KOMBINATORICKÉ ÚLOHY V UČIVU PRIMÁRNÍ ŠKOLY

Jana PŘÍHONSKÁ
Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická (Česká republika)
jana.prihonska@tul.cz

Abstrakt

Jedním z úkolů školské matematiky je rozvíjet u žáků kombinatorické a logické myšlení, kritické usuzování a srozumitelnou a věcnou argumentaci při řešení aplikačních matematických problémů. Učitel by měl dát žákovi dostatečný prostor a čas k vyřešení úlohy, vhodnými aktivizujícími činnostmi ho vést k pochopení základních kombinatorických pravidel a následně jejich využití k vyřešení kombinatorické úlohy. Příspěvek informuje o realizovaném výzkumu s cílem identifikovat řešitelské strategie žáků při řešení těchto úloh, zařazení kombinatorických úloh v učebnicích matematiky na prvním stupni a vytvoření aktivit pro rozvoj logicko-kombinačního myšlení žáků. Aktivity mohou být využity jako propedeutika pro pochopení základních kombinatorických pravidel a principů.

Klíčová slova: kombinatorická úloha, logické myšlení, kombinatorické principy, řešitelské strategie, aktivizující činnosti

COMBINATORIAL TASKS IN THE PRIMARY SCHOOL TEACHING

Abstract

One of the tasks of school mathematics is to develop pupils' combinatorial and logical thinking, critical reasoning and comprehensible and substantive argumentation in solving application mathematical problems. The teacher should give the pupil sufficient space and time to solve the problem, lead him / her to the basic activating activities to understand the basic combinatorial rules and then use them to solve the combinatorial task. The paper informs about realized research with the aim of identifying solving strategies of pupils in solving these problems, including combinatorial problems in mathematics textbooks at the first level and creation of activities for development of logical-combinational thinking of pupils.. Activities can be used as propaedeutic to understand the basic combinatorial rules and principles.

Keywords: combinatorial problem, logical thinking, combinatorial principles, solving strategies, activating activities

1. Úvod

Z důvodu krátkodobé pozornosti a soustředěnosti žáků prvního stupně je nutné během výuky obměňovat organizační formy i vyučovací metody a volit zejména takové, které mají na žáky aktivizující vliv. Velký důraz by měl učitel klást na motivaci a pozitivní přístup k žákům. Nejen v hodinách matematiky by měl zapojovat zajímavá témata a podporovat přirozenou hravost a spontánnost dětí. Měl by citlivě pracovat s chybami žáků a dát jim prostor pro hledání vlastních postupů a experimentování. Přínosem pro vyučování je volba aktivizujících metod, které zlepšují samotný proces výuky a činí vyučování efektivnějším. Jsou zaměřeny především na vlastní aktivitu žáků, zejména pak na rozvoj myšlení, řešení problémů a tvořivý přístup při osvojování nových poznatků. Aktivita žáků může být významně podpořena vhodnou volbou nestandardních úloh, tj. úloh, jež vyžadují určitou tvořivost, originalitu a důvtip. Oproti standardním úlohám není výchozím předpokladem využití pamětných znalostí, osvojených vzorců či algoritmů. Mezi nestandardní lze zařadit právě i kombinatorické úlohy, které jsou vhodné jak pro výborné a nadané žáky, tak i pro žáky, kteří nebývají v matematice obvykle úspěšní. Rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, kritického usuzování a srozumitelné a věcné argumentace při řešení aplikačních matematických problémů je jedním z úkolů školské matematiky. K naplnění tohoto cíle je potřeba, aby učitel poskytoval žákovi dostatečný prostor a čas k vyřešení úlohy, vhodnými aktivizujícími činnostmi ho vedl k pochopení základních kombinatorických pravidel a následně k jejich využití při řešení kombinatorické úlohy. Úspěšnost řešení úlohy je do značné míry ovlivněna výběrem zadávaných úloh. Bohužel se ukázalo, že učitelé často sami nechápou, co kombinatorickou úlohou rozumíme. Nedokážou ji identifikovat, a proto následně dochází k chybnému vedení žáka při řešení úlohy.

