KOGNITIVNÍ FENOMÉNY DOPROVÁZEJÍCÍ PROCES VYTVÁŘENÍ PŘEDSTAVY PŘIROZENÉHO ČÍSLA V ROLI POČTU

Šárka PĚCHOUČKOVÁ, Jaroslav HORA
Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická (Česká republika)
pechouck@kmt.zcu.cz, horajar@kmt.zcu.cz

Abstrakt

Ve školním roce 2014/15 byl v 1. ročníku základní školy realizován laboratorní experiment, který se stejným vzorkem žáků pokračoval ve školním roce 2015/16 ve 2. ročníku a jehož cílem bylo popsat některé kognitivní fenomény doprovázející enaktivní reprezentaci vybraných přirozených čísel prostřednictvím Cuisenairových hranolků. Byly zaznamenány tyto kognitivní fenomény: kooperace vizuální a haptické percepce, kooperace enaktivní a ikonické reprezentace, kooperace enaktivní a verbální a auditivní reprezentace, interference mezi kvalitativním a kvantitativním chápáním čísla, sémanticky chybné vnímání čísla, podpora enaktivní reprezentace haptickou percepcí a podpora enaktivní reprezentace vizuální percepcí. Experimentu se v každém ročníku zúčastnilo 100 žáků.

Klíčová slova: enaktivní reprezentace, Cuisenairovy hranolky, kognitivní fenomény

COGNITIVE PHENOMENA ACCOMPANYING THE PROCESS OF NATURAL NUMBER CONCEPTION FORMATION IN NUMBER ROLL

Abstract

A laboratory experiment was conducted in first grade in the academic year 2014-15 and was continued in 2015-16 with the same sample of pupils in their second grade. Its aim was to describe some cognitive phenomena that accompany the enactive representation of selected natural numbers with Cuisenaire rods. The following cognitive phenomena were registered: cooperation of visual and haptic perception, cooperation of enactive and iconic representation, cooperation of enactive representation with verbal and auditory representation, interference of quantitative and qualitative understanding of number, semantically incorrect perception of number, enhancement of enactive representation by haptic representation and enhancement of enactive representation by visual representation. The experiment was attended by 100 pupils each year.

Keywords: enactive representation, Cuisenaire rods, cognitive phenomena

1. Úvod

Vytváření představy přirozeného čísla je důležitý proces, který je základem pro další práci žáka s přirozeným číslem, tedy pro porovnávání přirozených čísel a početní operace s přirozenými čísly. Proto je třeba pojmotvornému procesu přirozeného čísla věnovat ve školách náležitou pozornost. Tento proces doprovází řada kognitivních fenoménů. Některé z nich bychom chtěli popsat v následujícím textu.

Postupně jednotlivé fenomény představíme nejdříve obecně (tedy vymezíme klíčové pojmy a uvedeme východiska výzkumu) a poté je budeme demonstrovat na konkrétních ukázkách v rámci laboratorního experimentu, který proběhl v 1. a 2. ročníku základní školy.

2. Experiment na základní škole

Ve školním roce 2014/2015 proběhl v prvním ročníku základní školy laboratorní experiment, který v následujícím školním roce pokračoval se stejným vzorkem žáků ve druhém ročníku. Jeho cílem bylo popsat kognitivní fenomény doprovázející enaktivní reprezentaci vybraných přirozených čísel prostřednictvím Cuisenairových hranolků.

V 1. ročníku žáci během školního roku postupně řešili 5 úkolů a reprezentovali čísla 4, 5, 6, 9 a 11. Ve 2. ročníku to byly 3 úkoly a čísla 7, 10, 12, 19, 27, 34, 46 a 55. Úkoly byly motivovány nákupem zvláštních peněz, které představovaly Cuisenairovy hranolky, aby byl odstraněn vliv jemné motoriky žáka na jeho manipulativní činnost. V prvních třech úkolech prvního ročníku byly použity modifikované hranolky (Obr. 1), které se od sebe lišily délkou,

Obrázek 1. Modifikované Cuisenairovy hranolky (zdroj vlastní)

ale nebyly barevné, aby byla odstraněna interference barev. V dalších úkolech, kde již byla pomůcka žákům známá a vliv barvy na volbu hranolku nebyl zásadní, žáci pracovali s originálními Cuisenairovými hranolky (Obr. 2).

