpovědi jen *pravděpodobný* a *nepravděpodobný*, a tak otázka ztrácí smysl.

Úloha 1. *Zakřížkuj. Dítě přijede do školy kočárem.* ☐ *Pravděpodobné.* ☐ *Nepravděpodobné.*
Úloha 2. *Zakřížkuj. Dítě hází míčem do koše.* ☐ *Pravděpodobné.* ☐ *Nepravděpodobné.*[24]
Úloha 3. *Vyber. Lev vyhraje nad slonem v přetahování pomocí lana.*
A. Pravděpodobné. B. Nepravděpodobné.

Na místo *spíše pravděpodobný* se pokoušeli Sill a Kurtzmann používat se žáky ve výuce spojení *více pravděpodobný*, ale ukázalo se, že pro většinu žáků byla sice nová formulace srozumitelná, avšak ne pro všechny. Podobně tomu bylo u formulace *méně pravděpodobný.* Zkušenosti z výuky nakonec potvrdily, že postačuje pro porovnání a popis pravděpodobnosti výraz *pravděpodobnější.*

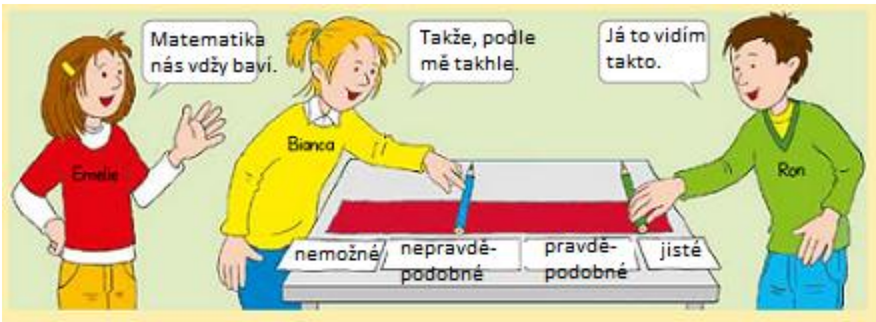
4.1.4 Znázornění pravděpodobnosti na škále

Dalším krokem je vyznačování (subjektivního odhadu) pravděpodobnosti na tzv. pravděpodobnostní škále.[25] Pravděpodobnostní škála (také pruh, pás, někdy také pravděpodobnostní barometr) je lineární ohraničený útvar, jehož geometrickým modelem je úsečka (v případě pruhu by to byl rovinný omezený útvar, jehož geometrickým modelem by byl obdélník). Jako vhodná reprezentace škály se Sill a Kurtzmann (2019, s. 81) osvědčilo použít pravítko délky 30 cm a pro vyznačení zvolené hodnoty pravděpodobnosti velkou kancelářskou sponku nebo prádelník kolíček, kterým lze snadno posouvat a polohu měnit. K výrobě škály lze použít také pruh tvrdého kartonu či ji jen nakreslit na tabuli. Při znázornění škály do sešitu se upřednostňuje vertikálně umístěná škála, což má výhodu i pro pozdější znázornění rozdělení pravděpodobnosti. Jedním modelem škály byl i tzv. pravděpodobnostní žebřík se žábou, která využívá mýtu o tom, že žába pozicí na žebříčku předpovídá počasí. Škála jako žebřík je jakousi diskrétní[26] škálou, kde jsou k volbě pouze body škály vymezené příčkami žebříku (samozřejmě bez udané kvantifikace). Škály se později doplňují různými pomocnými výpověďmi, jako např. *jistý*, *pravděpodobný, nepravděpodobný* a *nemožný* a dále *To se stane zřídkakdy. To se nemůže stát. To se stane v každém případě.* a *To se stane často.* Na pravděpodobnostní škálu doporučují Sill a Kurtzmann (2019, s. 84) vyznačovat hodnotu pravděpodobnosti křížkem, v některých úlohách se místo křížku objevuje např. znak pro smajlík nebo šipka ukazatele.

První dvě úlohy jsou formální, další tematicky čerpají ze života žáků. (Sill, Kreutzmann 2019, s. 84, 85)

[24] K úloze je připojen obrázek, na kterém dítě hází míč do basketbalového koše. Koš je však umístěn na druhé straně zdi, kam dítě nevidí.
[25] Jako první použil tento termín maďarský matematik Tamás Varga v roce 1972.
[26] Přídavné jméno „diskrétní" zde není užito ve významu celočíselný, nýbrž ve významu „nespojitý, nabývající jen určitých hodnot z intervalu".

Úloha 1. *K dané pravděpodobnostní škále s vyznačenou hodnotou pravděpodobnosti přiřaď správnou slovní charakteristiku: jistý, nepravděpodobný, nemožný, pravděpodobný.*
Úloha 2. *Na pravděpodobnostní škálu vyznač křížkem hodnotu pravděpodobnosti výsledku, který byl označen jako pravděpodobný, jistý, nemožný, nepravděpodobný.*
Úloha 3. *Když prší a současně svítí slunce, uvidím duhu. Doplň: A. To je…, protože… B. Zajíci žerou rádi trávu. To je…, protože…*
Úloha 4. *Zkontroluj, jestli je pravděpodobnost správně vyznačena. Pokud ne, vylepši! Při bouřce jsou blesky a hromy. A. Souhlasí. B. Nesouhlasí. Proč? ... Na podzim opadají listy z našich stromů. A. Souhlasí. B. Nesouhlasí. Proč? ...*
Úloha 5. *Jisté, pravděpodobné nebo nemožné? Jak to vidíš ty? Polož pokaždé tužku na pruh pravděpodobnosti. Srovnej s kamarádem.*
Úloha začíná obrázkem (Obrázek 1) a v následující tabulce žáci přímo kvalitativně ohodnocují pravděpodobnost určitých jevů v různých oblastech:
Ve škole: Sport je nejlepší školní předmět. Všichni žáci spočítají 597 : 7 *správně. Většina žáků spočítá* 99 − 50 *správně. Z matematiky dostanu dvojku.*
V oblasti Počasí: Zítra bude hezké počasí. O Vánocích bude určitě sníh. V zimě bude určitě sníh. Sakra! Prší už tři dny! Při házení kostkou: Nikdy se nepodaří hodit třikrát po sobě číslo 6. *Teď hodím číslo* 7. *Když si to budu hodně přát, hodím číslo* 6. *Číslo* 6 *nehodím bohužel tak často jako číslo* 1.
(*Nussknacker*, 2. třída, 2014, s. 34)



Obrázek 1. Motivační obrázek ke kvalitativnímu ohodnocení pravděpodobnosti při použití pravděpodobnostní škály (Zdroj obrázku: *Nussknacker* 2014, s. 34, překlad – autor příspěvku)

Po zavedení kvantifikace pravděpodobnosti v podobě zlomku nebo desetinného čísla se ve vyšších třídách škála rozšiřuje na uzavřený (reálný) interval, jehož krajním bodům jsou přiřazena čísla 0 a 1 jako mezní hodnoty pravděpodobnosti. Čísly mezi 0 a 0,5 je ohraničen dílčí interval pro *málo pravděpodobné* jevy, čísla 0,5 a 1 jsou mezemi intervalu pro jev *spíše pravděpodobný*. Hodnoty ležící blízko 0 signalizují stupeň jistoty *velmi nepravděpodobný*, hodnoty blízké číslu 1 pak vyjadřují stupeň jistoty *velmi pravděpodobný*. Často se také užívá spojení *malá*, *střední* a *velká (vysoká) pravděpodobnost.* Označení středu pravděpodobnostní škály je na prvním stupni 1 : 1 nebo *fifty-fifty*, čímž se vyjadřuje stejná míra očekávání (šance), že výsledek nastane či nenastane. Každému bodu pravděpodobnostní škály tak můžeme přiřadit určitý subjektivní stupeň jistoty (stupeň důvěry) v jeho „nastání”.

4.1.5 Zkoumání vlivu podmínek procesu na pravděpodobnost výsledků

Pravděpodobnost výsledku závisí na podmínkách, za kterých proces probíhá, např. na výsledný čas běhu na 60 m má vliv aktuální zdravotní a duševní stav sportovce, na jeho běžeckých dovednostech, na větrných podmínkách a jistě na mnoha dalších okolnostech. Pro sportovce po intenzivním běžeckém tréninku je výhra pravděpodobnější než pro sportovce bez

ISSN 2694-8133

řádné přípravy. Zvláště u výsledků označených jako údajně *nemožné* rozvíjejí žáci podle zkušeností Sill a Kurzmann (2019, s. 87) značně svou fantazii a předkládají řadu nápadů, aby našli podmínky, za kterých nenastanou odpovědi očekávané učitelem.

Úloha 1. *Emil chce navštívit svou babičku. Jeho maminka řekla, že je pravděpodobné, že pojede na kole. Proč to tak jeho maminka hodnotí? Najdi vhodný důvod a vyber.*
A. Emil jezdí rád na kole. B. Emilovo kolo je rozbité. C. Venku svítí slunce.
D. K babičce je to daleká cesta. E. Emil dostal kolo k narozeninám. F. Hustě prší.

Úloha 2. *Co se musí změnit?*
1. *Je nemožné, abych si zítra ráno dal pomerančový džus, neboť maminka žádný nekoupila.*
A. Co se musí změnit, aby to bylo možné? B. Co se musí změnit, aby to bylo jisté?
2. *Je možné, že k narozeninám dostanu dárek, po kterém tak toužím.*
A. Co se musí změnit, aby to bylo nemožné? B. Co se musí změnit, aby to bylo jisté?

Úloha 3. *Někdo řekl, že letos bude u nás o Velikonocích ležet sníh. Za jakých podmínek je to:*
A. jisté? B. pravděpodobné? C. nepravděpodobné? D. nemožné?

4.2. Koncept propedeutiky a výuky pravděpodobnosti ve 3. a 4. ročníku ZŠ v Německu podle Sill a Kurtzmann (2019)

Koncept propedeutiky pravděpodobnosti v 3. a 4. ročníku ZŠ navazuje ve smyslu spirálového principu učiva na koncept pro 1. a 2. ročník ZŠ představený v kapitole 4.1. Podle Sill a Kurtzmann (2019, s. 129) koncept obsahuje následující body, které dále doplňujeme několika poznámkami:

- *Srovnávání a popis pravděpodobnosti se vztahuje na náročnější procesy.*
- *Požadují se písemná zdůvodnění rozhodnutí o porovnání a popisech pravděpodobností.*
- *Zavedou se další kategorie pro kvalitativní popis a znázornění pravděpodobnosti. Popíše se střed pravděpodobnostní škály.*
- *Zavedou se další možnosti pro interpretaci pravděpodobnosti.*
- *Příklady vlivu podmínek na pravděpodobnosti budou náročnějnější.*
- *Do výuky se zahrnou situace z oblasti her spojených s náhodou, jako losování objektů z nádoby, a budou prováděny experimenty ke stochastickým procesům.* […]

Ve 3. a 4. ročníku se doporučuje obohatit kvalitativní ohodnocení pravděpodobnosti o jemnější „stupně" především ve vztahu k jejím mezním hodnotám: *téměř nemožný, velmi nepravděpodobný, spíše nepravděpodobný, spíše pravděpodobný, velmi pravděpodobný, vysoce pravděpodobný, téměř jistý.* Hranice mezi nimi se samozřejmě nedají přesně specifikovat. Označení středu pravděpodobnostní škály např. pro hod mincí může např. být: *Je stejně tak pravděpodobné jako nepravděpodobné, že padne panna.*[27] *Stejně tak může padnout panna jako orel.* Většina žáků zná ze svého okolí a rozumí procentům, takže mohou říct: *Je na* 50 % *pravděpodobné, že padne panna.* Střed škály se autorům osvědčilo označit „fifty-fifty" nebo 1 : 1, i když oba zápisy vyjadřují šance, nikoliv hodnotu pravděpodobnosti. Naopak Sill a Kurtzmann nedoporučují označovat střed škály jako *stejně pravděpodobný*, neboť toto spojení vyjadřuje vztah mezi dvěma výsledky, tedy nějakou relaci: *Že padne panna, je stejně pravděpodobné, jako že padne orel.*

Ve 3. a 4. ročnících by se měly ve výuce pravděpodobnosti již objevit idealizované stochastické situace, které hrají podstatnou roli při modelování četných reálných procesů: hod mincí, házení kostkou a losování z urny. Zařadit je vhodné také hry využívající náhodu, jako

[27] Zde je zrovna jedno, který z obou.

ISSN 2694-8133

např. točení kolem štěstí. Pokusy na všech výše uvedených losovacích zařízeních lze za stejných podmínek opakovat a hráči nemohou svou vůlí ovlivnit výsledek. Autoři nedoporučují využít výsledky mnoha opakování pokusu k nepřímému důkazu rovnosti pravděpodobností na základě četností jednotlivých výsledků. Výsledky opakovaných hodů jsou totiž nejisté: přestože je pravděpodobnost každého výsledku hodu kostkou $\frac{1}{6}$, což žáci vyjádří formulací *každý výsledek je stejně pravděpodobný (stejně možný)*, nemusí na to výsledky experimentu vždy jednoznačně ukazovat. Někdy bude počet jednotlivých výsledků přesně stejný, jindy se budou absolutní i relativní četnosti jednotlivých výsledků lišit. Relativní četnost slouží tak pouze k odhadům pravděpodobnosti jevu a je její pouhou přibližnou hodnotou. Naopak Sill a Kurtzmann doporučují ke zdůvodnění využít geometrických vlastností losovacích zařízení, např. pro hrací kostku: *Všech* 6 *stěn kostky jsou shodné útvary podobné čtverci, mají stejnou „velikost“ a tvar.* Anebo diskusí: *Proč by podle tebe měl být při házení hrací kostkou hod* 1 *pravděpodobnější než hod* 6*? Z jakých důvodů by měla* 1 *padnout častěji než* 6*?*

Také se doporučuje, aby žáci místo házení více kostkami opakovali házení stejnou kostkou po dohodě, že např. první hozené číslo stojí na řádu desítek a druhé číslo na řádu jednotek každého z výsledků, kterými bude dvojciferné číslo.

Už u žáků 1. stupně ZŠ by měly být rozvíjeny dvě interpretace pravděpodobnosti: tzv. subjektivní pravděpodobnost a objektivní pravděpodobnost. Na výsledky přírodních dějů a náhodných procesů ze společnosti nemá člověk (subjekt) vliv a proto jim přiřazené pravděpodobnosti označujeme jako objektivní, zatímco pravděpodobnosti výsledků myšlenkových procesů jsou závislé na subjektu. Oba náhledy se propojí v případech, když vyjadřujeme subjektivní hypotézy, domněnky o objektivních pravděpodobnostech jevů.

