Elementary Mathematics Education Journal *2020, Vol. 2, No. 1*
ISSN 2694-8133

DIRICHLETŮV PRINCIP V PŘÍPRAVĚ UČITELŮ PRVNÍHO STUPNĚ ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Jaroslav BERÁNEK
Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

Příspěvek obsahuje soubor příkladů řešených s využitím Dirichletova principu. Tento princip bývá do výuky matematiky na školách zařazován jen zřídka, ačkoliv jeho formulace je velmi jednoduchá. Užití Dirichletova principu při řešení úloh a problémů přispívá k rozšíření znalostí a rozvoji myšlení studentů, budoucích učitelů matematiky na 1. stupni základní školy.

Klíčová slova: Dirichletův princip, řešení problémů, vyučování matematice.

DIRICHLET PRINCIPLE IN TEACHING FUTURE ELEMENTARY TEACHERS

Abstract

The article discusses one possibility of enlarging and intensifying of the knowledge of students, future elementary teachers. Dirichlet principle nearly does not appear in teaching of mathematical branches, although its formulating is quite easy. Moreover, it is a tool for solving quite simple tasks which can be used at school teaching (e.g. motivation tasks, problems for development of student`s interest in mathematics, preparation for mathematical competitions, etc.)

Keywords: Dirichlet principle, solving of problems, teaching of mathematics.

1. Úvod

Příspěvek je věnován zkvalitňování matematické přípravy studentů, budoucích učitelů na prvním stupni základní školy, a to jak v rozšiřování jejich odborných znalostí, tak i v získávání jejich většího zájmu o studium matematiky. Problém hledání vhodných témat, která by přispěla ke splnění těchto úkolů, tj. rozšířila znalosti studentů a pomohla jim vytvořit potřebný odborný nadhled, přičemž by nevyžadovala složitý formální matematický aparát a navíc nebyla příliš vzdálená od učiva matematiky na ZŠ, je problémem nesnadným. Jedním takovým tématem se jeví využití Dirichletova principu při řešení úloh. Na základních ani středních školách se studenti s tímto kombinatorickým principem takřka nesetkají, proto může mít jeho zařazení do výuky i výraznou motivační funkci. Přestože se jedná o tvrzení na první pohled velmi jednoduché, můžeme jeho použitím dostat poměrně zajímavé výsledky. Poznamenejme, že Dirichletův princip je existenční; umožňuje tedy dokázat existenci objektů, které nelze reálně zkonstruovat. I to je pro studenty učitelství nový a zajímavý fakt. Úlohy řešitelné pomocí Dirichletova principu se jako úlohy rozšiřující občas vyskytují ve sbírkách úloh, bývají obsaženy v matematických soutěžích (Matematická olympiáda, Matematický klokan, atd.).

Vzhledem k metodickému účelu příspěvku uveďme také několik historických poznámek (viz [3]). Německý matematik Peter Gustav Lejeune Dirichlet žil v letech 1805–1859. Studoval

ISSN 2694-8133

v Berlíně, v Gőttingenu a v Paříži. V letech 1822–1827 působil v Paříži jako domácí učitel, od roku 1827 byl docentem na univerzitě ve Vratislavi, od roku 1829 v Berlíně. Po smrti K. Gausse v roce 1855 přešel na jeho místo do Gőttingenu. Zabýval se teorií čísel, matematickou analýzou a matematickou fyzikou a ve všech těchto oborech dosáhl významných výsledků. Mezi jeho žáky patřili např. Riemann, Dedekind a Kronecker. Princip, nesoucí jeho jméno, uvedl Dirichlet v roce 1834 pod názvem Schubfachprinzip (zásuvkový princip). Pod označením zásuvkový princip je dodnes používán např. v italštině (principio dei cassetti). V angličtině je naproti tomu běžnější označení princip holubníku (pigeonhole principle).

Nyní uvedeme tři formulace Dirichletova principu ([1], [4]). Začneme tou nejjednodušší.

Formulace 1: Umístíme-li m předmětů do n přihrádek ($m, n \in \mathbf{N}$), pak pro $m > n$ existuje alespoň jedna přihrádka obsahující alespoň dva předměty.