Obrázek 2. Cuisenairovy hranolky (zdroj vlastní)

Žák vždy řešil úkoly samostatně a odděleně od ostatních dětí na pracovním stole, na kterém měl k dispozici hromádky Cuisenairových hranolků. Některé hromádky byly odkryté, jiné se postupně odkrývaly v průběhu řešení a to tak, aby žák musel při reprezentaci daného čísla použít alespoň dva hranolky. U každé hromádky byla karta s číslem, jež označovalo, jaké číslo hranolek reprezentuje. Žák dostal velkou kartu, která představovala cenu zboží, a úkolem bylo tuto cenu zaplatit (Obr. 3) (Pěchoučková 2018).

Obrázek 3. Připravené pomůcky v 1. ročníku (zdroj vlastní)

V průběhu experimentu byly zaznamenány tyto kognitivní fenomény:

- kooperace enaktivní a ikonické reprezentace,
- kooperace enaktivní a verbální a auditivní reprezentace,
- podpora enaktivní reprezentace vizuální percepcí,
- podpora enaktivní reprezentace haptickou percepcí,
- kooperace haptické a vizuální percepce,
- interference mezi kvalitativním a kvantitativním vnímáním čísla,
- sémanticky chybné vnímání čísla.

V následujícím textu jednotlivé fenomény popíšeme.

2.1. Kooperace enaktivní a ikonické reprezentace

Reprezentaci chápeme „jako základní prvek kognitivního vztahu člověka ke světu“ (Kolláriková, Pupala 2001, s. 188).

Psychologický slovník (Hartl, Hartlová 2009, s. 506) vymezuje reprezentaci dvěma způsoby:

1. „věc sama, její představa či symbol věc zastupující“
2. „kognitivisty chápána i jako přímý podnět, zpracování tohoto podnětu ve vědomí, jeho kódování, jeho obraz, představa, abstraktní idea, příp. zpřítomnění minulých prožitků.“

Americký psycholog Jerome Bruner rozlišuje tři typy reprezentace neboli tři úrovně procesu poznání (Ruisel 2004):

- enaktivní reprezentace,
- ikonické reprezentace,
- symbolické reprezentace.

Enaktivní reprezentace souvisí s přímou činností a fyzickou zkušeností dítěte. Příkladem enaktivní reprezentace přirozeného čísla 5 může být například postavení komínu z 5 kostek, pět tlesknutí rukama, výběr pěti fazolí ze sáčku nebo pět dřepů dítěte. Kuřina (2013) řadí mezi enaktivní reprezentaci čísel počítání na prstech, počítání na klasickém počitadle, řádovém počitadle nebo na linách. Vhodnou pomůckou pro enaktivní reprezentaci přirozeného čísla jsou podle našeho názoru také Cuisenairovy hranolky. Jejich autorem je Belgičan George Cuisenaire, který tvrdil, že noty v hudebních stupnicích a číselné relace si navzájem odpovídají. Sestavil tedy „klávesnici pro matematiku“, sadu pečlivě navržených hranolků v odstupňovaných délkách a vybraných barvách. Cuisenairovy hranolky mají tvar pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou o velikosti 1 cm. Délka hranolků se mění od 1 cm do 10 cm. Hranolky stejné délky mají stejnou barvu a reprezentují stejné přirozené číslo (Obr. 2, Tab. 1).