Nadále platí snaha vyhnout se užívání slova *šance* a spojení *šance na výhru*, a to touto formulací: *Pro kterou z průhledných krabic s různým počtem zelených a žlutých koulí je nejpravděpodobnější, že bude vytažena žlutá koule?* Přesto slouží *šance* k upevňování představ o pojmu pravděpodobnost, k udávání či odhadování její hodnoty. Častou chybou podle Sill (2013, s. 20) bývá, že se oba pojmy, tedy pravděpodobnost a šance nedostatečně významově odlišují. Šance O na nastání určitého jevu A označíme $O(A)$[28] a jsou podílem pravděpodobnosti „nastání“ tohoto výsledku (jevu) a pravděpodobnosti, že týž výsledek (jev) nenastane: $O(A) = \frac{P(A)}{1-P(A)}$. Např. při hodu kostkou je pravděpodobnost jevu A: „Padne číslo 1.“ $P(A) = \frac{1}{6}$, ale šance na nastání jevu, že „Padne číslo 1.“ je $O(A) = \frac{1}{5} = 0{,}2$, tj. $20\,\%$. Blíží-li se pravděpodobnost 1, blíží se šance nekonečnu. Blíží-li se pravděpodobnost 0, pak jsou šance nulové. Šance se nedají znázornit na pravděpodobnostní škále. Žáci na 1. stupni šance nevyjadřují číselně, nepočítají je a měli by používat slovo *šance* opět pouze ve slovních spojeních, jako např. *Mám velkou šanci na výhru na kole štěstí.*, či při srovnáních *Na levém kole štěstí mám větší šanci na výhru než na druhém kole vpravo*. Dobře se dají šance určovat při práci s losovacími zařízeními (generátory náhody): šance na určitý jev jsou vztahem mezi příznivými výsledky a nepříznivými výsledky.

Ve 3. a 4. třídě je podle Sill a Kurtzmann (2019, s. 156) již také vhodné propojit vyučování statistiky a pravděpodobnosti: buď ze získaných dat můžeme činit závěry pro pravděpodobnosti, nebo můžeme ze známých či odhadnutých pravděpodobností usuzovat na data. Tyto dovednosti rozvíjí autoři vhodnými příklady.

[28] Symbol O používáme podle anglického slova *odds*, kterému odpovídá český ekvivalent šance (mn. č.).

5. Závěr

Výuce pravděpodobnosti je na 1. stupni ZŠ v Německu věnována odbornou veřejností velká pozornost a připisován rostoucí význam, s cílem dosáhnout úplné matematické gramotnosti žáků také na 1. stupni. V Německu jsou pro žáky, stávající i budoucí učitele vydávány didakticky vhodné materiální i elektronické materiály, které jim umožňují se pravděpodobnosti naplno věnovat. Žáci jsou povzbuzováni aktivizujícími a praktickými výukovými metodami. Budování prvotních představ o pravděpodobnosti tak probíhá v duchu konstruktivistických přístupů ve vyučování matematice. Cílem výuky pravděpodobnosti na 1. stupni německých ZŠ je především intuitivně se žáky přistoupit k seznamování („setkávání se") se základními pojmy a pracovními postupy, které jsou pro řešení pravděpodobnostních úloh typické, provádět kvalitativní odhady pravděpodobnosti jevů (výsledků) náhodných pokusů a znázorňovat je na pravděpodobnostní škále, porovnávat subjektivní odhady pravděpodobnosti a zdůvodnit férovost či neférovost dané hry. Výuku pravděpodobnosti na 1. stupni ZŠ v Německu považujeme za vhodný zdroj inspirace pro zavádění pravděpodobnosti na českých základních školách. Promyšlený koncept propedeutiky pravděpodobnosti autorů Sill a Kurtzmann (2019) lze označit za inspirující a žákům vstřícný.

Literatura

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. (2005). Dostupné z https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf.

Cordt, S. (2012). *Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht der 2. Klasse unter Einbeziehung des Strukturmodells der Prozessbetrachtung* (Diplomová práce). Dostupné z https://www.mathe-mv.de/storages/uni-rostock/Alle_MNF/Mathe-MV/Publikationen/Primarstufe/Examensarbeit_Cordt.pdf.

Empfehlung zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. (2003). Dostupné z https://www.yumpu.com/de/document/read/50065312/empfehlungen-zu-zielen-und-zur-gestaltung-des-stochastikunterrichts.

Hošpesová, A., Stehlíková, N., & Tichá, M. (2007). *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice.* Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, Ch. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Nussknacker 1-4. (2014, 2015). Schülerbuch. Ernst Klett Verlag. Část k pravděpodobnosti dostupná z https://www2.klett.de/sixcms/list.php?page=lehrwerk_extra&titelfamilie=&extra=Nussknacker-Online&modul=inhaltsammlung&inhalt=klett71prod_1.c.1054304.de&kapitel=1054316.

Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2003). *Pedagogický slovník.* Praha: Portál.

Sill, H-D., & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Sill, H.-D. (2013). *Zur Stochastikausbildung für das Lehramt an Grundschulen*. Prezentace dostupná z http://www.math.uni-rostock.de/~sill/Publikationen/Stochastik/Vortrag%20Erfurt%2013%2005%2025.pdf.

ISSN 2694-8133

10+10=100? – BASIC DIGITAL EDUCATION IN PRIMARY SCHOOLS

Karl Josef FUCHS
Paris-Lodron University of Salzburg, School of Education & Department of Mathematics (Austria)
KarlJosef.Fuchs@sbg.ac.at

Abstract
In 2012 experts met in Graz/Austria to formulate Information Technology (IT) and media competences for students at primary schools. The results addressing digital competences were finally made public on a platform named digi.komp4. The two categories in these competences by name *informatics systems* (Computer‘s Inside) and *concepts* (informations‘ representation) match with the topic of the course perfectly. The paper describes the single steps of the teaching process in form and content. The teaching methods and the share the students had in the single steps of the course are illustrated integratively.

Keywords: Basic Digital Education, media competences, informatics system, teaching methods, students’ activity.

1. Population and Motivation

Approximately twenty years ago in 1998 ten years old students from the Abfalter Primary School in Salzburg visited the department of computerscience education of the Paris-Lodron University of Salzburg.

Figure 1. Population

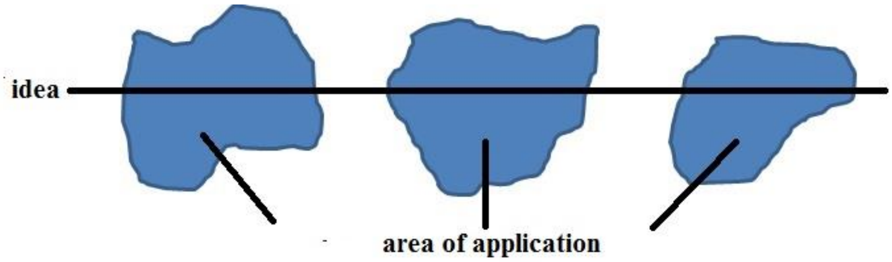
Attending a special course treating an age-appropriate introduction to *Computers*’ *inside* was the motivation for the visit. The course was designed by a special form of *Problem Based Learning* (Weber, 2007), the Cognitive Apprenticeship Method. Stepwise transitions characterize this method. The steps extend from **Modelling** and **Coaching** to **Articulation**, **Reflection** and **Exploration** via **Scaffolding** as intermediate step. The teacher (called Expert or Master) moves back from the teaching process gradually whereas the students (called Novice) play an increasing part in the process.

2. Computer's Inside: How do Computers communicate?

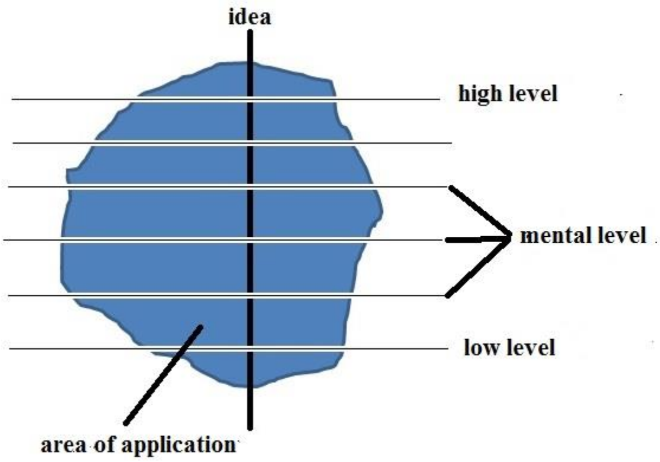
The answers to this specific initial question are given in the following four categories of Information Technology and Media Competences.
These categories will be phrased as activities or strategies following the concept of Fundamental Ideas in Mathematics which are characterized …

… as bundle of strategies or activities, strategies or techniques, which …
(1) … can be identified in the development of mathematics from a historical point of view.
(2) … appears sustainable to order courses of instruction vertically.
(3) … turns up appropriate to speak about mathematics.
(4) … makes courses in mathematics flexible and transparent.
(5) … owns a corresponding linguistic and enactive archetype in languages and everyday thinking. (Schweiger, 2010, p. 12, 13)

Additionally the following categories show the different dimensions of Fundamental Ideas expressed by Andreas Schwill (1993):
The **Horizontal Dimension** is described by Schwill as thinking principle with "… *an widespread applicabilty in multiple areas, an they integrate and put the multitude of phenomena in order …*".



The **Vertical Dimension** is described by Schwill as thinking principle that "… *structures the contents within an application vertically* …" which means "… *fundamental ideas can be communicated at nearly any arbitrary level (from primary level students to University level students) successfully …*".



ISSN 2694-8133

Following Schwill's list of fundamental ideas as thinking principles they needn't only have **wideness** expressed as **Horizontal Dimension** and **richness** expressed as **Vertical Dimension** but "… *must have … an anchorage in day-by-day thinking,* ... and own "… *realms of life relevance* …". This attribute is labeled by **Criterion of Sense**.
Finally the thinking principles must own a historical dimension. Schwill expresses this characteristic as **Criterion of Time**.

- Category 1: Using Information Technology
- Category 2: Exchanging data using the Man-Machine Interface
- Category 3: Communicating
- Category 4: Representing and structuring data

2.1 Category 3 & 4: Teaching Process

According the Cognitive Apprenticeship method the first step of the teaching process was frontal in an ex-cathedra head-on presentation (Meyer 1987). The discussion of the topics Communicating, Representing and structuring data was motivated by tying in with the students` preknowledges of Natural numbers ℕ. The students were surprisingly busy with only two digits (0 and 1) instead of ten digits (0, 1, .. 9) of ℕ which they were familiar with in the steps of **Modelling** and **Coaching**.

For the purpose namely to transform numbers of the common form into the new binary form they had to cope with *division with remainder* as an operating strategy. The following statements out of the model M4 (intersection of primary level (4th level) and secondary level) for Primary Schools in mathematics in Austria legitimate the handling of this operation with primary school students:

> **Competences concerning *Modelling***
> The students can undertake arithmetical operations and techniques.
>
> **Competences concerning *Communicating***
> The students are able to keep hold of their approaches in appropriate forms of representation.
>
> **Competences concerning contents (*Operating*)**
> The students have insights into the nature of arithmetic operations at one's disposal.
> (https://www.bifie.at/wp-content/uploads/2017/06/Deskriptoren_BiSt_M4.pdf-call 31st of October 2020)

Concerning the content Figure 2 will document the structured representation at the blackboard given by the teacher.

93	:	2 =	46 R: 1
46	:	2 =	23 R: 0
23	:	2 =	11 R: 1
11	:	2 =	5 R: 1
5	:	2 =	2 R: 1
2	:	2 =	1 R: 0
1	:	2 =	0 R: 1

Figure 2. Structured representation of a division with remainder applied to 93

Analysing the division of 93 stepwise finally leads to the binary number 1011101. To gain the correct result the students must be aware of the bottom up strategy in their analysis.

The addition of binary numbers was picked out in analogy to the addition of natural numbers in this presentation by the teacher. The students had to pay attention to the fact that they can only resort to two digits when adding binary numbers: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$ and $1 + 0 = 1$ (each with no carry forward) but $1 + 1 = 0$ (with 1 carry forward).

The students transformed natural numbers given by the teacher into binary coded numbers and generated sums of these numbers manually in the subsequent **Scaffolding step**.

2.2 Category 1 and 2: Teaching process

Approximately 45 minutes later the students moved on to the computer room. There they unionised in groups for the exercise collaborating phase (Naase 2013). The request of the following steps of **Articulation**, **Reflection** and **Exploration** in this phase was practice on behalf of recapitulation, application and memorizing. (Ambrus, 2003)

For these steps Javascript applications were prepared. One application named *binary_calculator* carries out the transformation from decimal to binary numbers, the second one *binary_calculator_sum* was programmed to add binary numbers. The categories Man-Machine Interface and Communicating of the competence model come to the fore. The applications were used to fulfill and to validate the results of the operations discussed in the teaching process before with the help of computers.

In these final steps the students were talking among each other about the techniques for solving the problems a lot. Clearly the acoustic level increased as expected. This signal for a higher communication competence was very welcomed as communication is a category in numerous competence models of IT (Fuchs & Landerer, 2005) and it is expressed in M4 as mentioned before.

Subsequently the contents in this phase of the teaching process will be illustrated by the prototypical use of the applications.

Prototypical use-Application *binary_calculator*

Starting the application the computer displays a window where the students can enter the decimal number which should be transformed into binary representation.

Figure 3. Input Windows (decimal number) application *binary_calculator*

The decimal number 233 is entered exemplarily.

Figure 4. Decimal number 233 entered in *binary_calculator*

The application answers with binary number 11101001.

Prototypical use-Application *binary_calculator_sum*

When starting the second application the screen looks as follows.

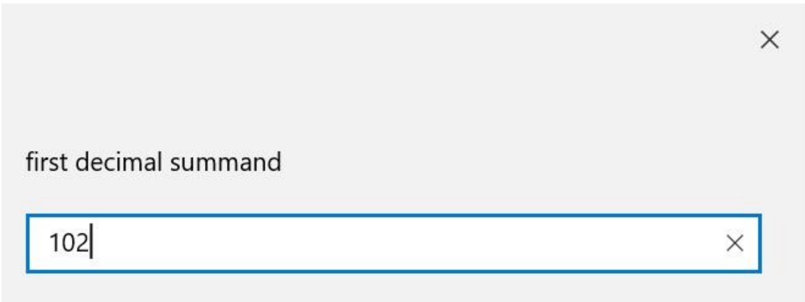


Figure 5. First decimal summand 102 entered in *binary_calculator_sum*

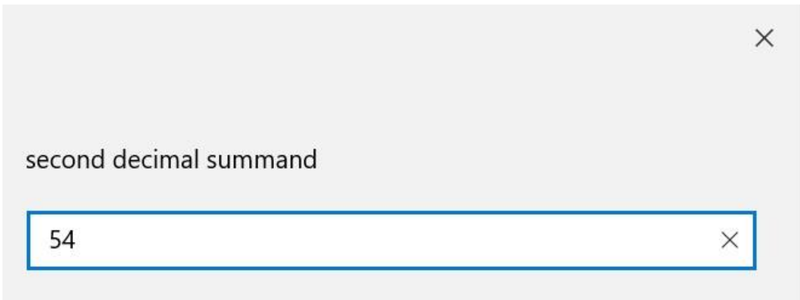


Figure 6. Second decimal summand 54 entered in *binary_calculator_sum*

The application answers with the whole addition in binary representation including the summands and the sum:

$$1100110+110110=10011100.$$

3. Observations and Perspektive

- The long-standing interest and motivation of the students argued for the attractiveness of the chosen topic.