Důkaz: Nechť k_i je počet předmětů v i-té přihrádce pro každé $i \in \{1,\dots, n\}$. Nechť pro každý index $i \in \{1,\dots, n\}$ platí $k_i \leq 1$. Pak platí $k_1 + k_2 +\dots+ k_n \leq 1+1+\dots+1= n$, a to je spor s předpokladem, podle kterého je předmětů více než n.

Je vidět, že formulace i důkaz jsou poměrně jednoduché a mohou studentům posloužit jako příklad důkazu sporem. Nyní uvedeme obecnější verzi.

Formulace 2: Umístíme-li $nk+1$ předmětů do n přihrádek ($k, n \in \mathbf{N}$), pak existuje alespoň jedna přihrádka obsahující alespoň $k+1$ předmětů.

Důkaz: Provedeme opět sporem. Nechť m_i je počet předmětů v i - té skupině pro každé $i \in \{1,\dots, n\}$. Připusťme, že v každé skupině je nejvýše k předmětů, tj. $m_i \leq k$ pro každé $i \in \{1,\dots, n\}$. Pak platí $nk+1 = m_1 + m_2 +\dots+ m_n \leq k +\dots+ k = nk$, a to je spor.

Při řešení některých úloh (zejména geometrických) se stává, že pracujeme s reálnými čísly (vyjadřujícími např. délky, obsahy, objemy,…) namísto čísel přirozených, která vyjadřují počty prvků konečných množin. Proto uvedeme ještě třetí formulaci, tentokrát již bez důkazu (prováděl by se opět sporem).

Formulace 3: Je-li součet n reálných čísel $x_1, x_2, \dots x_n$ roven číslu S, pak pro alespoň jedno číslo $i \in \{1,\dots, n\}$ platí nerovnost $x_i \leq \frac{S}{n}$ a pro alespoň jedno $j \in \{1,\dots, n\}$ platí $x_j \geq \frac{S}{n}$.

Další zajímavou otázkou, která může studenty v této souvislosti napadnout, je počet všech možných rozmístění daných n předmětů do k přihrádek (viz [3]). Tento problém je ale obecně podstatně složitější a pro studenty učitelství matematiky pro 1. stupeň ZŠ je jeho zařazení již diskutabilní (předměty i přihrádky mohou a nemusí být rozlišitelné). Uvedeme pouze nejjednodušší případ, kdy jsou předměty i přihrádky rozlišitelné. V tom případě je počet možných rozmístění roven k^n (jedná se o variace s opakováním).

Nyní uvedeme sérii příkladů, které jsou pomocí daného principu jednoduše řešitelné. Zařazeny jsou příklady elementární i příklady vyžadující předchozí matematické znalosti i jistý důvtip.

2. Příklady

Příklad 1: (Viz [4]) V podniku pracuje 400 osob. Dokažte, že alespoň dvě osoby mají narozeniny ve stejný den v roce.

Řešení: Počítejme i s přestupnými roky. Dnů pro možnou oslavu narozenin v roce je tedy 366. Zavedeme 366 přihrádek, do nichž budeme zařazovat pracovníky podle data narození. Protože počet pracovníků je větší než počet přihrádek, musí existovat přihrádka obsahující alespoň dvě osoby. Tito lidé mají narozeniny ve stejný den v roce.

Poznámka 1: Poznamenejme ještě, že situace, kdy mezi 365 osobami má narozeniny od 1. 1. do 31. 12. každý den v roce některý z nich, je z hlediska pravděpodobnosti jevem s velmi malou pravděpodobností. S tím souvisí tzv. narozeninový paradox. Lze spočítat, že pravděpodobnost, že dvě osoby z nějaké skupiny mají narozeniny ve stejný den v roce, bude větší než 0,5 již při 23 osobách. Pro informaci uvedeme i tento výpočet.

Příklad 1a: Sešla se skupina n osob, $n \geq 2$. Vypočtěte (v závislosti na n) pravděpodobnost, že alespoň dva z nich budou mít narozeniny stejný den v roce. (Předpokládejme, že rok má 365 dní, tj. nebereme v úvahu přestupné roky).

Řešení: Určeme pravděpodobnost komplementárního (doplňkového) jevu A, že žádné dvě osoby z n zúčastněných nebudou mít narozeniny týž den v roce. Vypočteme nejprve, kolik je všech možných případů pro data narození těchto n osob. Pro den narození první osoby je 365 možností, pro dvě osoby je tedy 365^2 možností, pro n osob 365^n možností.