Kombinatorickým problémem či úlohou rozumíme takový problém, kde cílem je vytváření nejrůznějších „konfigurací a schémat“. U daných konfigurací a schémat, kdy vybíráme nějaké prvky z předem určené konečné množiny, pak musíme rozlišit, zda záleží či nezáleží na pořadí výběru. Nemusí se však nutně jednat pouze o výběr skupiny prvků, ale za kombinatorický problém považujeme i úlohu, která vede k přeuspořádání dané skupiny prvků, změně obrazce, změně útvaru apod. Kombinatorické problémy napomáhají žákům k určení výčtu prvků, stejně jako k zlepšení odhadu, zobecnění a systematického myšlení (English, 2005). Jejich úspěšné řešení závisí na pochopení:

Základních kombinatorických konceptů a modelů

- Kombinatorické operace: jedná se o kombinace, uspořádání, permutace a související pojmy, zápisy a vzorce;
- Kombinatorické modely: zahrnují model výčtu prvků (počet obyvatel, uspořádaný/neuspořádaný výčet prvků), distribuční modely (matematické simulace reálných situací a jejich aplikace) a model rozdělení do skupin (sady, podmnožiny).

Kombinatorických postupů

- Logické postupy: zahrnují klasifikace, systematické vyčíslení, princip zařazení nebo vyloučení a opakování;
- Grafické postupy: mezi běžné postupy patří stromové diagramy a grafy;
- Numerické postupy: patří sem principy sčítání, násobení a dělení, kombinační a faktorová čísla, Pascalův trojúhelník;
- Tabelární postupy: nejčastější je tvorba a využití tabulek;
- Algebraické postupy: patří sem vytváření různých funkčních vztahů a funkcí.

(Batanero, Godino et al.1997).

Za kombinatorickou úlohu považujeme každou slovní úlohu, kterou musíme řešit při použití těchto konceptů nebo modelů. Kombinatorické úlohy umožňují zažít všem žákům pocit úspěchu, který jim dodává odvahu pro další řešení a zlepšuje jejich „matematické“ sebevědomí. Pro žáky jsou tyto úlohy atraktivní. Žáci se jejich prostřednictvím mohou v matematice setkat se zajímavými problémy, jež jim poskytují možnost zkoumání, experimentování a objevování. S tím souvisí i propojitelnost matematiky s každodenním životem, se známými situacemi. Využitím zajímavých témat a námětů žáky motivujeme k řešení úloh a tím zvyšujeme i jejich zájem o matematiku.

S rozvojem kombinačního myšlení se děti setkávají již v útlém věku doma či v mateřských školách. Staví hrady z barevných kostek, rovnají předměty a hrají nejrůznější hry. Proto bychom měli navázat na jejich zkušenosti a zapojovat do výuky takové problémy a aktivity, které podporují další rozvoj kombinačního myšlení. Je to jeden z aspektů, který by se na 1. stupni neměl opomíjet. Učitelé by proto s kombinatorikou na prvním stupni ZŠ měli začít prostřednictvím manipulativních činností dětí. K tomu velmi dobře poslouží např. barevné kostky, obrázky, pastelky, aj. Je vhodné využít i osvědčených her, jako např. Logic, Tangramy, Člověče, nezlob se, Scrabble. Velkou oblibu jistě žáci najdou v hledání cest z bludišť a labyrintů (ať už v těch na papíře, či v opravdových).

2. Předmět výzkumu

Zaměřili jsme se na rozvoj logicko-kombinačního myšlení žáků primární školy. Prvotním cílem bylo provést klasifikaci kombinatorických problémů, které se vyskytují v učebnicích matematiky pro první stupeň. Souběžně jsme se soustředili na zmapování využívaných řešitelských strategií žáků a jejich schopností řešit tyto úlohy. Následně jsme si vytyčili cíl vytvořit soubor aktivizujících činností pro žáky. Předpokládali jsme, že zařazováním vhodných aktivizujících činností budou žáci schopni lépe si uvědomit hlubší souvislosti z hlediska vnímání principu (ne)uspořádání prvků s/bez možnosti opakování a tím se zvýší celková úspěšnost řešení. Záměrem bylo zlepšit schopnosti žáků v oblasti porozumění textu, zpracování vstupních informací ze zadání úlohy a propedeutika porozumění základního kombinatorického pravidla součtu a součinu.

2.1. Výzkumné předpoklady

Soustředili jsme se na tři základní oblasti, které mají vliv na úspěšnost žáků při řešení kombinatorických úloh:

a) Zkušenosti žáků
b) Práce s informacemi
c) Řešitelské strategie

Ad a) Zejména jsme předpokládali, že úspěšnost v řešení kombinatorických úloh je ovlivněna předchozími zkušenostmi žáků, které mohou žáci nabýt zejména ve škole, ale které vyplývají i z odlišných zájmů chlapců a dívek.