- The Cognitive Apprendice Method with its steps appeared as approriate approach for achieving the intended goals.

- A meaningful perspective for pressing ahead this theme might be to discuss the binary coding of characters (ASCII Code)

Acknowledgements

Thanks to the Comenius University of Bratislava who hosted the EME conference namely REFLECTION OF CURRENT ABILITIES AND NEEDS OF YOUNGER SCHOOL AGE CHILDREN from 10th to 12th April 2019 and gave me the opportunity for presentation.

References

Ambrus, G. (2003).*Üben in der Planung des Mathematikunterrichts* (engl. *The role of practice in the design of mathematics courses*), dissertation at the Paris-Lodron University of Salzburg.

Fuchs, K.J. & Landerer, C. (2005). Das mühsame Ringen um ein Kompetenzmodell (engl. The painful struggle around a competence model). *CD Austria* 12, 6-9.

Meyer, H. (1987). *Unterrichtsmethoden II: Praxisband* (engl. *Teaching Methods: Practice Edition*), Berlin: Cornelsen Verlag.

Naase, M. (2013). *Das kollaborative und kooperative Lernen zwischen KiTa und Grundschulkindern in altersgemischten Lerngruppen unter Berücksichtigung der Aspekte Hilfestellung und Partizipation* (engl. *Collaborative and Cooperative Learning between Day-Care Facilities in Age-mixed Learning groups Taking Aspects of Assistance and Participation into* Consideration), München: GRIN Verlag.

Schweiger, F (2010). Fundamental Ideas. In: Fuchs, K.J. Ed. *Identity papers in Mathematics and Computer Science Education at the University of Salzburg*, Shaker Verlag: Aachen.

Schwill, A. (1993). Fundamental Ideas in Computer Science. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM), 25* (1), 20-31.

Weber, A. (2007). *Problem-Based Learning*. Hep Verlag: Bern.

K TVORBĚ PROFESNÍHO PORTFOLIA BUDOUCÍCH UČITELŮ MATEŘSKÝCH ŠKOL: AKTIVITY ROZVÍJEJÍCÍ MATEMATICKOU PREGRAMOTNOST

Eva NOVÁKOVÁ[1], Kristýna NOVÁKOVÁ[2]
[1]Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
[2]ZŠ a MŠ Žatčany (Česká republika)
novakova@ped.muni.cz, novak.kristy@seznam.cz

Abstrakt

Cílem kvalitativně orientovaného výzkumu bylo analyzovat soubor zpracovaných aktivit vhodných k zařazení do profesního portfolia z pohledu využití jeho potencionálu k rozvoji matematické pregramotnosti dětí. Výzkum byl realizován metodou hospitačního videozáznamu na třech mateřských školách v brněnském regionu skupinou studentek učitelství pro mateřské školy na Pedagogické fakultě MU v akademickém roce 2018/19. Ukázalo se, že i ve zdánlivě jednoduše zkonstruovaných úlohách inspirovaných literárním textem lze při pečlivé přípravě a po její důkladné reflexi s využitím metodiky AAA (anotace – analýza – alterace) rozpoznat a využít řadu podnětů pro rozvíjení dětských dispozic.

Klíčová slova: portfolio, reflexe, profesní kompetence učitelů mateřských škol, matematická pregramotnost

CONTRIBUTION TO CREATION OF PROFESSIONAL PORTFOLIO OF PROSPECTIVE KINDERGARTEN TEACHERS: ACTIVITIES DEVELOPING MATHEMATICAL PRE-LITERACY

Abstract

The aim of the qualitative research was to analyze a set of realized activities considered appropriate for inclusion in professional portfolio from the perspective of its potential for developing mathematical pre-literacy of children. The research was realized based on video recordings from three kindergartens in Brno region and elaborated by a group of prospective kindergarten teachers, students of the Faculty of Education of Masaryk University in the academic year 2018/2019. The outcomes of the research proved that even seemingly simple tasks inspired by a literary text may be utilized for identification and application of stimulus for development of children's dispositions, when approached thoroughly using the AAA methodology (annotation – analysis – alteration).

Keywords: portfolio, reflection, professional competence of kindergarten teachers, mathematical pre-literacy

1. Úvod

Profesní identita učitele mateřské školy má řadu aspektů, činnosti učitele mateřské školy představují širokou paletu různorodých aktivit. Tomu odpovídá rovněž výrazně multioborový charakter jeho profesní přípravy. Kvalifikaci pro profesi učitele mateřské školy lze získat středoškolským, vyšším odborným nebo vysokoškolským studiem. Pedagogické fakulty připravující budoucí učitele pro mateřské školy v bakalářském studijním oboru učitelství pro

ISSN 2694-8133

mateřské školy hledají cesty, jak přípravné vzdělávání zefektivnit. Jednou z cest je důsledné propojování teorie a praxe, a to jak ve složce pedagogicko-psychologické, tak oborově didaktické. V konkrétní rovině to znamená přijetí teze o profesním rozvoji studenta jako procesu jeho získávání zkušeností s praktickým vzděláváním v mateřských školách. Ve vysokoškolské výuce stavíme na prekonceptech studentů, neboť ty formují jejich pohled na edukační realitu. Prekoncepty bývají spojovány se zkušeností, kterou studenti s mateřskou školou mají; jejich znalost se stává východiskem zkušenostního učení a směřuje také k posílení reflexe výuky na akademické půdě. Za významnou součást reflektivně pojatého vzdělávání je považována tvorba profesního portfolia.

2. Teoretická východiska

Užívaným modelem přípravy učitelů nejen mateřských škol se stává model učitele jako reflektivního praktika (Schön, 1987; Wubbels & Korthagen, 1990). Přikláníme se k pojetí reflexe, která vychází z konstruktivistické epistemologie v kontextu konstruktivistické kultury vyučování a učení, v níž je osvojování znalostí zpravidla spojeno s reflexí praktické zkušenosti (Janík et al., 2013; Pihlaja & Holst, 2013; Hsueh & Tobin, 2003).

V našem pojetí výzkumu je nástrojem pro uplatnění reflektivní výuky metoda hospitačního videozáznamu. Vycházíme z názoru Janíka a kol. (2013), že přidaná hodnota videa spočívá v možnosti zachytit situace z výuky v jejich komplexnosti a využít je pro následné diskuse při zachování jejich autenticity; že analýza videostudie jako součást reflektivní praxe má přispívat k rozvoji profesní kompetence učitele. Profesní činnosti učitelů mateřských škol mají osobitý charakter daný specifičností věku dětí, se kterými pracují. V zahraniční literatuře se zdůrazňuje například schopnost učitele vytvářet multidisciplinární učební prostředí (Pramling & Pramling Samuelsson, 2011), schopnost integrovat hru a učení (Pramling Samuelsson & Carlsson, 2008) a vést partnerskou a podporující interakci s dětmi (Howes et al., 2003). Všechny uvedené schopnosti lze uplatnit při reflektivní analýze aktivit, obsahově zaměřených k rozvoji matematické pregramotnosti[1] dětí cílených k uplatnění při tvorbě profesního portfolia.

Tvorba profesního portfolia je považována za významnou součást reflektivně pojatého vzdělávání (Syslová et al., 2018). V posledních desetiletích se portfolio ve vzdělávání obecně i ve vzdělávání učitelů stalo celosvětovým fenoménem. Pojetí portfolia stejně jako způsoby jeho implementace do vzdělávací praxe však nabývají nejrůznějších forem. Dysthe a Engelsen (2011) poukazují na diverzitu modelů i praktik implementace portfolia na národních i mezinárodních úrovních. Portfolio je považováno za flexibilní a autentický nástroj pro rozvoj i hodnocení profesní kompetence (Darling-Hammond & Snyder, 2000). Jak uvádí Tomková (2018, s. 215), umožňuje práce s profesním portfoliem „propojovat nejen pedagogickou teorii s praxí, ale též obecně pedagogická a didaktická, oborová a oborově didaktická i další obecně kultivující témata a otázky“. Ve vzdělávání učitelů se jedná o portfolio vývojové (*developmental*, někdy také *process portfolio*), které dokumentuje profesní rozvoj studenta, jinými slovy odpovídá spíše na otázku „Kým se stávám a jak?“ než na otázku „Kdo jsem?“ (Wyatt & Looper, 1999, s. 14). Často až teprve po nástupu do praxe si začínající učitel v plné míře uvědomuje náročnost a komplexní charakter povolání učitele mateřské školy, což někteří autoři popisují jako „profesní náraz“ nebo „šok z reality“ (Keiny & Dreyfus, 1989).

[1] Za matematickou pregramotnost považujeme soubor postupně se rozvíjejících předpokladů pro matematiku u dětí v době před vstupem do školy; komplex schopností, dovedností, postojů a hodnot potřebných pro zahájení a úspěšné rozvíjení matematické gramotnosti i jejímu užívání v různých individuálních a sociálních kontextech (Nováková & Novák, 2019).

3. Metodologie výzkumu

Náš kvalitativně orientovaný výzkum byl zaměřen na tvorbu jedné komponenty profesního portfolia studentů učitelství pro mateřské školy. Jeho cílem bylo

- zpracovat soubor aktivit vhodných k zařazení do profesního portfolia,
- následně jej s využitím videostudie analyzovat z pohledu využití jeho potencionálu k rozvoji matematické pregramotnosti dětí.

Formulovali jsme dvě výzkumné otázky:

1) Lze aktivity rozvíjející matematickou pregramotnost vhodně uplatnit při tvorbě profesního portfolia budoucích učitelů pro mateřské školy?
2) Může být k analýze aktivit rozvíjejících matematickou pregramotnost dětí v mateřské škole využito metodiky AAA?

Výzkum byl realizován na třech mateřských školách v brněnském regionu. Projekt výzkumu byl připraven akademickým pracovníkem po dohodě se zkušenými učitelkami, uskutečněn byl skupinou dvanácti studentek oboru učitelství pro mateřské školy na Pedagogické fakultě MU. Pro naše pojetí výzkumu bylo podstatné uplatnění reflexe s využitím hospitačního videozáznamu. Nechali jsme se inspirovat *metodikou AAA: anotace – analýza – alterace* (Slavík, J. et al, 2012), jejímž podstatným znakem je stejně jako například u modelu ALACT (Korthagen et al., 2011) překrývání procesu reflexe s procesem zkušenostního učení.

Podobu uplatněné metodiky AAA jsme vzhledem k charakteru šetření (studentky s malými zkušenostmi z výukových situací, věk dětí, specifické prostředí mateřské školy) modifikovali do následující podoby (srov. Švejnohová & Slavíková, 2016):

(1) Anotace – popis situace/připravené aktivity; formulace problému a očekávaného průběhu.
(2) Analýza – významový a logický rozbor obsahu a cílů v kontextu oboru, odkud je úloha odvozena, tj. oblasti matematické pregramotnosti. Vyhodnocení, výklad didaktického postupu na základě vědomého ohlédnutí za průběhem aktivity.
(3) Alterace – návrh zlepšující alterace („Dalo by se to udělat jinak?“) s ohledem na řešený problém a vyzkoušení v reálné činnosti. Snahou je podpořit rozvoj reflektivních dovedností studentky.

Při přípravě vlastního výzkumu byla studentkám nejprve prostřednictvím videozáznamu zprostředkována jedna konkrétní výuková aktivita, realizovaná zkušenou učitelkou v reálném prostředí mateřské školy se skupinou dětí předškolního věku. Výchozí video bylo společně reflektováno ve výuce. V této hospitační fázi studentky sledovaly výuku a zaznamenávaly její obsah, zásadní činnosti učitele a dětí ve vztahu k předpokládanému osvojování učiva a rozvoji klíčových kompetencí. Smyslem společné detailní analýzy videa bylo především to, aby se studentky učily „vidět“ a „pojmenovat“ souvislosti jednotlivých aktivit s rozvojem matematické pregramotnosti. Tím se jim nabízí určitý „vzor“ pro reflexi vlastních videonahrávek. Na základě reflektovaného videozáznamu měly připravit a uskutečnit v prostředí konkrétní mateřské školy výukovou aktivitu, z níž bude pořízen videozáznam jako východisko následné analýzy.

V přípravné fázi výzkumu bylo třeba rozhodnout o výběru konkrétních aktivit zaměřených na rozvíjení matematické pregramotnosti a organizaci výzkumu (plánované termíny uskutečnění po dohodě všech tří aktérů – akademického pracovníka, učitelky, studentky, a konkrétní způsob realizace s využitím videozáznamu). Jako témata aktivit byly zvoleny oblasti matematické pregramotnosti nejčastěji preferované učitelkami mateřské školy[2]: předčíselné a geometrické představy.

[2] V dotazníkovém šetření Novákové a Nováka (2019) preferuje ve své práci oblast předčíselných představ 93,1 % a geometrických představ 96,2 % dotazovaných učitelů mateřských škol.

4. Výsledky výzkumu

V našem článku uvádíme jednu ukázku výzkumné aktivity, kterou uskutečnila studentka oboru učitelství pro mateřské školy, spoluautorka článku Kristýna[3]. Výchozím prvkem tématu je postižení souvislosti mezi čtenářskou a matematickou pregramotností a vhodné didaktické využití uvedené souvislosti jako jednotného celku (Nováková & Nováková, 2019). Tím akcentujeme jednak komplexnost (mezioborovost) dětských činností v mateřské škole, ale zejména životní realitu dětí i dospělých. Problematika zřetelně souvisí s rozvojem jazykových kompetencí a řeči dítěte. Při osvojování si jazyka se rozvíjí proces abstrakce, což považuje Kuřina (2003) za nejdůležitější rys předmatematické přípravy. Jazyk matematiky musí respektovat zkušenosti dítěte, vycházet z jeho intuitivního vnímání okolního světa, kdy dítě vnímá objekt tak, že mu připomíná konkrétní předmět, se kterým se již setkal. Říkáme, že využíváme *reálné reprezentace* daného tvaru, popř. tělesa. Je žádoucí, aby takových reálných reprezentací dítě poznalo co nejvíce, aby nabídka byla pestrá. Tyto zkušenosti si děti mohou předávat mezi sebou navzájem, čímž obohacují svou slovní zásobu o pojmy, s nimiž se dosud nesetkaly. Výrazy, které využíváme, však nemohou předbíhat mentální zralost dítěte, přestože mají kultivovat jeho jazyk a postupně ho rozšiřovat. Jazyk matematiky by měl být stále přiměřený přirozenému jazyku dítěte. Lišková (2014) připomíná, že vzdělávání v předškolním věku nemůže být zatíženo nemístným verbalismem, že jazyk matematiky nemůže být pro dítě striktně precizní, naopak *musí respektovat zkušenosti dítěte*, vycházet z jeho intuitivního vnímání okolního světa, kdy dítě vnímá objekt tak, že mu připomíná konkrétní předmět, se kterým se již setkalo.