Tabulka 1. Cuisenairovy hranolky

délka hranolku	**barva hranolku**	**přirozené číslo, které reprezentuje**	**označení v dalším textu**
1 cm	bílá	1	jednotkový hranolek
2 cm	červená	2	dvojkový hranolek
3 cm	světle zelená	3	trojkový hranolek
4 cm	fialová	4	čtyřkový hranolek
5 cm	žlutá	5	pětkový hranolek
6 cm	tmavě zelená	6	šestkový hranolek
7 cm	černá	7	sedmičkový hranolek
8 cm	hnědá	8	osmičkový hranolek
9 cm	modrá	9	devítkový hranolek
10 cm	oranžová	10	desítkový hranolek

Ikonické reprezentace představují užívání různých zástupných modelů reality v podobě obrazů, schémat a představ, které realitu připomínají (zastupují). V souvislosti s ikonickými modely hovoří Kuřina (2013) o číselných obrazcích a Cuisenairových proužcích. S číselnými obrazci se v současné době setkáváme na hracích kostkách a kamenech domina. Cuisenairovy proužky (tedy grafický 2D model) spojují podle jeho názoru kardinální pohled na přirozené číslo (z kolika čtverců se proužek skládá) s ordinálním a geometrickým pohledem (propedeutika měření délek). My Cuisenairovy proužky (grafický 2D znak) také považujeme za ikonickou reprezentaci přirozeného čísla, Cuisenairovy hranolky (model 3D) však řadíme mezi enaktivní reprezentanty

Symbolické reprezentace popisují jevy a vztahy v jistém jazyce, konkrétně tedy například pomocí matematického symbolického jazyka (matematických znaků). Symbolickou reprezentací čísla pět je číslice 5. Užití symbolických reprezentací znamená odklon od bezprostřední fyzické reality, tedy se jedná o reprezentace prostřednictvím abstraktních pojmů a kategorií.

V případě kooperace enaktivní a ikonické reprezentace došlo při experimentu k tomu, že žák při enaktivní reprezentaci daného přirozeného čísla počítal po jedné, tedy použil jednotkové hranolky, které umístil do číselné figury, jaká je na hrací kostce.

Ilustrace 1 - Anna

Anna odkryje kartu s číslem 4, drží ji v levé ruce. Pravou rukou se natahuje po trojkovém hranolku. Pak ruku přemístí ke hromádce s jednotkovými hranolky. Odpočítá po jednom čtyři jednotkové hranolky. Položí je na kartu s číslem a uspořádá je do číselné figury, jaká je na hrací kostce. Pomáhá si přitom levou rukou (6 s).

Tento fenomén se objevil v 7 % případů.

2.2. Kooperace enaktivní a verbální a auditivní reprezentace

M. Sedláková (2004) hovoří o reprezentaci externí a interní (mentální, kognitivní). Za externí reprezentaci považuje reprezentaci obrazovou a verbální. Obrazová reprezentace zprostředkovaná zobrazením nebo kresbou je konkrétnější, protože je asociovaná pouze s vizuální modalitou informace. Verbální (jazyková) reprezentace zprostředkovaná řečí je abstraktní a nenese přímý vztah k modalitě. Reprezentace interní se člení na reprezentaci symbolickou a reprezentaci distributivní.

Při vytváření pojmu čísla pracuje dítě s různými názornými reprezentanty, které usnadňují vytváření mentálních obrazů, tedy i interních reprezentací čísel (Hejný, Kuřina 2001). Jedním z typů reprezentace je reprezentace auditivní. Začátek písně „Jedna, dva, tři, čtyři, pět“ je auditivní reprezentací čísla 5. Mentální reprezentace mohou být nejrůznějšího druhu, od separovaných modelů přes modely generické (Gray, Tall 1991) až k pojmům.

Některé děti při provádění enaktivní reprezentace čísla počítaly nahlas. Tento fenomén jsme označili jako **verbální a auditivní reprezentaci**. Spojili jsme tak termín „verbální“ psycholožky Sedlákové s termínem „auditivní“ didaktiků Hejného a Kuřiny, neboť se domníváme, že oba typy reprezentace spolu úzce souvisejí, tak jako spolu souvisejí řeč a sluch. Jeden typ reprezentace je doplněn druhým typem reprezentace. Důležitou roli zde hraje akustický percepční kanál.