Například u chlapců (ve větší míře než u dívek) je více méně známá obliba skupinových sportů. Při fotbale, florbale, hokeji (a podobných) se chlapci účastní turnajů, kde se mohou seznámit s tabulkovým zápisem odehraných zápasů. Právě tato zkušenost by jim mohla pomoci při řešení kombinatorických úloh se sportovní tematikou. U dívek by se mohly při řešení úloh větší měrou projevit například zkušenosti s praktickými činnostmi z domácnosti a z běžného života (jako např. domácí práce, vaření, nakupování). Tím však netvrdíme, že chlapci s těmito činnostmi nemohou mít také bohaté zkušenosti, ani to, že dívky se nemohou účastnit sportovních turnajů. Zkušenosti s řešením kombinatorických úloh se odvíjejí i od typů úloh, které řeší ve škole, tedy v souvislosti s používanou učebnicí.

Metoda ověření:
Analýza učebnic matematiky pro pátý ročník. Vstupní test pro žáky (vyhodnocení řešitelských strategií). Dotazník pro učitele.

Ad b) Při řešení úloh hraje důležitou roli porozumění textu a práce s informacemi. Proto jsme se soustředili na rozvoj schopnosti žáků třídit, zaznamenávat a dále zpracovávat vstupní informace v zadání úlohy. Předpokládali jsme, že utřídění vstupních informací pozitivně ovlivňuje úspěšnost žáka při řešení úlohy.

Metoda ověření:
Test pro žáky - rozbor řešitelských strategií v souvislosti s úspěšně vyřešenou úlohou.

Ad c) Třetí oblast našeho výzkumu byla zaměřena na rozvoj řešitelských strategií žáků. Při samostatném řešení kombinatorických úloh převládá metoda spontánního hledání výsledku tipováním a náhodným zkoušením nad metodou systematického řešení. Tipováním máme na mysli způsob, kdy žák náhodně odhadne výsledek, aniž by své tvrzení nějak písemně (nebo jinak graficky) ověřil či vysvětlil. Metoda náhodného zkoušení představuje postup, kdy žák spontánně hledá různé možnosti řešení a písemně či graficky je zaznamenává. Tyto možnosti řešení žák nalézá náhodně, nehledá je systematicky. Není tedy zcela úspěšný v nalezení všech správných možností. Rozvoj řešitelských strategií úzce souvisí s využitím obrázku či jiného grafického schématu, které mohou velmi pozitivně ovlivnit úspěšnost v nalezení správného řešení úlohy. Obrázek může vést k lepšímu pochopení souvislostí a hraje velmi důležitou roli v práci s informacemi.

Metoda ověření:
Sledování souvislostí mezi grafickým znázorněním, resp. znázornění obrázkem a úspěšností řešení v úlohách ve vstupním testu. Sledování řešitelských strategií žáků při přímém působení ve třídě. Porovnání úspěšnosti řešení s využitím grafického znázornění a bez něj.

2.2. Kombinatorické úlohy v učebnicích matematiky pro první stupeň

V roce 2012 byla provedena v rámci výzkumného šetření diplomové práce analýza učebnic matematiky pro 5. ročník ZŠ nakladatelství Alter, Didaktis, Fraus, Nová škola, Prodos a SPN. Prvky kombinatoriky se nejvíce objevují v učebnici nakladatelství Fraus: Matematika pro 5. ročník základní školy (Hejný a kol., 2011). Dále uvádíme úlohy, které je možno charakterizovat jako kombinatorické a které jsou v uvedených učebnicích zařazeny (Vilimovská, 2012). Učebnicové řady odpovídají požadavkům RVP ZV a jsou dle nich zpracované.

ALTER: Matematika pro 5. ročník, (Justová 2009)

Učebnice obsahuje aktualizované úlohy z předchozí trojdílné učebnice. Na straně 156 v kapitole Nestandardní úlohy je zařazena úloha s tématikou šachového turnaje. Cílem je zjistit počet odehraných zápasů. Správnou odpověď žáci volí ze čtyř nabídnutých možností. Úloha není nijak graficky doplněna.

- **s. 156:** Nestandardní úlohy

7. V turnaji v šachu soutěžila dvě čtyřčlenná družstva. Každý hráč prvního družstva hrál utkání se všemi hráči druhého družstva. Kolik se odehrálo zápasů?