To se zřetelně potvrdilo v našem výzkumu. Využití literárního textu jako výchozího bodu pro práci dětí nemá pouze motivační úlohu, ale je rozvinuto do dalších aktivit a činností zaměřených na rozvoj matematické pregramotnosti.

4.1 Využití literárního textu pro rozvoj matematické pregramotnosti

Kristýna sestavila „zásobník“ deseti aktivit, které vycházely z básnické sbírky *Aprílová škola* od Jiřího Žáčka. Uskutečnila je v lednu 2019 v mateřské škole v Brně, zúčastnilo se devět dětí předškolního věku (šest chlapců a tři dívky). Do našeho článku jsme zařadili dvě z aktivit, inspirované básničkami Psí život a Bubliny.

Psí život

Chudáčci!
Kdo?
No podívej se na psy –
nemají žádné šaty,
tudíž ani kapsy,
nemohou s sebou nosit venku
kapesník,
klíče
ani peněženku.
A tak si říká každý pes:
- Je to psí život bez kapes.

[3] V ukázkách aktivit jsou použity s výslovným svolením autorky citace z bakalářské práce Nováková, K. (2019). Využití literárního textu pro rozvoj předmatematické gramotnosti u dětí předškolního věku. *Bakalářská práce.* Brno: Pedagogická fakulta MU.

Kristýna po přečtení textu situaci vymodelovala s využitím připravených předmětů: tři barevně odlišní plyšoví psi (zlatý, černý, bílý), kapesník, klíče, peněženka. Podívejme se na průběh aktivity podrobněji, výklad bude veden z pohledu studentky.

Výchozí situace *(anotace):* Protože psi nemají kalhoty s kapsami, může každý z nich nést v zubech jen jednu věc. Máme tady tři pejsky, kapesník, klíče a peněženku. *Každý* pes nese v zubech *právě jednu* ze zmíněných věcí. K vyřešení úloh a) – d) měly děti k dispozici předměty, se kterými mohly manipulovat a simulovat tak zadání. Informace (podmínky úlohy) a otázky byly sděleny vícekrát a pomalu.

a) *Zlatý pes nese klíče. Peněženku má v zubech bílý pes. Kdo nese kapesník?* – Určit, kdo nese kapesník, když zlatý pes nese klíče a peněženku má v zubech bílý pes.
Po přečtení prvního úkolu se hned začali hlásit Radim, Jakub, Monika, Emma a Jiří. Jakub s Emmou vykřikli, že se jedná o černého psa. Aniž bych zareagovala na správnost odpovědi, upozornila jsem je, že se mají hlásit. Protože se nehlásili všichni, zadání jsem přečetla znovu a znázornila na donesených předmětech. Poté už se hlásili všichni a jejich odpověď byla správná: „Černý pes."

b) Černý pes nese peněženku. Co může nést zlatý? – Určit, co může nést zlatý, když černý pes nese peněženku.
U druhého úkolu jsem opět po přečtení zadání dala dětem čas na promyšlení odpovědi. Okamžitě se začali hlásit všichni kromě Moniky. Aby si i Monika byla jistá správnou odpovědí, zadání jsem zopakovala. Sdělila mi, že zlatý pes může nést klíč. Na dotaz, zda může nést pouze klíč, ostatní správně zareagovali, že může nést klíče, nebo kapesník.

c) Bílý nenese klíče. Co nese černý, když zlatý nese kapesník? – Určit, co nese černý pes, když bílý nenese klíč a zlatý nese kapesník.
Po přečtení třetího úkolu jsem vyzvala Radima, aby se ujal přiřazování a zopakovala jsem první větu: „Bílý nenese klíč." A zeptala se, kdo tedy ty klíče nese. Radim zaváhal mezi černým a zlatým psem. Do diskuze vstoupil Jakub, který si stál za odpovědí „černý" a upozornil na informaci v druhé větě, kterou jsem zatím neopakovala. Z toho je zřejmé, že po jediném přečtení měl jasno a nezmátla ho ani následující debata. K jeho názoru se přidali i Emma s Jiřím. Položila jsem dotaz, zda informace, že klíč nese černý pes, vyplývá z první věty: „Bílý nenese klíč." Z jednání ostatních kromě Jakuba bylo zřejmé, že věděli, že klíče nese buď černý, nebo zlatý pes, ale měli tendenci mezi nimi rozhodnout i na základě neúplné informace.

d) Zlatý nenese ani klíče ani peněženku. Bílý nenese peněženku. Co nese zlatý, černý a bílý pes? – Určit, který pes nese který předmět, když zlatý nenese ani klíče ani peněženku a bílý nenese peněženku.
Když jsem přečetla první větu dalšího úkolu: „Zlatý nenese ani klíče ani peněženku" Jakub pohotově reagoval: „Takže bude asi nýst ten kapesník." K jeho reakci se okamžitě všichni přidali a po přečtení zbytku úkolu měli všichni jasno.

Výchozím momentem ***analýzy*** jako dalšího kroku v metodice AAA je významový a logický rozbor obsahu a cílů v kontextu oboru, odkud je úloha odvozena (Slavík, J. et al, 2012). V naší aktivitě je tímto cílem *rozvíjet tvořivé a (pre)logické myšlení*[4] a spolu s tím

[4] Výstižnou charakteristiku tohoto pojmu v kontextu celkového rozvoje osobnosti předškolního dítěte podává Kaslová (2015).

elementy *matematické pregramotnosti. Čtyři zadání úlohy typu „zebra"*[5] *s gradující obtížností byly náročné na porozumění a pochopení logických výroků.* V aktivitě Kristýny byl uvedený typ úlohy použitý v nejjednodušší podobě, se dvěma nebo třemi skupinami objektů bez negace – zadání a), b), ale také s negací – zadání c), d). *Řešení podobných situací se netýká pouze matematiky, ale uplatňuje se* při každém racionálním postupu a při každé snaze se o něčem účelně dorozumět, když se propojují logické operace s procesem součinnosti mezi lidmi. Při analýze a vyhodnocování jsme vycházeli z obecného předpokladu, že cílem úlohy je naučit děti v širokém smyslu slova *porozumět* určité činnosti. Nejen něco udělat, ale umět se v činnosti podle svých možností *orientovat*, aby se s někým *dorozuměly* o tom, co dělají, aby to mohly *vysvětlovat,* a aby uměly do potřebné míry *zdůvodňovat* svůj postup (proč to dělám tak, a ne jinak). Současně by činnost měla děti zaujmout, motivovat.

Úloha po dětech vyžadovala

a) Pozorně vnímat jednotlivé informace o objektech vystupujících v úloze na základě přečteného textu.

b) Správně přiřadit na základě dostatečného počtu informací jednotlivé předměty denní potřeby ke psům různé barvy, v případě potřeby s využitím manipulace s předměty.

Z matematického hlediska (Kaslová, 2010) se jedná o přiřazení prvků dvou různých souborů na základě vzájemně jednoznačného zobrazení ve smyslu objekt ↔ objekt (pes určité barvy ↔ předmět, které nese v zubech).

Po provedené analýze přistoupila studentka k dalšímu kroku (***alteraci* výchozí situace**). Úkoly a) – d) děti zvládly samostatně nebo s dopomocí dospělého po opakovaném vysvětlení. Proto přistoupila ke zvýšení náročnosti úkolu. Když se přesvědčila, že děti pochopily strategii zadávání a řešení úloh, dala jim možnost vymýšlet zadání pro ostatní:
Chtěl by mě někdo vystřídat a vymýšlet zadání místo mě? – Vymyslet smysluplné a jednoznačné zadání úkolu pro ostatní.

Vymýšlení úkolu se jako první zhostila Emma: „Černý nenese peněženku." Ostatní se ihned shodli, že černý pes může nést kapesník, nebo klíč. Emma po mém pobídnutí doplnila zadání: „Zlatý nese kapesník." Jakub okamžitě situaci zhodnotil bez toho, aby ji někdo modeloval na reálných předmětech: „Takže černý bude mít klíče."
S Emmou se vystřídal Jiří a diktoval: „Zlatý nenese ani klíče ani kapesník." Josef pohotově zareagoval a přiřadil ke zlatému psovi peněženku. Jiří pokračoval: „Bílý nenese klíče." Monika přiřadila bílému kapesník a Radim situaci okomentoval, že černému zbyly klíče.
Dalšího vymýšlení se ujal Josef: „Bílý nenese peněženku ani klíče," sdělil ostatním. Jiří bílému psovi přiřadil kapesník. Josef pokračoval: „Černý nenese peněženku." Viktor správně přiřadil zbývající předměty ke psům.
Následující úlohu zadával Radim: „Bílý pes nese buď kapesník, nebo klíče" Na moje upozornění, že nevíme všechny potřebné informace, Radim zareagoval: „Bílý nenese klíče." Jakub s Viktorem situaci okomentovali, že bílý pes nese kapesník. Radim zadával dál: „Černej nenese klíče." Josef správně rozdělil zbývající předměty mezi zbývající psy.
Další byl na řadě Viktor a sdělil ostatním: „Zlatý nenese peněženku." Jakub zareagoval, že zlatý může nést buď kapesník, nebo klíče. Radim Viktora napomenul, že nám musí ještě něco říct. Další informace, kterou nám Viktor sdělil, byla, že bílý nenese klíče. Monika rozhodla, že tedy nese kapesník. Jakub ji však opravil: „Ne, to tam nemusí být, tam může být i ta peněženka. Takže ještě nevíme, co s tím." Na moji výzvu, že ještě neznáme všechny potřebné informace, Viktor pokračoval: „Černý nenese kapesník." Jakub situaci okomentoval: „Takže

[5] Označují se tak zajímavé logické kombinatorické úlohy různé obtížnosti, které vyžadují správně k sobě přiřadit prvky na základě několika (zdánlivě nepostačujících) informací. V mateřské škole je však tento typ úloh vyžíván spíše výjimečně.

každý něco nenese.” V tu chvíli se přihlásil Radim a tázavě mi sdělil: „Myslím, že on (černý pes) nese klíče.” Zopakovala jsem poslední větu po Viktorovi a Radim uznal, že není jisté, co černý pes nese. Jakub připomněl Viktorovi, že nám musí ještě něco říct. Pobídla jsem Viktora, aby nám sdělil, co nese černý pes a Viktor rozhodl, že nese peněženku. V tu chvíli se prosadil Jakub a přiřadil bílému psovi kapesník a zlatému klíče.

Při realizaci alternativní aktivity strávily děti nejvíce času. Přebíraly aktivní úlohu tvůrce, zaujalo je, že mohou situaci popsat tak, že některý pes něco nenese a bylo zřejmé, že vycítily, že zadání je tak obtížnější.

Bubliny

Bublina,
bublina z mýdla letí,
ač nemá křídla.
Bublina,
bublina s duhou
- *vypustím ještě druhou,*
třetí a čtvrtou,
pátou,
šestou…
ať letí k nebi ptačí cestou.

Výchozí situace *(anotace)*: Po přečtení básně jsme společně prošli její obsah a vysvětlili jednotlivé výrazy (bublina z mýdla, duha, ptačí cesta). Nejdříve nám Alena pověděla, že báseň byla o bublinách, které měly duhovou barvu, což podle jejích slov znamená, že měly všechny barvy. Viktor dodal: „Kromě bílé, černé a šedé.” Ctirad jeho tvrzení rozšířil ještě o zlatou barvu. Emma začala vyjmenovávat barvy, které jsou obsaženy v duze: „Fialová, růžová, žlutá.” Alena pokračovala ve výčtu: „Červená, modrá a zelená.” Na dotaz, o kolika bublinách se v básni mluvilo, nejrychleji odpověděla Alena: „Šest.”

Dala jsem dětem za úkol, aby si každé vyrobilo svých *šest různě velkých bublin* z papíru. Již toto úvodní zadání dávalo dětem prostor k velké tvořivosti v mnoha ohledech. Bylo zajímavé sledovat, jaké postupy děti při plnění úkolu použily. Projevily velkou samostatnost a kompetenci k řešení problémů. Emma si našla šablonu, podle které snadno vytvořila na papír kružnici. Alena se jejím nápadem inspirovala a také si našla předmět, po jehož obkreslení vznikla kružnice. Upozornila jsem dívky, aby nezapomněly, že bubliny musí být různě veliké. Emma použila šablonu pouze na jednu bublinu, ostatní udělala „od ruky.” Alena podle šablony obkreslila tři stejně velké bubliny a rozhodla se, že udělá ještě tři menší bubliny. Připomenula jsem jí, že je třeba, aby všechny bubliny byly různě veliké i ty, které už má nakreslené. Protože nevěděla, jak na to, poradil jí Viktor, aby všech šest bublin obkreslila podle šablony a při vystřihování je různě zmenšila. Viktor použil tutéž metodu, ale přesto, že ji sám vymyslel, trvalo mu ze všech dětí nejdéle bubliny vytvořit. Jiří se Ctiborem nakreslili všechny bubliny bez využití jakékoli pomůcky.

Následovalo zadání úloh, které děti řešily individuálně.

a) Seřaďte své bubliny podle velikosti. – Seřadit/uspořádat objekty podle velikosti sestupně nebo vzestupně.

Seřadit své bubliny podle velikostí nebylo pro děti nic těžkého. Viktor měl dvě bubliny přibližně stejné velikosti. Přiložil je na sebe a podle toho určil, která je větší.

b) *Ukažte prstem, která bublina je nejmenší a která největší.* – Určit největší a nejmenší objekt (porovnat vystřižené kruhy podle velikosti).

Stejně tak snadno si děti poradily i s určením, která bublina je největší a která nejmenší. Rozdíly mezi velikostmi byly ve většině případů značné, rozlišení proto nečinilo potíže.
c) *Ukažte prstem, která bublina je druhá nejmenší a která je druhá největší.* – Rozlišit předměty vystřihnuté z papíru (bubliny) podle jejich velikosti.
Ukázat, která bublina je druhá nejmenší a která druhá největší, byl opět snadný úkol, jen na Emmě bylo vidět, že se hůře soustředí a měla potíže najít druhou nejmenší bublinu. Nejdříve zvolila nejmenší, pak druhou největší, ale nakonec úkol zvládla splnit.
d) *Ukažte na bublinu, která je ve vaší řadě nejvíce vlevo; nejvíce vpravo.* – Orientovat se v řadě předmětů; určit předmět, který je v řadě krajní zprava a zleva.
S pravolevou orientací měli problémy pouze Ctibor a Viktor. Ctibor si nebyl jistý, váhal při každém dotazu. Viktor nejprve zaměnil bubliny na levé a na pravé straně, když jsem ho upozornila na chybu, uvědomil si ji.
e) *Ukažte na bublinu, která je ve vaší řadě třetí zleva. Ukažte na bublinu, která je ve vaší řadě čtvrtá zprava.* – Určit umístění prvku v uspořádaném souboru.