Vypočtěme dále, kolik z těchto případů je příznivých jevu A. První osoba se může narodit kterýkoli den v roce. Je-li ale již známo její datum narození a nemá-li druhá osoba mít narozeniny týž den, „zbývá“ pro její datum narození již jen $365 - 1 = 364$ možností. Nemá-li datum narození žádných dvou osob z n zúčastněných připadnout na stejný den v roce, existuje $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$ příznivých případů. Proto pravděpodobnost jevu A, že žádné dvě osoby z n zúčastněných nebudou mít narozeniny týž den v roce, je určena vztahem

$$P(A) = \frac{365 \cdot (365-1) \cdot (365-2) \cdot \cdots \cdot (365-n+1)}{365^n}.$$

Nejmenší hodnota n, pro kterou platí $P(A) < 0{,}5$, je číslo 23. Pro $n = 23$ je $P(A) = 0{,}49270$, tj. pravděpodobnost jevu, že mezi 23 osobami nemají žádné dvě narozeniny týž den v roce, je menší než 0,5. Je tedy pravděpodobnější, že nastane jev komplementární, tj. že aspoň dva lidé z této skupiny slaví narozeniny týž den v roce. Podrobnější informace o narozeninovém paradoxu lze nalézt na elektronické adrese https://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem.

Příklad 2: (Viz [4]) Konference se zúčastnilo 40 delegátů ze 13 zemí. Dokažte, že alespoň z jedné země přijela delegace, která měla alespoň čtyři členy.

Řešení: Rozdělíme delegáty do přihrádek podle toho, z jaké země pocházejí. Přihrádek bude proto 13. Delegátů je ale 40, což je více než $3 \cdot 13 = 39$. Proto existuje přihrádka obsahující alespoň čtyři členy, tj. alespoň jedna země vyslala nejméně čtyřčlennou delegaci.

Někdy se Dirichletův princip využívá i v „opačném“ myšlenkovém postupu:

Příklad 3: V krabici je 5 kuliček bílých, 5 červených a 5 modrých. Kolik kuliček musíme potmě vybrat z krabice, abychom vybrali určitě dvě kuličky stejné barvy?

Řešení: Máme kuličky tří barev, je tedy možno po vytažení rozmístit vytažené kuličky do tří přihrádek podle barvy. Chceme-li mít zaručeno, že v jedné přihrádce budou alespoň dvě kuličky, musíme vytáhnout víc kuliček, než je přihrádek. Stačí tedy vybrat náhodně 4 kuličky.

Příklad 4: (Viz [4]) Konference se zúčastnilo 70 delegátů, kteří hovoří 11 různými jazyky. Jedním jazykem hovoří nejvýše 15 delegátů. Organizační výbor rozhodl, že za oficiální bude považován takový jazyk, kterým hovoří nejméně 5 delegátů. Dokažte, že na konferenci byly alespoň 3 oficiální jazyky.

Řešení: Řešíme trojím opakováním Dirichletova principu (využijeme formulace 2). Jestliže 70 delegátů hovoří 11 jazyky, pak určitě existuje jazyk, kterým hovoří alespoň 7 osob (protože $11 \cdot 6 = 66 < 70$). Je to tedy jazyk oficiální, označme ho A. Podrobněji: kdyby každým z 11 jazyků hovořilo právě 6 delegátů, byl by součin $11 \cdot 6$ roven 66; delegátů je ale 70, což je více.

Jazykem A hovoří podle zadání úlohy nejvýše 15 osob, tedy zbylými 10 jazyky hovoří alespoň 55 delegátů. Tedy musí existovat další jazyk B, kterým hovoří alespoň 6 delegátů (protože podle stejné úvahy $10 \cdot 5 = 50 < 55$), je tedy druhým oficiálním. Také jazykem B hovoří nejvýše 15 osob, proto zbylými 9 jazyky hovoří alespoň 40 delegátů. Třetím použitím stejné úvahy ($9 \cdot 4 = 36 < 40$) můžeme ze zbylých 9 jazyků vybrat třetí oficiální. Poznamenejme, že existenci čtyř oficiálních jazyků již není možno dokázat. Zbylými 8 jazyky hovoří alespoň 25 delegátů; může nastat situace, kdy 7 jazyky z nich hovoří 3 delegáti a osmým jazykem hovoří 4 delegáti. Čtvrtý oficiální jazyk tedy může a nemusí existovat.