Za verbální a auditivní reprezentaci čísla jsme považovali následující verbální projevy:

- při reprezentaci čísla dítě počítá nahlas nebo potichu, např. při reprezentaci čísla čtyři počítá: „Jedna, dva, tři, čtyři.“
- při reprezentaci čísla řekne dítě nahlas nebo potichu příslušný spoj, např. při reprezentaci čísla 4 řekne: „Tři plus (resp. a) jedna rovná se (resp. jsou) čtyři.“
- pokud dítě řekne nahlas nebo potichu „Čtyři“, nepovažujeme toto za verbální a auditivní reprezentaci čísla, ale pouze za přečtení symbolického zápisu čísla (Pěchoučková 2018).

Ilustrace 2 – Bohumil

Otočí kartu s číslem 11. Řekne: „Jedenáct.“ Pravou rukou vezme jeden šestkový hranolek, nese ho ke kartě, řekne: „To je…“, hranolek položí na kartu, řekne: „Šest.“ (5 s). Řekne: „A pět“, pravou rukou vezme jeden pětkový hranolek a položí na kartu (2 s).

Tento fenomén jsme zaznamenali ve 21 % případů.

2.3. Podpora enaktivní reprezentace vizuální percepcí

Percepcí rozumíme smyslové vnímání (Hartl, Hartlová 2009), tedy odrážení reality prostřednictvím smyslových orgánů. Za **vizuální percepci čísla** je označováno zrakové vnímání čísla, tedy konkrétně pozorování předmětů před začátkem vlastní reprezentace daného čísla. V případě manipulace s Cuisenairovými hranolky žák tedy prováděl vizuální percepci např. čísla 3, pokud po určitou dobu pozoroval hromádku trojkových hranolků. Proto byl při experimentu měřen a zaznamenáván čas (Pěchoučková 2018).

Ilustrace 3 – Cecílie

Otočí kartu s číslem 9. Sleduje hromádky zprava doleva (10 s). Pravou rukou vezme jeden čtyřkový hranolek a položí na kartu (4 s). Pravou rukou vezme jeden pětkový hranolek a položí na kartu (2 s).

Celkově jsme podporu enaktivní reprezentace vizuální percepcí zaznamenali ve 33 % případů. Vyšší výskyt byl u čísla 4, čísla 5 a čísla 6 zaznamenán v 1. ročníku při řešení prvních dvou úkolů. Mohlo to souviset se snahou o bližší seznámení s Cuisenairovými hranolky. V dalších úkolech využívali žáci vizuálního kanálu především k volbě vhodné procedury operace sčítání.

2.4. Podpora enaktivní reprezentace haptickou percepcí

Za haptickou percepci považujeme dotekovou percepci čísla neboli taktilní dokumentaci čísla, kdy se žák před, během nebo po ukončení procesu reprezentace dotýká prsty či celou rukou předmětů, aniž by předměty přemisťoval. Při našem experimentu se tedy žák uvedeným způsobem dotýkal Cuisenairových hranolků (Pěchoučková 2018).

Ilustrace 4 – David

Otočí kartu s číslem 11. Pravou rukou se dotkne jednoho šestkového hranolku. Posune ho z hromádky, pustí ho (5 s). Vezme ho znovu do ruky. Ruku s hranolkem přesune k hromádce s pětkovými hranolky, vezme jeden pětkový hranolek a oba hranolky současně položí na kartu (3 s).

V průběhu experimentu byla podpora enaktivní reprezentace haptickou percepcí zaznamenána ve 12 % případů. Nejvyšší výskyt jsme zaznamenali na začátku experimentu, tedy při řešení prvního úkolu při reprezentaci čísla 4, a poté na konci experimentu v červnu při reprezentaci čísla 9. Domníváme se, že na začátku experimentu haptický kanál žáci ve velké míře využívali pro bližší seznámení s Cuisenairovými hranolky. Na konci experimentu souvisí používání haptického kanálu s tím, že žáci měli vytvořené pouze separované modely čísla 9.