Součástí následné ***analýzy*** bylo zhodnocení toho, na kterou oblast matematické pregramotnosti byla aktivita zaměřena, a s jakým úspěchem děti dokázaly jednotlivé úlohy řešit. Matematický obsah aktivity byl široký. Úlohy po dětech vyžadovaly na základě přečteného textu a podle následného zadání
a) Uplatnit dovednost zhotovit papírové kruhy o různém poloměru (nakreslit a vystřihnout nebo jen vystřihnout) při koordinaci ruky a oka.
b) Porozumět vztahu mezi 3D a 2D modely reality: kruh jako model bubliny – koule, resp. kulové plochy.
c) Prokázat zvládnutí představy kvantity souboru o šesti prvcích ve významu propedeutiky čísla jako pořadí (třetí zleva, čtvrtá zprava).
d) Seřadit/uspořádat soubor šesti kruhů s vyjádřením vlastností „podle velikosti“. Jak zdůrazňuje Kaslová (2010), je třeba prvky, které řadíme, volit tak, aby dětské zkušenosti umožnily dostatečně průkazné a názorné porovnání a na jeho základě seřazení předmětů.
Děti mohly uspořádat množinu objektů sestupně (od největšího kruhu k nejmenšímu) nebo vzestupně.
e) Prokázat schopnost pravolevé orientace.

Všechny úlohy zvládly děti zcela samostatně až na výjimky: Emma v úloze c), Viktor a Ctirad v úloze d). Také tato skutečnost vedla Kristýnu k tomu, aby při návrhu ***alterace*** zařadila dvě ještě náročnější úlohy:
- *Teď každý ukažte na jednu vaši bublinu, kteroukoli. Pojmenujte její pořadí stejným způsobem, jako jsem to dělala já v předchozích otázkách.* – Určit umístění objektu (bubliny) v souboru uspořádaném podle velikosti sestupně.
Všechny děti uspořádaly bubliny sestupně zleva doprava. Jiří si vybral největší bublinu a stejně tak ji pojmenoval („tato je největší, je první“). Alena si vybrala v pořadí třetí největší. Přestože správně určila, že tři bubliny jsou menší a jen dvě větší, označila umístění bubliny za prostřední. Bylo patrné, že tím myslela, že se bublina nacházela uprostřed řady co do vzdálenosti od obou jejích konců. Ctibor ukázal na nejmenší bublinu a opět jako ostatní ji správně určil podle velikosti jako poslední. Viktor si vybral druhou největší, s dopomocí přišel na to, že je druhá zleva a zároveň pátá zprava.
- *Necháme odletět největší bublinu. Až odletí, ukažte prstem na bublinu, která je teď největší. A znovu necháme odletět největší bublinu z těch, které zbyly. Nakonec necháme odletět i poslední bublinu. Kolik bublin nám zbylo?* – Určit početnost prázdného souboru prvků. Propedeutika čísla nula.
Poté, co všechny bubliny „odlétly“, jsem se zeptala, kolik nám jich zůstalo. Alena: „Žádná.” Ctibor: „Nula.” Zjišťovala jsem, zda by to šlo říci i jinak. Jiří: „Nic.” Viktor: „Že tu není ani jedna.” Na Emmě byla patrná únava a do diskuze se již nezapojila.

Již při vyrábění bublin musely děti přemýšlet, jak docílit toho, aby měly kruhy různé rozměry. Protože Kristýna chtěla podpořit jejich kreativitu, dala jim volnost v tom, kam bubliny při „odlétání" schovají. Mělo to za následek, že se některé děti více soustředily na schovávání bublin, než na samotné splnění zadané úlohy. Při realizaci ***alternativní aktivity*** mohlo být promyšleněji uplatněno přesnější zadání, které by zvýšilo její motivační potenciál. Nedostatečně zacílená pozornost dětí se projevila v tom, že některé děti (Emma) v průběhu činnosti již ztrácely motivaci. To ale souviselo s experimentálním charakterem aktivity.

5. Závěr

Zkušenost, kterou přinesla realizace výzkumu a jejíž ukázku jsme uvedli v příspěvku, potvrzuje podle našeho názoru opodstatněnost širšího uplatnění reflektivní analýzy aktivit budoucími učiteli mateřské školy v reálném školním prostředí. Domníváme se, že i ve zdánlivě jednoduše zkonstruované úloze lze při pečlivé přípravě aktivity a po její důkladné analýze rozpoznat a využít řadu podnětů pro rozvíjení dětských dispozic.

Na obě výzkumné otázky lze podle našeho přesvědčení odpovědět pozitivně. Studentky mohly vhodně zařadit do „matematické komponenty" svého profesního portfolia řadu metodicky propracovaných aktivit (cíle, potřebné pomůcky, organizace činnosti, konkrétní výstupy z reflektované analýzy).

Ve výsledcích výzkumu se zřetelně ukázala rozmanitost přístupů ke zpracování úkolu budoucími učitelkami mateřské školy, jak je představili při reflektované výuce. V jejich námětech se objevily různé stránky matematické pregramotnosti: třídění a řazení předmětů podle vhodně zvolených kritérií; souvislost matematické a čtenářské pregramotnosti; uplatnění rytmu; propojení matematické pregramotnosti s výtvarnými činnostmi a hudebními aktivitami. Některé další příklady z reflektované výuky jsme zařadili do kapitoly *Rozvíjení matematických představ* v publikaci Syslové a kol. (2018). Mnohé další inspirace mohou studenti učitelství pro mateřské školy i učitelé v praxi najít v publikacích, které fundovaně propojují konkrétní metodické náměty pro práci v mateřské škole s matematickými základy a východisky rozvíjení matematické pregramotnosti na pozadí požadavků Rámcového vzdělávacího programu pro předškolní vzdělávání (Lietavcová & Lišková, 2018; Kaslová, 2010).

Při uplatnění metodiky AAA ve fázi analýzy videozáznamů a přípravě alternativních činností jsme extrahovali několik oblastí. Dokumentujeme je na několika autentických vyjádřeních studentek.

Všímaly si aspektů oborově předmětových:

„Uvědomila jsem si, že jedna činnost rozvíjí více kompetencí a dovedností, co všechno můžeme jednou činností rozvinout a co vše nějak souvisí právě s matematikou (…) Ono se to odvíjí skoro od všech činností, už tím, že děti mají třeba jen rozlišovat věci. Už to je v podstatě matematika. Dokážou rozlišovat, vystřihnout něco z papíru, napočítat…"

Středem jejich zájmu byly činnosti prováděné dítětem; jeho reakce na plnění úkolů, míra jeho samostatnosti a kreativity:

„Všímám si spontánního projevu dětí. Zvažuji, zda by mohlo dítě zvolit jiný postup ke splnění úkolu." „S provedením úkolů nemělo dítě problémy, dokonce samo od sebe začalo plnit nějaké úkoly navíc. Reagovalo rychle.",„Dítě si zřejmě uvědomuje, že záleží také na pozici pozorovatele. Třeba co může být pro jednoho před, je pro druhého za."

Značná pozornost studentek byla zaměřena rovněž na *činnost učitele, resp. studenta v roli učitele* (obsah i forma jeho vyjadřování, vystupování; plánování a řízení učební činnosti dětí):

„Sledování sebe sama mi nejprve bylo nepříjemné. Po komentářích ostatních jsem ovšem začala na videu vidět i věci, které jsem předtím neviděla, a tedy o nich ani nepřemýšlela." „Uvědomuji si, že je třeba hodně přemýšlet při zadávání úkolů, abych dětem jejich formulací už nenaznačila, jak to má být. Na videu si uvědomím, jak s dítětem komunikuji. Zda se jedná o efektivní, čí neefektivní komunikaci. Konkrétně, když jsem sledovala své video, tak jsem potom přemýšlela, jak se co dalo více popsat a říci jinak.“

V názorech studentek se objevují také některé obecnější souvislosti užití videonahrávky: „Je dobré slyšet i názory a pohledy na jednu věc od ostatních lidí. Někdy je to kritika, ze které se poučíme my sami, někdy se zas může jednat o pochvalu za nápad a jeho správné provedení, ze kterého se naopak poučí druzí.“

Domníváme se, že se tím vytváří rovněž prostor pro zpracování do podoby didaktických (video)kazuistik jako prostředku dalšího rozvíjení učitelových profesních dispozic – diagnostické kompetence, profesního vidění.

I tyto výpovědi naznačují, jakou cestou student musí projít při přípravě na profesi spojenou se vzděláváním dětí předškolního věku. Přibližují jeho přerod z intuitivní v promyšlenou analýzu vlastních profesních kompetencí, při němž se může opírat o doklady obsažené v portfoliu.

Literatura

Darling-Hammond, L., & Snyder, J. (2000). Authentic assessment of teaching in context. *Teaching and Teacher Education,* 16, 523-545.

Dysthe, O., & Engelsen, K.S. (2011). Portfolio practices in higher education in Norway in an international perspective: macro-, meso- and micro-level influences. *Assessment & Evaluation in Higher Education,* 36.

Howes, C., James, J., & Ritchie, S. (2003). Pathways to effective teaching. *Early Childhood Research Quarterly,* 18(1), 104-120.

Hsueh, Y., & Tobin, J. (2003). Chinese early childhood educators' perspectives on dealing with a crying child. *Journal Early Childhood Rearerch*, 1(1), 73-94.

Janík, T., Mužík, V., Trna, J., Janko, T., Lokajíčková, V.,.., Zlatníček, P. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání.* Brno: Masarykova univerzita.

Kaslová, M. (2010). *Předmatematické činnosti v předškolním vzděláván*í. Praha: Raabe.

Kaslová, M. (2015). Prelogické myšlení. In E. Fuchs, H. Lišková, & E. Zelendová (Eds.), *Rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku. Metodický průvodce*, 76-101. Praha: JČMF.

Keiny, S., & Dreyfus, A. (1989). Teachers´ selfreflection as a prerequisite to their professional development. *Journal of education for teaching,* 15 (1), 53-63.

Korthagen, F. A. (2011). How to combine practice with theory: teaching didactics of realistic education. *Teachers and Teaching: Theory and Practice,* 11(1), 47-71.

Korthagen, F. A., Kessels, J., Koster, B., Lagerverf, B., & Wubbels, T. (2011). *Jak spojit praxi s teorií: didaktika realistického vzdělávání učitelů.* Brno: Paido.

Kuřina, F. et al. (2003). *Protomatematika a matematická příprava pedagogů mateřských škol.* Hradec Králové: Univerzita Hradec Králové.

Lietavcová, M. & Lišková, H. (2018). *Rozvíjíme předmatematické myšlení dětí*. Praha: Raabe.

Lišková, H. (2014). Tri oblasti predmatematických predstáv. *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae,* 13(1), 23-44. Ružomberok: Verbum.

Nováková, E. (2019). Reflection of videorecordings as a part of the creation process of prospective kindergarten teachers' professional portfolio. *In J. Novotná & H. Moraová (Eds.). International Symposium Elementary Mathematics Teaching : Opportunities in Learning and Teaching Elementary Mathematics,* 271-279 Prague: Charles University.

Nováková, E., & Novák, B. (2019). *Matematická pregramotnost a učitelé mateřské školy.* Brno: Masarykova univerzita.

Nováková, E., & Nováková, K. (2019). Inspirace k rozvoji vztahů mezi čtenářskou a matematickou pregramotností (Reflexe aktivit aspirovaných literárním textem v kontextu rozvoje matematické pregramotnosti). *In K. Uličná, J. Ronková, J. & J. Slezáková (Eds.) Sborník příspěvků konference Rozvoj pregramotností v předškolním vzdělávání, s. 118-127.* Praha: Pedagogická fakulta UK, 2019, s. 118-127. Dostupné z https://pages.pedf.cuni.cz/sc1/files/2020/01/Sborník-z-konference-OPVVV-SC1_Ulicna.pdf

Nováková, K. (2019). Využití literárního textu pro rozvoj předmatematické gramotnosti u dětí předškolního věku. *Bakalářská práce*. Brno: Pedagogická fakulta MU.

Pramling Samuelsson, I., & Carlsson, M. A. (2008). The playing learning child: Towards a pedagogy of early childhood. *Scandinavian Journal of Educational Research,* 52(6), 623–641.

Pramling, N., & Pramling Samuelsson, I. (2011). *Educational encounters: Nordic studies in early childhood didactics.* Dordrecht, Holandsko: Springer.

Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practitioner: toward a new design for teaching and learning in the professions.* San Francisco: Jossey-Bass.

Slavík, J., Janík, T., Jarníková, J. & Tupý, J. (2012). Zkoumání a rozvíjení kvality výuky v oborových didaktikách: metodika AAA mezi teorií a praxí. *Pedagogická orientace,* 22(3), 367–386.

Syslová, Z. et al. (2018). *Podpora tvorby profesního portfolia v přípravném vzdělávání učitelů mateřských a 1. stupně základních škol.* Brno: Masarykova univerzita.

Švejnohová, A., & Slavíková, V. (2016). Panáček aneb O rozvíjení matematických představ a spolupráce v dětské skupině. *Komenský* 141(1), 31–38.

Tomková, A. (2018). *Portfolio v perspektivě reflektivně pojatého vzdělávání učitelů.* Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.

Wubbels, T. H., & Korthagen, F. A.. (1990). The Effects of a Pre-service Teacher Education Program for the Preparation of Reflective Teachers. *Journal of Education for Teaching*, 16(1), 29–43.

Wyatt, R. L., & Looper, S. (1999). *So You Have to Have a Portfolio. A Teacher´s Guide to Preparation and Presentation.* Thousand Oaks: Corwin Press.

Žáček, J. (1978). *Aprílová škola.* Praha: Albatros.

ISSN 2694-8133

CHESS DOMINATION PROBLEMS

Karel PASTOR
Palacký University Olomouc, Faculty of Education (Czech Republic)
karel.pastor@upol.cz

Abstract

It is very important to develop combinatorial skills of pupils aged 6-11. A board game can be attractive and useful tool to achieve this goal. Chess is one of the most popular games, more than 600 million people around the world know chess rules. Combinatorial skills can be developed not only by playing chess games or by solving chess diagrams, but also by solving some mathematical chess problems. We will focus on the domination problems in our paper. In contrast to the classic chessboard 8×8, we will use a smaller 4×4 and 6×6 chessboard, respectively, to make chess domination problems more accessible to pupils aged 6 to 11.

Keywords: Mathematical chess problems, domination problems, Mathematical Kangaroo.