Příklad 5: (Viz [4]) Dokažte, že v každém trojúhelníku je alespoň jeden vnitřní úhel větší nebo roven 60°.

Řešení: Využijeme formulace 3. Pro vnitřní úhly α, β, γ v libovolném trojúhelníku platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Proto musí existovat alespoň jeden vnitřní úhel, jehož velikost je větší nebo rovna $\frac{180}{3} = 60°$.

Příklad 6: (Upraven podle [4]) Je dáno 10 přirozených čísel. Dokažte, že z nich můžeme vybrat dvě tak, že jejich rozdíl je dělitelný číslem 9.

Řešení: Poznamenejme, že čísla jsou zvolena zcela náhodně. Mohou být navzájem různá nebo se některá z nich mohou také rovnat. Rozdělíme daná čísla do zbytkových tříd podle zbytků při dělení číslem 9. Těchto zbytkových tříd je 9 (zbytky 0 až 8). Protože ale čísel je 10, musí ležet v jedné třídě alespoň dvě čísla. Ta dávají po dělení 9 týž zbytek, jejich rozdíl je tedy dělitelný 9. Poznamenejme, že jsme dokázali pouze existenci takových dvou čísel. Určit, která dvě čísla splňují danou podmínku, může být dosti pracné.

Poznámka 2: Příklad 6 lze zobecnit takto: Je dáno m přirozených čísel. Dokažte, že z nich můžeme vybrat dvě tak, že jejich rozdíl je dělitelný číslem $m-1$. Důkaz tohoto zobecněného příkladu je zcela analogický důkazu příkladu 6. Při dělení číslem $m-1$ existuje celkem $m-1$ zbytkových tříd (zbytky 0 až $m-2$). Všech čísel je ale m, tzn. dvě z nich musí ležet ve stejné zbytkové třídě. Při zařazení této úlohy na 1. stupni ZŠ lze tedy volit např. $m = 4$, kdy dvě čísla ze čtyř zadaných, jejichž rozdíl je dělitelný třemi, lze nalézt v krátkém čase i experimentem. Např. zvolíme čísla 13, 23, 37, 60. Pak třemi je dělitelný rozdíl čísel $37 - 13$.

Příklad 7: (Viz [7]) Je dáno šest přirozených čísel, jejichž součin není násobek 11. Dokažte, že součet nebo rozdíl některých dvou z nich naopak dělitelný jedenácti je.

Řešení: Protože součin daných čísel není dělitelný jedenácti, není ani jedno z nich dělitelné jedenácti. Existuje celkem deset nenulových zbytků při dělení číslem 11. Tyto zbytky rozdělíme do pěti množin: $\{1, 10\}, \{2, 9\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}$. Nyní rozdělíme zadaných šest čísel do pěti množin podle toho, do které z výše uvedených pěti množin patří zbytek při jejich dělení 11. Protože zadaných čísel je šest, určitě alespoň dvě z nich musí patřit do stejné množiny. Zbytky při dělení těchto dvou čísel jedenácti jsou pak ale prvky množiny $\{x, 11-x\}$, $x = 1, \ldots, 5$. Součet nebo rozdíl takových dvou čísel musí být dělitelný jedenácti.

Příklad 8: (Viz [1]) Číselná tabulka o třech řádcích a třech sloupcích nechť je libovolně vyplněna čísly 0, 1, 2. Dokažte, že pro jakýkoliv způsob rozmístění těchto čísel v tabulce jsou vždy dva z osmi možných součtů trojic těchto čísel (tři sloupce, tři řádky a dvě hlavní diagonály) stejné.

Řešení: Uvedeme příklad (viz tabulka 1).

Tabulka 1. Možné vyplnění tabulky

2	0	1
2	1	2
0	1	0

Součty jsou 3, 5, 1, 4, 2, 3, 2, 3, tj. existují dvojice stejných součtů. Z daných tří čísel zřejmě nelze dostat jiné součty než 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, což je 7 možností. Výsledných součtů je ale 8 (tři řádky, tři sloupce a dvě hlavní diagonály), dva tedy nutně musí být stejné. Poznamenejme, že i problém nalézt teoreticky možné vyplnění tabulky tak, aby se mezi 8 součty vyskytla všechna čísla z množiny {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} a pouze jediné z nich se jednou opakovalo, je velmi nesnadný.