2.5. Kooperace haptické a vizuální percepce

Při řešení jednotlivých úkolů se objevovalo i to, že žák určitou dobu pozoroval Cuisenairovy hranolky, prováděl tedy jejich vizuální percepci, a rovněž prováděl dotekovou percepci některých hranolků.

Ilustrace 5 - Evžen

Otočí kartu s číslem 9. Pravou rukou vezme jeden pětkový hranolek a položí na kartu (3 s). Na pravé ruce postupně po jednom odpočítá a zvedne pět prstů. Pravou rukou vezme z karty jeden pětkový hranolek a vrátí ho na hromádku (5 s). Levou ruku natáhne k hromádce

s jednotkovými hranolky, dotkne se jednoho, ruku zvedne a přesune k hromádce s dvojkovými hranolky. Vezme jeden dvojkový hranolek a položí na kartu (5 s). Dívá se na oba hranolky na kartě (6 s). Pravou rukou vezme z karty jeden dvojkový hranolek a vrátí ho zpět na hromádku (2 s). Pravou rukou dvakrát ťukne na pětkový hranolek na kartě. Pravou ruku natáhne k hromádce s dvojkovými hranolky, ruku přemístí od této hromádky k hromádce se čtyřkovými hranolky, vezme jeden čtyřkový hranolek a položí na kartu (5 s). Podívá se na hromádku se čtyřkovými hranolky, pak na hromádku s pětkovými hranolky (7 s). Pravou ruku natáhne k hromádce s pětkovými hranolky, ruku vrátí zpět (3 s).

Tento fenomén byl pozorován ve 23 % případů.

2.6. Interference mezi kvalitativním a kvantitativním vnímáním čísla

Tento fenomén budeme demonstrovat na ilustraci 6, kterou doplníme ještě slovním komentářem.

Ilustrace 6 – Filoména

Filoména otočí kartu s číslem 4. Těká očima zleva doprava a zpět po hromádkách s hranolky a po kartě s číslem. Levou rukou vezme jeden trojkový hranolek a položí na kartu (4 s). Otočí kartu s číslem 6. Znovu těká očima zleva doprava po hromádkách s hranolky (6 s). Sáhne po dvojkovém hranolku levou rukou a pravou natahuje ke hromádce s trojkovými hranolky. Zarazí se. Prohlíží si trojkový hranolek položený na kartě s číslem 4. Pravou rukou ho uchopí a vrátí zpět na hromádku (8 s). Do levé ruky vezme dva dvojkové hranolky a položí na kartu s číslem 4 (2 s). Levou ruku vrátí k hromádce s dvojkovými hranolky, vezme dva, než však s nimi zvedne ruku, opět pohlédne na kartu s číslem 4 (4 s). Dva dvojkové hranolky ponechá na místě, levou ruku přemístí k hromádce jednotkových hranolků. Odpočítá po jednom šest těchto hranolků a dá je na kartu s číslem 6 (7 s).

Komentář: Při reprezentaci čísla 4 došlo k vizuální percepci čísla 1, čísla 2 a čísla 3. Filoména nepřemýšlela nad hodnotou hranolku. Zvolila takový hranolek, který „se vejde“ do čísla 4, hranolek trojkový. Číslo vnímala kvalitativně, čas potřebný k vyjádření této kvality byl 4 s. Během reprezentace čísla 6 a při vizuální percepci čísla 3 došlo ke strukturaci. Filoména začala číslo vnímat kvantitativně, na uvědomění si kvantity potřebovala 11 s.

Interference mezi kvalitativním a kvantitativním vnímáním čísla se objevila ve 4 % případů. U některých žáků však nedošlo ke strukturaci, jako tomu bylo u Filomény. Žáci číslo vnímali pouze kvalitativně a neuvědomovali si jeho kvantitu.