1. Introduction

We recall ("Mathematical chess problems", Wikipedia) that a mathematical chess problem is a mathematical problem that is formulated using a chessboard and chess pieces. Chess mathematical problems have been already studied by Thabit ibn Qurra (836-901), Arabian astronomer and mathematician ("Thabit ibn Qurra", Wikipedia). We note that Thabit ibn Qurra discovered equation for determining amicable numbers. Amicable numbers are two different numbers so related the sum of the proper divisors of each is equal to the other number – for example 220 and 284 are amicable numbers ("Thabit ibn Qurra", Wikipedia). Later, also next famous mathematicians as for example Adrien-Marie Legendre (1752-1833) or Carl Friedrich Gauss (1777-1855) have studied mathematical chess problems ("Mathematical chess problems", Wikipedia).

Domination problems belong among mathematical chess problems. In these problems it is requested to find a minimum number of pieces of the given kind and place them on a chess board in such a way, that all free squares of the board are attacked by at least one piece ("Mathematical chess problems", Wikipedia).

Domination chess problems have been resolved generally for the chessboard $n \times n$ only for the following chess pieces: king, rook and bishop. When it comes to queen and knight, the situation is clear only for small n (Chybová, 2017).

In our paper, we will reduce the classic chessboard 8×8 to a smaller 4×4 and 6×6 chessboard, respectively, in order to make chess domination problems more accessible to pupils aged 6 to 11.

The movements of classical chess pieces (king, queen, rook, bishop and knight) can be found for example in ("Rules of chess", Wikipedia). We recall only the movement of a special piece named kangaroo that was introduced in Mathematical Kangaroo ("Matematický klokan, 2015").

A kangaroo moves three squares horizontally then one square vertically, or one square horizontally then three squares vertically, see Figure 1.

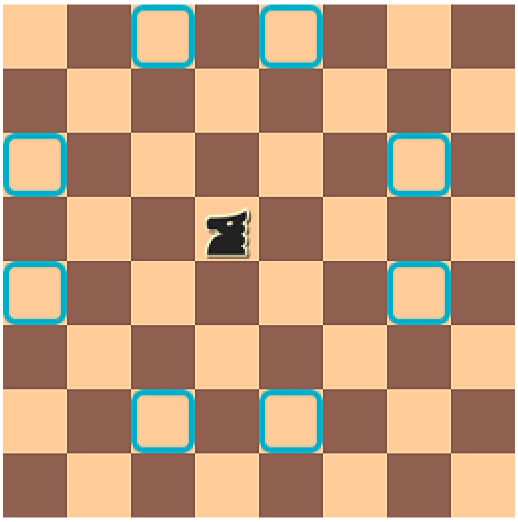


Figure 1. Moves of a kangaroo

2. 4×4 and 6×6 chessboards

In this section, we will show the possible solutions of chess domination problems for the 4×4 and 6×6 chessboards.

A. King

The minimum number of kings, which can be placed on an *n*×*n* chessboard so that all free squares of the board are attacked by at least one king, equals to

$$\left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor^2,$$

where $\lfloor x \rfloor$ denotes the integer part of x (Chybová, str. 35, 2017). Therefore, we have that the minimum number of kings for the 4×4 chessboard equals 4, and the minimum number of kings for the 6×6 chessboard also equals 4. See Figures 2 and 3, respectively.

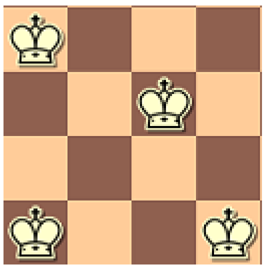


Figure 2. Kings and 4×4

B. Queen

The minimum number of queens, which can be placed on an *n*×*n* chessboard so that all free squares of the board are attacked by at least one queen, is known only for small natural numbers, see (Chybová, str. 44, 2017). The minimum number of queens for the 4×4 chessboard equals 2 and the minimum number of queens for the 6×6 chessboard equals 3. See Figures 4 and 5, respectively. The solution given in Figure 5 was obtained by the symmetry of chessboard from the example presented in (Chybová, str. 45, 2017).

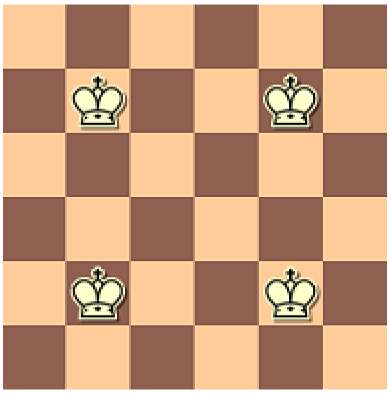


Figure 3. Kings and 6×6

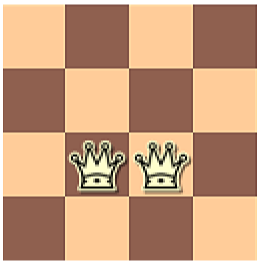


Figure 4. Queens and 4×4

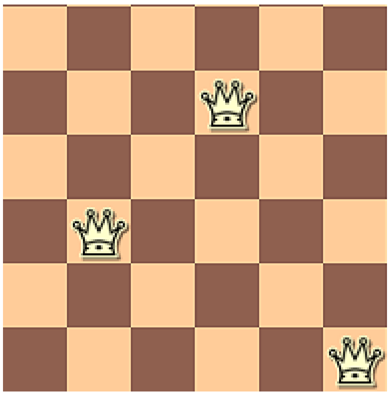


Figure 5. Queens and 6×6

C. Rook

The minimum number of rooks, which can be placed on an $n \times n$ chessboard so that all free squares of the board are attacked by at least one rook, equals to n (Chybová, str. 35, 2017). Thus, we have that the minimum number of rooks for the 4×4 chessboard equals 4, and the minimum number of rooks for the 6×6 chessboard equals 6. See Figures 6 and 7, respectively.

D. Bishop

The minimum number of bishops, which can be placed on an $n \times n$ chessboard so that all free squares of the board are attacked by at least one bishop, equals to n (Chybová, str. 36, 2017). Thus, we have that the minimum number of bishops for the 4×4 chessboard equals 4, and the minimum number of bishops for the 6×6 chessboard equals 6. See Figures 8 and 9, respectively.

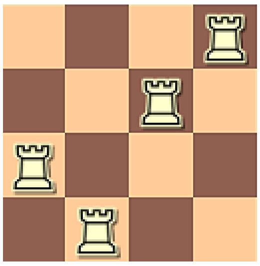


Figure 6. Rooks and 4×4

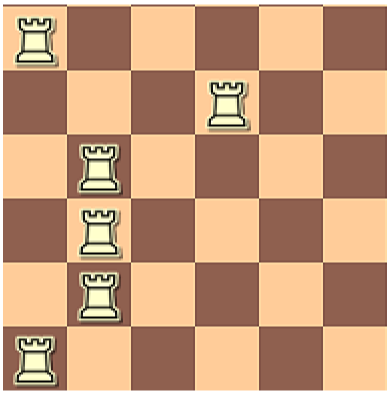


Figure 7. Rooks and 6×6

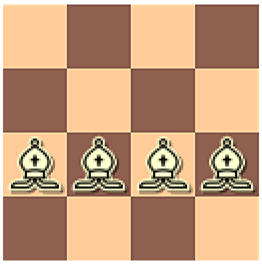


Figure 8. Bishops and 4×4

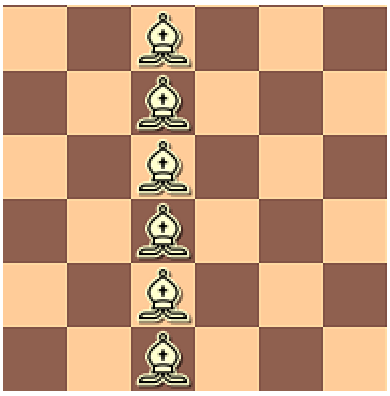


Figure 9. Bishops and 6×6

ISSN 2694-8133

E. Knight

The minimum number of knights, which can be placed on an $n \times n$ chessboard so that all free squares of the board are attacked by at least one knight, is known only for small natural numbers, see (Chybová, str. 46, 2017). The minimum number of knights for the 4×4 chessboard equals 4 and the minimum number of knights for the 6×6 chessboard equals 8. Examples which are given on Figure 10 and Figure 11, respectively, were presented in (Chybová, str. 46, 2017).

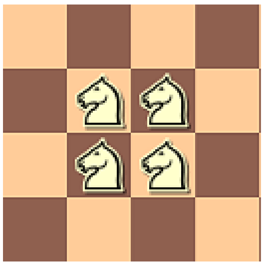


Figure 10. Knights and 4×4

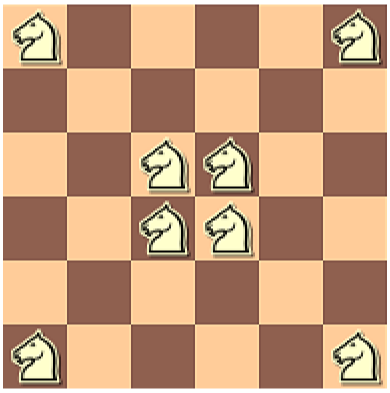


Figure 11. Knights and 6×6

Finishing this section, we will solve the domination problem for the kangaroo and the 4×4 and 6×6 chessboards.

i) 4×4 chessboards

An interior square of 4×4 chessboard cannot be attacked by any kangaroo, therefore we must place kangaroos on the all four interior squares of 4×4 chessboard. Since a kangaroo on an outer square of 4×4 chessboard attacks just two outer squares, it is necessary to use minimally 4 (=12:3) kangaroos on outer squares. Figure 12 illustrates that the number 4 of kangaroos on outer squares is enough.

Therefore, the minimum number of kangaroos, which can be placed on the 4×4 chessboard so that all free squares of the board are attacked by at least one kangaroo, equals to 8.

Figure 12. Kangaroos and 4x4

ii) 6×6 chessboards

A kangaroo can attack maximally 4 squares of 6×6 chessboard. Because 36:5=7.2, at least 8 kangaroos must be placed on the 6x6 chessboard minimally. Figure 13 shows that the number of 8 kangaroos is enough.

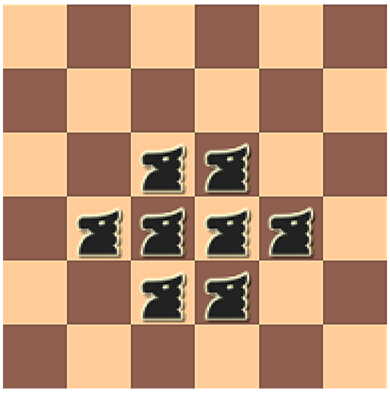


Figure 13. Kangaroos and 6x6

3. Conclusion

We were interested in some chess dominance problems that can be solved by pupils aged 6 to 11. A special attention was focused on a special piece named kangaroo.

To solve the previous problems pupils can use, for example, a printed chessboard and beans instead of pieces, or they can use some computer application, see e.g. ("Chess Diagram Setup").

Some of the previous problems are very simple (such as the problem of rooks associated with Figure 6) and pupils can solve them very quickly.

Some problems may be more difficult to some pupils aged 6-11 (such as the problem of kangaroos associated with Figure 13). In this case, the teacher (coach, parent) has the possibility to give some help - for example by placing one or more pieces on the chessboard.

Another kind of mathematical chess problems is an independence problem ("Mathematical chess problems", Wikipedia). In these problems it is requested to find a maximum number of pieces of the given kind and place them on a chess board so that none of the pieces attacks each other. In (Pastor, 2019), we have tried to make chess independence problems more accessible to pupils aged 6 to 11.

References

Chybová, L. (2017). *Šachové úlohy v kombinatorice.* Diplomová práce (in Czech). Praha: Univerzita Karlova. Retrieved 10-03-2020, from http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/lucie_chybova_dp/sachove-ulohy.pdf

Pastor, K. (2019). Chess independence problem. *Elementary Mathematics Education Journal 1 (2).* Retrieved 10-03-2020, from http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol1No2/Pastor_2019_Vol1No2.pdf

(n.d.). Amicable numbers. (Wikipedia). Retrieved 10-03-2020, from https://en.wikipedia.org/wiki/Amicable_numbers

(n.d.). Mathematical chess problems. (Wikipedia). Retrieved 10-03-2020, from https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_chess_problem

(n.d.). Thabit ibn Qurra. (Wikipedia, in Czech). Retrieved 10-03-2020, from https://cs.wikipedia.org/wiki/Thabit_ibn_Qurra

(n.d). Matematický klokan 2015 (in Czech). Retrieved 10-03-2020, from http://www.matematickyklokan.net/phocadownload/sborniky/sbornik_klokan_2015.pdf

(n.d.). Chess Diagram Setup. Retrieved 10-03-2020, from https://www.jinchess.com/chessboard/composer/

MATEMATICKÁ ÚLOHA S ELEMENTAMI HUDOBNEJ VÝCHOVY – PROSTRIEDOK ROZVOJA PRACOVNEJ PAMÄTI

Alena PRÍDAVKOVÁ
Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovensko)
alena.pridavkova@unipo.sk

Abstrakt

Pracovná pamäť predstavuje významný determinant úspešnosti žiakov v matematike. Na druhej strane, pracovnú pamäť je možné rozvíjať v procese riešenia matematických úloh. Navyše, ak je kontext úlohy obohatený o elementy hudobnej výchovy, objavujú sa nové možnosti pre tvorbu súborov úloh a aktivít. Inkorporácia hudobných činností do vyučovania matematiky je jednou z možností pre rozvoj pracovnej pamäti. V štúdii sú analyzované výskumy zaoberajúce sa konceptami pracovná pamäť a matematické schopnosti. Predstavený je súbor úloh z oblasti aritmetiky, ktorým je možné stimulovať pracovnú pamäť u žiakov mladšieho školského veku. Úlohy, obohatené o elementy hudobnej výchovy, sú gradované na základe atribútov kognitívnej úrovne náročnosti a zaťaženia pracovnej pamäti.

Kľúčové slová: pracovná pamäť, matematická úloha, kognitívna náročnosť úlohy

MATHEMATICAL TASK WITH ELEMENTS OF MUSIC – MEANS OF DEVELOPING WORKING MEMORY

Abstract

Working memory is a decisive determinant of students´ achievement in Mathematics. On the other hand, working memory could be developed in the process of mathematical tasks solving. Moreover, if the context of such a task is enriched with musical elements, it can generate new ways for developing sets of tasks and activities. Incorporation of musical activities into mathematical education is one of the means of improving working memory. The researches focused on concepts of working memory and mathematical abilities are analysed in this study. The set of mathematical tasks from the field of arithmetic which can stimulate working memory of students at younger school age is presented. Mathematical tasks enriched with elements of music are graded on the basis of attributes of the cognitive difficulty and working memory levels.