Příklad 9: (Viz [4]) Nechť je dána množina obsahující 10 různých přirozených čísel ležících mezi 1 a 99 (včetně). Dokažte, že existují dvě disjunktní neprázdné podmnožiny této množiny se stejným součtem svých prvků.

Řešení: Z dané množiny deseti čísel můžeme vytvořit $2^{10} - 1 = 1023$ jejích různých neprázdných podmnožin. Každá z těchto množin má součet svých prvků menší než 1000. Proto podle Dirichletova principu musí mít dvě podmnožiny, označme je A, B, stejný součet svých prvků. Nyní stačí vzít množiny $X = A - (A \cap B)$, $Y = B - (A \cap B)$. Tyto množiny X, Y jsou disjunktní. Jsou také neprázdné, neboť v opačném případě by platilo $A \subset B$ nebo $B \subset A$, což nelze, neboť součet prvků množin A, B je stejný a jejich prvky jsou kladná čísla.

Příklad 10: (Viz [4]) Nechť je dán rozklad množiny M = {1, 2, 3,…, 9} na tři třídy. Dokažte, že součin všech čísel v alespoň jedné ze tříd je větší než 71.

Řešení: Využijeme formulace Dirichletova principu 3. Součin všech přirozených čísel od 1 do 9 (tzn. 9!) je roven 362 880. Kdyby v každé ze tří tříd rozkladu byl součin čísel menší nebo roven 71, pak by součin všech devíti čísel nepřevysoval $7^{13} = 357\,911$, což je spor.

Příklad 11: (Viz [4]) V zahradě tvaru obdélníka o rozměrech 20 m × 15 m chceme vysázet stromy. Vzdálenost mezi libovolnými dvěma stromy má být větší než 5 m. Dokažte, že stromů lze vysadit nejvýše 25.

Řešení: Připusťme, že v zahradě bude více než 25 stromů. Rozdělíme zahradu na obdélníky o rozměrech 4 m × 3 m. Takových obdélníků je právě 25. Proto musí v jednom z nich být alespoň dva stromy, jejich vzdálenost je však menší než 5m (velikost úhlopříčky každého z malých obdélníků je 5 m).

Příklad 12: (Viz [3]) Na večírku je přítomných n osob. Dokažte, že dva účastníci večírku znají stejný počet lidí (relace „znát“ je symetrická, tzn. zná-li jedna osoba druhou, zná i druhá první).

Řešení: Každý člověk může znát od 0 do $n - 1$ osob. Podle toho všechny přítomné rozdělíme do přihrádek. Je tedy n přihrádek i n osob. Dirichletův princip nelze přímo použít, využijeme však podobnou úvahu. Připusťme, že v každé přihrádce je jediný člověk. To ale není možné, neboť by existovala osoba, která nezná nikoho a současně osoba, která zná všechny. Proto musí být v jedné přihrádce alespoň dva lidé, kteří tedy znají stejný počet účastníků.

Příklad 13: (Viz [1]) Na klasické šachovnici 8 × 8 stojí 33 věží. Dokažte, že z nich lze vybrat 5, které se vzájemně neohrožují.

Řešení: Připomeňme, že dvě věže se neohrožují, stojí-li v různých řadách a zároveň v různých sloupcích. Nyní rozdělíme 64 polí šachovnice na 8 skupin podle následující tabulky 2 (pole ve stejné skupině mají stejná čísla). Jedná se o užití „cyklické záměny“ a rozdělení polí postupuje „po úhlopříčkách“.

Tabulka 2. Rozdělení šachovnice

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Z tabulky je vidět, že v každé z osmi skupin se umístěné věže navzájem neohrožují. Stačí dokázat, že alespoň jedna ze skupin obsahuje alespoň 5 věží. To však je snadné podle Dirichletova principu, neboť skupin je 8 a věží je 33 (tj. $8 \cdot 4 + 1$). Jedna ze skupin tedy musí obsahovat alespoň pět věží, které se vzájemně neohrožují.

Příklad 14: (Viz [9]) V krychli s hranou délky 19 cm je dáno 1332 bodů. Dokažte, že mezi nimi existují alespoň dva body, jejichž vzdálenost je menší než 3 cm.