2.7. Sémanticky chybné vnímání čísla

Sémantika je obor jazykovědy, který se zabývá smyslem a významem slov a komunikačních prostředků (Hartl, Hartlová 2009). „Sémantika se soustřeďuje zejména na zkoumání vztahů mezi jazykovými výrazy a předměty, ke kterým se tyto výrazy vztahují, a na ty vlastnosti a vztahy výrazů, které souvisí s jejich vztahy k těmto předmětům“ (Cmorej 2002, s. 28).

Sémanticky chybné vnímání čísla popisuje ilustrace 7 a s ní související slovní komentář.

Ilustrace 7 – Gisela

Gisela otočí pravou rukou kartu s číslem 4, prohlíží si ji (5 s). Pravou ruku natáhne ke hromádce trojkových hranolků. Po jedné odpočítá čtyři tyto hranolky (7 s.) Řekne: „Čtyři.“ Hranolky položí na kartu. Otočí kartu s číslem 6. Pravou rukou odpočítá po jednom šest

trojkových hranolků a položí je na kartu (9 s). Řekne: „ Šest.“ Otočí kartu s číslem 5. Pravou rukou odpočítá po jednom pět trojkových hranolků a položí je na kartu (8 s.*) Řekne: „Pět.“*

Komentář: Sémanticky uchopila Gisela číslo 3 nesprávně. Trojkový hranolek volí proto, že je to největší z nabízených hranolků. Důvodem může být i hledisko vzdálenosti, trojkové hranolky byly nejblíže její pravé ruce. Lze říci, že z pohledu dívky při reprezentaci obou sledovaných čísel počítala po jedné. Do žádného z uvedených čísel nemá vhled. Strukturu každého čísla teprve buduje.

Sémanticky chybně vnímali žáci čísla v 9 % případů.

3. Závěr

Na základě vyhodnocení experimentu bylo zjištěno, že ze sledovaných fenoménů se v největším počtu případů vyskytovala podpora enaktivní reprezentace vizuální percepcí a nejméně interference mezi kvalitativním a kvantitativním vnímáním čísla. Vezmeme-li v úvahu další jevy, které byly v rámci experimentu zkoumány, jako byly používané strategie nebo proces vytváření separovaných a generických modelů vybraných přirozených čísel, můžeme říci, že v 1. ročníku základní školy je třeba klást důraz na správné vytváření představy přirozeného čísla 9 a to využíváním manipulativní činnosti při rozkladu tohoto čísla na dva sčítance. Ve 2. ročníku základní školy se pak ukazuje jako stěžejní procvičování rozkladu dvojciferných čísel na desítky a jednotky.

Acknowledgements

Článek je dílčím výstupem projektu GRAK2019 Kognitivní fenomény doprovázející proces vytváření přirozeného čísla a byl podpořen ESF projektem Západočeské univerzity v Plzni registrační číslo CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002287.

Literatura

Cmorej, P. (2002). *Úvod do logické syntaxe a sémantiky.* Praha: Triton.

Gray, E., M., & Tall, D. O. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. In *Proceedings of PME XIII.* Assisi, s. 72-79.

Hartl, P., & Hartlová, H. (2009). *Psychologický slovník.* Praha: Portál.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál.

Kolláriková, Z., Pupala, P., & kol. (2001). *Předškolní a primární pedagogika*. Praha: Portál.

Kuřina, F. (2013). Jazyky a reprezentace ve vyučování matematice. *Matematika, fyzika, informatika č. 1, roč. 22*, s. 2-16.

Pěchoučková, Š. (2018). *Přirozené číslo a manipulace s Cuisenairovými hranolky*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.

Ruisel, I. (2004). *Inteligence a myšlení*. Bratislava: Ikar.

Sedláková, M. (2004). *Vybrané kapitoly z kognitivní psychologie. Mentální reprezentace, mentální modely.* Praha: Grada Publishing a.s.