Keywords: working memory, mathematical task, cognitive difficulty of task

1. Úvod – prieniky matematiky a hudby

Matematika a hudba zohrávajú významnú úlohu v každodennom živote človeka a spoločnosti. Aj napriek ich odlišnému ponímaniu existujú medzi nimi prepojenia a súvislosti, ktoré môžu byť využité v edukačnom procese ako prostriedok rozvíjania myslenia detí. Matematické schopnosti je možné rozvíjať pomocou hudobných cvičení, čo znamená, že vyučovanie využívajúce hudobný aj matematický obsah predikuje kvalitatívne lepšie učebné výsledky v matematike (Luczak, 2000, In Kolodziejski, 2012).

Matematika aj hudba využíva modely abstraktných schém prezentovaných vzormi, ktoré je dôležité dešifrovať. V hudbe ide o interpretáciu hudobnej skladby a v matematike o aplikáciu modelu v konkrétnej situácii. Analýza vzorov a pravidiel pre ich vytváranie sú činnosti, ktoré sa vyskytujú tak v matematike, ako aj v hudbe. Pri rozpoznávaní vzoru je dôležitá klasifikácia alebo zhlukovanie (tzv. chunking), vytvorenie blokov, s ktorými sa pracuje ako s jednotkou vzoru (Mall, Spychiger, Vogel, & Zerlik, 2016). Analogické techniky na zapamätanie si vzorov sú známe aj pri tréningoch pracovnej pamäti. Matematika využíva rôzne typy symbolov na vyjadrenie myšlienok iným ako verbálnym spôsobom a to je spoločné s hudbou, v ktorej je tiež východiskom myslenie neverbálneho charakteru (Kopčáková, 2015). Obe oblasti využívajú analogické spôsoby zápisov, symboly, reprezentácie konceptov. Predstavujú tak platformu pre rozvíjanie myšlienkových operácií a schopnosti učiť sa. Integrácia matematiky a hudby môže stimulovať myslenie detí z pohľadu rozvoja schopnosti hľadať a skúmať vzory, pravidelnosti a vzťahy medzi nimi.

Pamäť, priestorová orientácia a divergentné myslenie sú dôležitými konštruktmi pri rozvoji matematických schopností. Luczak (2015) konštatuje, že hra na hudobných nástrojoch prispieva k rozvoju pozornosti, pamäti, sebaregulácie, sústredenosti a kontrole pozornosti. Pre stimuláciu ďalších zložiek myslenia, akými sú priestorová orientácia, pamäť, koncentrácia pozornosti, analýza, považuje autorka za vhodné počúvanie hudby, spev, tanec a inscenovanie. Ukazuje sa, že proces učenia sa matematiky môže byť podporený aplikáciou aktivít vytvorených na hudobnej báze. Hudba prispieva k formovaniu myslenia žiaka prostredníctvom tvorby modelov elementárnych matematických pojmov.

V nasledujúcej časti bude prezentovaný prehľad relačných a kauzálnych výskumov, v ktorých je skúmanie orientované na koncepty pracovná pamäť a matematické schopnosti žiaka resp. výkon žiaka v matematike.

2. Pracovná pamäť a matematické schopnosti

Pracovná pamäť (Kovalčíková, Bobáková, Filičková, Ropovik, & Slavkovská, 2015, s. 70) je „aktívne udržiavanie a flexibilné aktualizovanie informácie, ktorá je relevantná pri riešení aktuálnej úlohy. Pracovná pamäť umožňuje podržať informácie v pamäti počas doby, kým sú spracované alebo skoordinované s inými mentálnymi operáciami." Pri riešení matematickej úlohy (napríklad pri sčítaní dvojciferných čísel) žiak drží čísla dočasne v pracovnej pamäti a súčasne ich spracováva pri riešení daného problému. Informácie, ktoré nie sú dôležité pre riešenie úlohy sú vytlačené novými informáciami. Pracovnú pamäť tvoria tri elementy: fonologická slučka, vizuálno-priestorový náčrtník a centrálna exekutíva (riadiaca zložka).

Najčastejší typ výskumov je reprezentovaný relačnými štúdiami, kde boli skúmané vzťahy medzi úrovňou pracovnej pamäti a úspešnosťou žiaka pri riešení matematických úloh. Andersson a Lyxell (2007) zisťovali úroveň pracovnej pamäti u detí vo veku 9-10 rokov, ktoré mali problémy v matematike. Závery skúmania poukazujú na potvrdenie predpokladu, že deti s problémami v matematike vykazujú deficity v pracovnej pamäti, konkrétne s ukladaním numerických a vizuálnych informácií.

Výsledky výskumu Cragg, Keeble, Richardson, Roome a Gilmore (2017) potvrdzujú, že pracovná pamäť prispieva k úspechom v matematike nepriamo, prostredníctvom faktických vedomostí, procedurálnych zručností a v menšej miere aj cez porozumenie konceptom. Podobne Fuchs et al. (2005, 2013) ukazujú na vzťah medzi pracovnou pamäťou a matematickými schopnosťami. Úroveň pracovnej pamäti predikuje schopnosť učiť sa matematiku (osvojovať si nové matematické poznatky). Vzťah medzi pracovnou pamäťou a zručnosťami pri písomnom riešení aritmetických úloh u žiakov 4. ročníka základnej školy skúmal Andersson (2008). Ukázalo sa, že pracovná pamäť prispieva k aritmetickým zručnostiam detí (vo veku 9-10 rokov). Prínos fonologickej slučky a centrálnej exekutívy (súbežné spracovanie a ukladanie informácií) naznačuje, že pri písomnom riešení aritmetických úloh sú prioritne využívané verbálne stratégie kódovania. Bull a Scerif, (2001) poukazujú na skutočnosť, že deti (vo veku od 6 do 8 rokov) s nižšou úrovňou matematických schopností majú problémy pri úlohách, ktoré vyžadujú udržanie informácií v pracovnej pamäti. Pracovná pamäť súvisí s náročnejšími matematickými schopnosťami, akými sú napríklad porovnávanie, kombinácia čísel a množstva (Purpura, Schmitt, & Ganley, 2017).

Osobitnú skupinu výskumov odhaľujúcich súvislosti medzi úrovňou pracovnej pamäti a výkonom v matematike sú výskumy kauzálne. V rámci experimentálnych výskumov bol overovaný vplyv tréningov v oblasti pracovnej pamäti na matematické schopnosti. Holmes, Gathercole a Dunning (2009) aplikovali tréning pracovnej pamäti v skupine 9-10 ročných žiakov. Po šesťmesačnom tréningu v komputerizovanej podobe bolo pozorované zlepšenie v oblasti matematického uvažovania. Podobne St Clair-Thompson, Stevens, Hunt a Bolder, (2010) skúmali vplyv tréningu pracovnej pamäti u detí vo veku 5-8 rokov. Výsledky poukázali na zlepšenie pracovnej pamäti, ako aj na zvýšenie úrovne aritmetických operácií (počítanie spamäti), nebol však zistený signifikantný vplyv na výkony v matematike. Experiment skúmajúci zapojenie pracovnej pamäti pri riešení úloh využitím rôznych spôsobov sčítania (spamäti, využitím algoritmu – presného postupu, horizontálne, vertikálne, presné, približné) u detí na 1. stupni ZŠ, prezentujú Caviola, Mammarella, Cornoldi a Lucangeli (2012). Rôzne zložky pracovnej pamäti (verbálna a vizuálno-priestorová) sú aktivované pri rôznych prístupoch ku sčítaniu prirodzených čísel. Podobne aj Berg (2008) skúmal úlohu niekoľkých indikátorov v procese riešenia aritmetických úloh: rýchlosť spracovania informácie, krátkodobá pamäť, pracovná pamäť. Program určený na zvýšenie schopnosti riešiť matematické problémy prostredníctvom vzdelávacieho obsahu zameraného na rozvoj metakognície a pracovnej pamäti, prezentujú Cornoldi, Carretti, Drusi a Tencati (2015). Program bol aplikovaný na vzorke 135 detí vo veku 8-10 rokov a trval tri mesiace. Výsledky tréningu ukázali na zlepšenie metakognície a pracovnej pamäti, čo v pozitívnom zmysle ovplyvnilo schopnosť detí riešiť problémy. Autori štúdie odporúčajú realizovať aktivity zamerané na rozvoj metakognície a pracovnej pamäti, ktoré môžu prispieť k zvýšeniu výkonov žiakov pri riešení matematických úloh.

Výsledky prezentovaných výskumov, realizovaných v skupinách žiakov mladšieho školského veku, ukazujú na dôležitosť pracovnej pamäti pri riešení matematických úloh ako aj na vzťah medzi úrovňou pracovnej pamäti a matematických schopností. Nedostatočne rozvinuté konceptuálne a procesuálne kompetencie v matematike môžu byť dôsledkom nedostatočne fungujúcich kognitívnych a exekutívnych mechanizmov ako napríklad pracovná pamäť či vizuálno-priestorové spracovanie informácie.

3. Pracovná pamäť v elementárnej matematike

Pracovná pamäť má významné postavenie v matematickej edukácii na primárnom stupni vzdelávania. Ide o schopnosť uchovať informáciu dostatočne dlho na to, aby žiak s ňou mentálne manipuloval a pracoval pred tým, než vyprchá. Ak sa informácia, s ktorou žiak pracuje v pracovnej pamäti, stratí, nie je možné ju aktivovať inak, ako začať celý proces riešenia odznova. Nároky na výkon žiaka v oblasti jeho pracovnej pamäti narastajú pri úlohách, ktoré si vyžadujú kombináciu dvoch procesov: spracovanie informácie a uchovanie informácie (Gathercole & Alloway, 2015). V prípade, že sú u žiaka identifikované problémy s pracovnou pamäťou, je potrebné prejsť na úlohu nižšej úrovne obťažnosti a umožniť žiakovi zaznamenávať si čiastkové riešenia. Uvedené zmeny umožnia žiakovi dospieť k úspešnému riešeniu úlohy.

ISSN 2694-8133

Pracovná pamäť je dôležitým indikátorom v procese riešenia aritmetických úloh u žiakov 4. ročníka ZŠ a prispieva k rozvoju ich aritmetických zručností (Andersson, 2008; Berg, 2008). Je významná predovšetkým pri riešení úloh zameraných na počítanie a na operácie s číslami, ako aj pri riešení logických problémov a slovných úloh (Hill, 2018). Zložky pracovnej pamäti (verbálna aj vizuálno-priestorová) sú prediktormi úspešnosti riešenia slovných a problémových úloh (Zheng, Swanson, & Marcoulides, 2011), sú tiež aktivované aj v rôznych postupoch sčítania prirodzených čísel.

Pracovná pamäť sa využíva pri riešení úloh z oblasti aritmetiky, napríklad numerácia (zápis viacciferných čísel), pri počtových operáciách s prirodzenými číslami (rôzne postupy počítania spamäti). Zohráva významnú rolu pri riešení slovných úloh, pri nadobudnutí vhľadu do situácie a identifikovaní vzťahov medzi zadanými informáciami (napríklad nepriamo formulované slovné úlohy). Má význam v úlohách z oblasti kombinatoriky, napríklad pri vytváraní čísel (postupností) podľa daných pravidiel. Práve spomenuté oblasti kurikula matematiky vytvárajú priestor na tvorbu úloh zameraných na stimuláciu pracovnej pamäti.

V ďalšej časti príspevku bude prezentovaný súbor úloh zameraný na rozvoj pracovnej pamäti z oblasti numerácie. Úlohy sú vytvorené na tému zápis prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave (skrátený a rozvinutý). Aké je miesto tejto oblasti v elementárnej matematike? Číslo predstavuje elementárny koncept matematiky. S modelmi čísla získavajú deti prvotné skúsenosti už v ranom veku (určovanie počtu predmetov, počítanie po jednom, prsty na rukách, rôzne ďalšie enaktívne a ikonické reprezentácie prirodzených čísel). V školskej matematike sa pracuje so symbolickými zápismi prirodzených čísel, využitím pravidiel pre ich zápis v desiatkovej číselnej sústave, ktorá je považovaná za pozičnú. Každá číslica v zápise čísla má pevne určenú pozíciu, ktorá reprezentuje jej hodnotu (jednotky, desiatky, stovky atď.). Na primárnom stupni vzdelávania je dôležité, aby si žiaci osvojili princíp desiatkovej číselnej sústavy, zápis a čítanie viacciferných prirodzených čísel. Tieto zručnosti by mali byť zautomatizované vzhľadom ku skutočnosti, že prirodzené čísla tvoria koncept, ktorý sa využíva v mnohých ďalších oblastiach matematiky – počtové výkony s prirodzenými číslami, slovné úlohy, aplikačné úlohy, geometria, rovnice, nerovnice, zlomky atď. Zápis čísel predstavuje elementárnu zručnosť nevyhnutnú pre zvládnutie ďalších tém z matematiky.

4. Pracovná pamäť pri riešení matematických úloh s elementami hudobnej výchovy

Prezentovaný súbor matematických úloh, v ktorých sú inkorporované elementy hudobnej výchovy, je zameraný na rozvíjanie pracovnej pamäti. Cieľom úloh, z pohľadu matematiky, je identifikovať *n*-ciferné prirodzené číslo na základe jeho akustickej reprezentácie v desiatkovej číselnej sústave.

4.1 Analýza úloh

Na základe realizovanej kognitívnej analýzy úloh boli vyšpecifikované atribúty pre určenie ich kognitívnej náročnosti a pre mieru zaťaženia pracovnej pamäti. Úlohy sú do súboru zaradené tak, aby sa úroveň ich kognitívnej náročnosti a miera zaťaženia pracovnej pamäti postupne zvyšovali.