Řešení: Každou stranu krychle rozdělíme na jedenáct stejných dílů. Pomocí těchto dělení rozdělíme krychli na $11^3 = 1331$ shodných krychliček, z nichž každá bude mít délku hrany rovnou $\frac{19}{11} \doteq 1{,}72$ cm a velikost tělesové úhlopříčky v centimetrech $\frac{19}{11} \cdot \sqrt{3} \doteq 2{,}9917 < 3$. Podle Dirichletova principu existuje krychlička obsahující alespoň dva body; jejich vzdálenost tedy bude menší než 3 cm.

Příklad 15: (Viz [9]) V prostoru je dáno 9 bodů s celočíselnými souřadnicemi. Dokažte, že z nich lze vybrat alespoň dva body tak, že střed jimi určené úsečky má celočíselné souřadnice.

Řešení: Platí, že součet dvou sudých čísel i součet dvou lichých čísel je sudé číslo. Souřadnice bodů v prostoru je podle zadání uspořádaná trojice celých čísel, která mohou být sudá (S) nebo lichá (L). Podle parity existuje pro souřadnice osm možností: [L, L, L], [L, L, S], [L, S, L], [S, L, L], [L, S, S], [S, L, S], [S, S, L], [S, S, S]. Bodů je ale 9, tzn. dva z nich budou mít stejnou paritu všech tří souřadnic. Střed úsečky ohraničené těmito dvěma krajními body bude mít rovněž celočíselné souřadnice (souřadnice středu úsečky jsou určeny aritmetickými průměry prvních a druhých souřadnic krajních bodů této úsečky).

Příklad 16: (Viz [9]) Dokažte, že z 50 libovolně zvolených navzájem různých prvočísel lze vždy vybrat 13 prvočísel tak, že rozdíl každých dvou je dělitelný pěti.

Řešení: Každé prvočíslo má při dělení pěti jeden z následujících tvarů: $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$. První z tvarů má pouze jediné prvočíslo 5. Rozdíl čísla 5 a jakéhokoliv jiného prvočísla nemůže být dělitelný pěti. Je-li tedy mezi zvolenými prvočísly číslo 5, vypustíme ho a budeme pracovat pouze se zbývajícími 49 prvočísly. Všechna prvočísla (49 nebo 50) rozdělíme do zbytkových tříd C_1, C_2, C_3, C_4. Prvočísel je alespoň $49 = 12 \cdot 4 + 1$. V jedné ze čtyř nenulových zbytkových tříd tedy bude 13 prvočísel. Všechna tato prvočísla dávají při dělení pěti stejný zbytek a proto je rozdíl kterýchkoliv dvou z nich dělitelný pěti.

ISSN 2694-8133

3. Závěr

Z předloženého souboru úloh je patrné, že úlohy řešitelné pomocí Dirichletova principu jsou poměrně jednoduché a studentům přístupné, navíc svými tématy vhodně doplňují a rozvíjejí jejich předchozí znalosti. Proto lze zařazení tohoto tématu do výuky, zejména v seminářích v závěrečných ročnících, plně doporučit. Další informace o Dirichletově pricipu lze nalézt v publikacích [2], [3], [5], [6] a [8].

Literatura

[1] Beránek, J. (2014). Dirichletův princip ve školské matematice. In: *8. didaktická konferencia, Zborník príspevkov* (s. 50-57). DTI Dubnica nad Váhom.

[2] Bukovský L & Kluvánek, I. (1970). *Dirichletov princíp.* Praha: Mladá fronta.

[3] Fuchs, E. (2011). *Diskrétní matematika pro učitele.* Brno: Masarykova univerzita.

[4] Hanáková, R. (2001). *Dirichletův princip*. Diplomová práce. Brno: Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta.

[5] Herman, J. & Šimša, J. (1987-1988). O jednom užití Dirichletova principu v teorii čísel. *Rozhledy matematicko-fyzikální 66,* s. 353-356.

[6] Herman, J, & Kučera, R, & Šimša, J. (2011). *Metody řešení matematických úloh I*. Brno: Masarykova univerzita.

[7] Kučera T. (2013). *Dirichletův princip.* Závěrečná práce SOČ. Brno: Gymnázium, třída kapitána Jaroše 14.

[8] Larson, L C. (1990). *Metódy riešenia matematických problémov.* Bratislava: Alfa.

[9] Volfová, M. (2010). *Úlohy využívající Dirichletův princip*. Dostupné z http://black-hole.cz/cental/wp-content/uploads/2010/03/Dirichletuv_princip.pdf.