Tabuľka 1. Analýza súboru úloh

<table>
<tr><td colspan="2">ZAMERANIE ÚLOHY</td></tr>
<tr><td>matematika</td><td>Pojmy: číslo, číslica, jednotky, desiatky, stovky, skrátený a rozvinutý zápis čísla v desiatkovej číselnej sústave
- čítanie čísel
- rozlišovanie čísel podľa počtu cifier – jednociferné, dvojciferné, trojciferné
- rôzne reprezentácie prirodzeného čísla
- identifikácia čísla zadaného akustickým kódom</td></tr>
<tr><td>hudobná výchova</td><td>rytmus, metrum, metrorytmus</td></tr>
<tr><td colspan="2">KOGNITÍVNA ANALÝZA ÚLOHY</td></tr>
<tr><td>atribúty úrovne náročnosti úlohy</td><td>Počet cifier daného čísla:
I. dvojciferné
II. trojciferné
Poradie, v akom sú (akusticky) prezentované číslice jednotlivých rádov v danom čísle:
I. 2-ciferné číslo: desiatky, jednotky
3-ciferné číslo: stovky, desiatky, jednotky
II. 2-ciferné číslo: jednotky, desiatky,
3-ciferné číslo: jednotky, desiatky, stovky
III. 3-ciferné číslo: stovky, jednotky, desiatky
3-ciferné číslo: jednotky, stovky, desiatky
3-ciferné číslo: desiatky, jednotky, stovky
3-ciferné číslo: desiatky, stovky, jednotky
Použité číslice v danom čísle:
I. všetky číslice sú rôzne (nie je použitá nula)
II. všetky číslice sú rôzne (aspoň jedna z nich je nula)
III. číslice sa v čísle opakujú</td></tr>
<tr><td>zaťaženie pracovnej pamäti</td><td>I. žiak podrží v pamäti dva zvukové kódy (pre desiatky, pre jednotky); transformácia akustickej reprezentácie čísla v danom poradí kódov
II. žiak podrží v pamäti dva zvukové kódy (pre desiatky, pre jednotky); transformácia akustickej reprezentácie čísla v opačnom poradí kódov
III. žiak podrží v pamäti tri zvukové kódy (pre stovky, desiatky a pre jednotky); transformácia akustickej reprezentácie čísla v danom poradí kódov
IV. žiak podrží v pamäti tri zvukové kódy (pre stovky, desiatky a pre jednotky); transformácia akustickej reprezentácie čísla v zmenenom poradí kódov</td></tr>
</table>

Úlohy zaradené do súboru sú zamerané na vytváranie rôznych akustických modelov prirodzených čísel. Zvyčajne žiaci pracujú s inými modelmi prirodzených čísel, napríklad model čísla na počítadle, kocky, drobné predmety, grafické znázornenie. Žiakovi sú postupne prezentované akustické modely rôznych prirodzených čísel, postupne podľa úrovní náročnosti, ten ich identifikuje a zapisuje *n*-ciferné čísla na základe transformácie zvukových kódov. V procese riešenia úloh si žiak vytvára vlastnú mentálnu reprezentáciu viacciferného čísla. Počet zvukov (kódov) je pretransformovaný do symbolu číslice, ten je podržaný v pamäti a nakoniec je zapísaný na zodpovedajúcu pozíciu v *n*-cifernom čísle.
Cieľom úloh, je okrem stimulácie pracovnej pamäti, rozvíjať schopnosť porozumieť princípu, na základe ktorého môžu byť prirodzené čísla reprezentované pomocou rôznych modelov (písomný zápis, grafická reprezentácia, symboly, manipulácia s malými predmetmi, akustické modely). Aplikácia úloh daného typu pomáha posilniť zručnosti spojené s transformáciou písomných zápisov prirodzených čísel na akustický model a naopak.

4.2 Opis administrácie úloh

V úvode práce je odporúčané so žiakom zopakovať východiskové pojmy (uvedené v tabuľke 1) využitím ľubovoľných čísel (jednociferné, dvojciferné, trojciferné). Administrátor napríklad zapíše niekoľko čísel a žiak ich má prečítať, identifikovať, označiť v nich číslice na mieste jednotiek, desiatok, stoviek. Administrátor zapíše: (1) ľubovoľné dvojciferné prirodzené číslo v skrátenom zápise v desiatkovej číselnej sústave a aj pomocou grafického znázornenia (napr. 24 - - ++++); (2) trojciferné prirodzené číslo v skrátenom zápise v desiatkovej číselnej sústave a aj pomocou grafického znázornenia (napr. 235, // --- +++++). Odporúča sa použiť aj grafické zápisy, ktoré sa objavujú v učebných textoch z matematiky pre 1. stupeň ZŠ.

Nasleduje vysvetlenie princípu úloh (hry), kedy budú čísla vyjadrené pomocou zvukov. Dohodneme sa, že desiatky budú zakódované potleskom, jednotky dupnutím. Napríklad číslo 24 bude znieť takto:

- **desiatky – potlesk** (zaznie potlesk 2-krát, lebo v danom čísle sú dve desiatky),
- **jednotky – dupnutie** (zaznie dupnutie 4-krát, lebo v danom čísle sú štyri jednotky).

Na ukážku môže byť zvukovo zakódované aj trojciferné číslo, kde počet lúsknutí bude označovať počet stoviek v danom čísle. Napríklad 235 (2-krát lúsknutie, 3-krát potlesk, 5-krát dupnutie),

- **stovky – lúsknutie** (zaznie lúsknutie 2-krát, lebo v danom čísle sú dve stovky).

Je možné si zvoliť aj iný spôsob kódovania, kde sú použité iné zvuky na reprezentáciu jednotlivých rádov v danom čísle. Dôležité je, aby pri riešení všetkých úloh bolo využité rovnaké kódovanie.

Pokračuje sa prezentovaním – hraním rôznych čísel a úlohou žiaka je povedať číslo, ktoré bolo zahrané. Dôležité pritom je, aby sa žiak sústredil na jednotlivé zvuky, udržal ich v pamäti, zvukové kódy pretransformoval (na číslice) a správne vyslovil číslo. V prípade, že úloha je pre žiaka príliš náročná, je možné, aby si robil v procese riešenia zápisy.
Príklady zadávaných gradovaných úloh sú uvedené v tabuľke 2. Pokyn pre žiaka: *Povedz, aké číslo som zahral.*

Tabuľka 2. Ukážky úloh v súbore

Úloha	**riešenie**
dvojciferné čísla	
U1 3x potlesk 5x dupnutie	**35**
U2 6x potlesk 2x dupnutie	**62**
výmena poradia jednotiek a desiatok	
U3 4x dupnutie 2x potlesk	**24**
U4 3x dupnutie 5x potlesk	**53**
trojciferné čísla	
U5 3x lúsknutie 2x potlesk 5x dupnutie	**325**
U6 5x lúsknutie 3x potlesk	**530**
trojciferné čísla - výmena poradia (stoviek, desiatok a jednotiek) len pre tých, ktorí zvládli predchádzajúce úlohy (kódovanie je zautomatizované) administrátor volí rôzne ďalšie čísla, mení poradie cifier, zadáva čísla, v ktorých zápise sa vyskytuje 0	
U7 1x dupnutie 2x potlesk 5x lúsknutie	**521**

Ak žiak zvládne úlohy na všetkých úrovniach náročnosti, môže vytvárať vlastné návrhy zvukov na zakódovanie prirodzených čísel (napr. trojciferných) a dostáva sa do roly administrátora. Existuje veľa ďalších možností na tvorbu zvukového kódu: rôzne druhy zvukov, vydávanie zvukov pomocou rôznych predmetov a nástrojov (hra na tele, Orffove nástroje, lyžice, hrnčeky, plechovky a guľôčky).

5. Záver

Prezentovaný bol jeden z možných prístupov k rozvoju pracovnej pamäti, pri ktorom za prostriedok stimulácie boli zvolené matematické úlohy z oblasti aritmetiky. Proces riešenia úloh vyžadoval aplikovať elementy hudobnej výchovy, konkrétne akustické reprezentácie prirodzených čísel, princíp rytmickej hry na ozvenu (hra na tele, detské rytmické nástroje). V medzinárodnom aj v národnom (slovenskom) kontexte boli kreované mnohé návrhy edukačných aktivít, ktoré integrujú obsah matematiky a hudobnej výchovy, pričom ich zámerom je prioritne rozvíjať a stimulovať myslenie detí a predpoklady na rozvoj matematických a hudobných schopností (Cslovjecsek & Linneweber-Lammerskitten, 2011; Hilton, Saunders, Henley, & Welch, 2016; Hudáková, 2015; Kopčáková, Prídavková, Šimčíková, Hudáková, & Migašová, 2016; Luczak, 2015; Prídavková & Šimčíková, 2014, 2015, 2016;).

Tvorba a inkorporácia aktivít hudobného charakteru do matematickej edukácie je jedným z cieľov projektu KEGA 028PU-4/2019 riešeného na Pedagogickej fakulte PU v Prešove. Návrhy aktivít uvedeného zamerania budú spracované v elektronickej forme za účelom ich aplikácie do pregraduálnej matematickej prípravy budúcich učiteľov na predprimárnom a primárnom stupni vzdelávania. Úroveň odborných kompetencií učiteľa, jeho schopnosť vytvárať podnetné prostredie, v ktorom majú žiaci možnosť aktívne participovať na rozvoji vlastných zručností a stratégií – to všetko sú elementy ovplyvňujúce kvalitu edukačného procesu (Westwood, 2004). Hudba, hudobno-pohybové, inštrumentálne a percepčné činnosti aplikované v matematickej edukácii reprezentujú prostriedky rozvoja schopnosti učiť sa, myslenia, jeho jednotlivých zložiek, akou je aj pracovná pamäť.

Acknowledgements

Príspevok je výstupom grantových projektov:
KEGA-028PU-4/2019 *Inkorporácia hudobných činností do matematickej pregraduálnej prípravy študentov v študijnom odbore Predškolská a elementárna pedagogika* a
APVV-15-0273 *Experimentálne overovanie programov na stimuláciu exekutívnych funkcií slaboprospievajúceho žiaka (na konci 1. stupňa školskej dochádzky) – kognitívny stimulačný potenciál matematiky a slovenského jazyka.*

Literatúra

Andersson, U., & Lyxell, B. (2007). Working memory deficit in children with mathematical difficulties: A general or specific deficit? *Journal of Experimental Child Psychology*, *96*(3), 197–228.

Andersson, U. (2008). Working memory as a predictor of written arithmetical skills in children: The importance of central executive functions. *British Journal of Educational Psychology, 78*(2), 181–203.

Berg, D. H. (2008). Working memory and arithmetic calculation in children: The contributory roles of processing speed, short-term memory, and reading. *Journal of Experimental Child Psychology*, *99*(4), 288–308.

Bull, R. & Scerif, G. (2001). Executive Functioning as a Predictor of Children's Mathematics Ability: Inhibition, Switching, and Working Memory. *Developmental Neuro-psychology*, *19*(3), 273–293.

Caviola, S., Mammarella, I. C., Cornoldi, C., & Lucangeli, D. (2012). The involvement of working memory in children's exact and approximate mental addition. *Journal of Experimental Child Psychology*, *112*(2), 141–160.

Cornoldi, C., Carretti, B., Drusi, S., & Tencati, C. (2015). Improving problem solving in primary school students: The effect of a training programme focusing on metacognition and working memory. *British Journal of Educational Psychology*, *2015*(85), 424–439.

Cragg, L., Keeble, S., Richardson, S., Roome, H. E., & Gilmore, C. (2017). Direct and indirect influences of executive functions on mathematics achievement. *Cognition*, *2017*(162), 12–26.

Cslovjecsek, M., & Linneweber-Lammerskitten, H. (2011). Snappings, Clappings and the Representation of Numbers. *The New Jersey Mathematics Teacher*, *69*(1), 10–12.

Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J. D., & Hamlett, C. L. (2005). The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology, 97*(3), 493–513.

Fuchs, L. S., Geary, D. C., Compton, D. L., Fuchs, D., Schatschneider, C., Hamlett, C.L., ... Changas, P. (2013). Effects of first-grade number knowledge tutoring with contrasting forms of practice. *Journal of Educational Psychology, 105*(1), 58–77.

Gathercole, S. E., & Alloway, T. P. (2015). *Working memory and learning: A practical guide for teachers*. London: Sage Publications.

Hill, B., (2018). *Cognitive Skills and Math* (Dostupné na: https://www.edcircuit.com/cognitive-skills-math/)

Hilton, C., Saunders, J., Henley, J., & Welch, G. (2016*). European Music Portfolio (EMP) – Maths: Sounding ways into mathematics. Teacher´s Handbook*. London: UCL Institute of Education.

Holmes, J., Gathercole S. E., & Dunning D. L. (2009). Adaptive training leads to sustained enhancement of poor working memory in children. *Developmental Science, 12*(4), F9–15.

Hudáková, J. (2015). Matematika v hudbe a hudba v matematike. *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Universitas Catholica Ružomberok.* Ružomberok: Verbum*, XIV*(1), 50–57.

Kolodziejski, M. (2012). Developing and stabilised musical aptitudes versus non-verbal production and readiness for improvisation in elementary school pupils demonstrating significant mathematical abilities. *Journal of Educational Review, 5*(2), 173–182.

Kopčáková, S. (2015). Hudobné myslenie a matematické myslenie – hľadanie ich prienikov z hľadiska možností integrácie v edukácii na základnej škole. *Múzy v škole, 20*(3-4), 42–49.

Kopčáková, S., Prídavková, A., Šimčíková, E., Hudáková, J., & Migašová, J. (2016). *Európske hudobné portfólio – matematika: hudobné cesty do matematiky. Praktické aktivity pre učiteľov - metodická príručka*. Dostupné z: http://maths.emportfolio.eu/images/deliverables/Teacher_Booklet_SK.pdf

Kovalčíková, I., Bobáková, M., Filičková M., Ropovik, I., & Slavkovská, M. (2015). *Terminologické minimum kognitívnej edukácie*. Prešov: Vydavateľstvo PU v Prešove.

Luczak, A. (2015). Tvorba matematických pojmov v hudobnej výchove na primárnom stupni integrovaného vzdelávania (na prvom stupni základnej školy). *Múzy v škole, 20*(3-4), 50–69.

Mall, P., Spychiger, M., Vogel, R., & Zerlik, J. (2016). *European Music Portfolio (EMP) – Maths 'Sounding Ways into Mathematics'. Teacher´s Handbook.* Frankfurt: University for Music and Performing Arts Frankfurt.

Prídavková, A., & Šimčíková, E. (2014). Ozvučené cesty do matematiky – vyučovanie matematiky využitím hudobných aktivít. In: *História, súčasnosť a perspektívy vzdelávania na Pedagogickej fakulte Prešovskej univerzity v Prešove* (s. 665–670). Prešov: PF PU.

Prídavková, A., & Šimčíková, E. (2015). Rozvoj matematických poznatkov prostredníctvom hudobných aktivít. *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Universitas Catholica Ružomberok*. Ružomberok: Verbum, *XIV*(2), 195–199.

Prídavková, A., & Šimčíková, E. (2016). Edukácia matematiky v slovenskom a cudzom jazyku aplikáciou hudobných komunikačných prostriedkov. In: *EME 2016 Proceedings* (s. 190–194). Olomouc: UPOL.

Purpura, D. J., Schmitt, S. A., & Ganley, C. M. (2017). Foundation of mathematics and literacy: the role of executive functioning components. *Journal of Experimental Psychology, 2017*(153), 15–34.

St Clair-Thompson H., Stevens, R., Hunt, A., & Bolder, E. (2010). Improving children´s working memory and classroom performance. *Educational Psychology, 30*(2), 203–219.

Westwood, P. (2004). *Learning and learning Difficulties. A handbook for teachers*. ACER Press.

Zheng, X., Swanson, H. L., & Marcoulides, G. A. (2011). Working memory components as predictors of children's mathematical word problem solving. *Journal of Experimental Child Psychology*, *110*(4), 481–498.

ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL

Editorial Office: Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

Address: Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Phone: +420 58 563 5709

E-mail: emej@upol.cz

Electronic edition: http://emejournal.upol.cz/issues

2020

Vol. 2, No. 1

ISSN 2694-8133