Bylo odehráno: a) 8 zápasů b) 12 zápasů c) 16 zápasů d) 24 zápasů

DIDAKTIS: Matematika – učebnice pro 5. ročník základní školy (Blažková aj. 2011)

Učebnice má nevšední vzhled i pojetí matematiky. Je úzce propojena se vzdělávací oblastí Člověk a jeho svět a ukazuje matematiku jako praktický nástroj pro každodenní život. Každá kapitola obsahuje po stranách rozbor řešení daného typu úlohy krok za krokem. Pro ty, kteří se nechtějí připravit o radost z nalezení vlastního postupu, je učebnice opatřena na každé straně klopami, jež řešení zakryjí.

Prvky kombinatoriky objevíme v závěrečné kapitole Náročnější příklady pro chytré hlavičky na straně 79. V úloze o vstupenkách hledáme čísla končící dvojčíslím 31. V rýsovací úloze lze spatřit rozvoj kombinatorického myšlení, neboť je několik způsobů, jak narýsovat čtyřlístek dle vzoru. Na straně 81 se vyskytuje úloha s tematikou přelívání vody do lahví různého objemu. Také zde můžeme postupovat různými způsoby a řešit úlohu experimentem.

- **s. 79:** Náročnější příklady pro chytré hlavičky

  Na školní ples bylo prodáno 530 vstupenek (vstupenky byly číslovány 000, 001, 002,…). Při losování vyhráli 333 Kč všichni ti, kteří měli vstupenku končící dvojčíslím 31. Kolik takových vstupenek vyhrálo a kolik korun pořadatelé vyplatili?

- **s. 81:**

  Máme tři lahve o objemu 8 l, 5 l, a 3 l. 8 l láhev je plná vody. Jakým způsobem odměříte 2 l, když víte, že nesmíte žádnou část vody vylít mimo nádoby.

FRAUS: Matematika pro 5. ročník základní školy (Hejný aj. 2011)

Cílem učebnice je rozvoj klíčových kompetencí. Má netradiční vzhled a hojně využívá fotografií, ilustrací a piktogramů. Obsahuje mnoho problémových úloh, mezi kterými se objevuje i několik úloh rozvíjejících kombinatorické myšlení žáků.
Na straně 14 nalezneme následující úlohy:

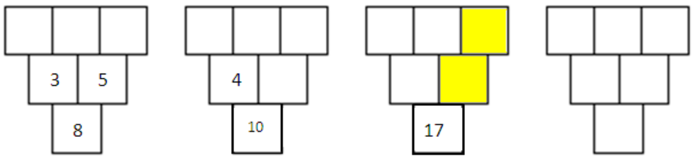
- **s. 14:** Opakování

  50. Kolik různých trojciferných čísel můžeš vytvořit z číslic:

  a) 1, 2, 3 b) 5, 4, 0 c) 5, 3, 0, 7 Každá číslice smí být použita jen jednou.

  51. Kolik různých obdélníků můžeš vytvořit z a) 12; b) 18; c) 24 čtvercových kartiček pexesa?

  52. Kolika způsoby lze doplnit sčítací trojúhelník? Nejmenší číslo není menší než 0.



Součet čísel v barevných polích je 8. Součet tří čísel prvního řádku je 4 (ve čtvrtém trojúhelníku).

53. Kolika způsoby je možné přečíst názvy planet v tabulkách?

např.:

Z	E	M
E	M	Ě

Na straně 23 je další úloha rozvíjející kombinatorické myšlení. Prvky kombinatoriky se dále objevují na stranách 68 – 71 v kapitole Pravděpodobnost a náhoda.

- **s. 23:** Rozšiřující učivo (Zákonitosti, vztahy a práce s daty)

  s. 25.: Najdi součet všech osmi trojmístných čísel, ve kterých se vyskytují pouze číslice:

  a) 1 a 2 b) 1 a 3 c) 2 a 5

PRODOS: Matematika a její aplikace 5, 1. – 3. díl (Molnár; Mikulenková 2008)

Trojdílná sada učebnic vyšla v nové edici Modrá řada. V prvním díle kombinatorické úlohy nenalezneme. Ve druhém díle se úlohy rozvíjející kombinatorické myšlení objevují ve dvou kapitolách; poprvé na straně 18 v kapitole Logické slovní úlohy. V 1. úloze mají žáci za úkol kombinovat kusy oblečení a určit počet různých kombinací. Tato úloha je doplněna obrázky s oblečením. Ve druhé úloze je třeba zjistit, kolik ponožek musí chlapec vytáhnout z batohu, aby měl pár. Třetí úloha se zabývá uspořádáním červených a modrých vagonů takovým způsobem, aby byly vagony uspořádány symetricky. Ve čtvrté (poměrně náročnější) úloze vytahujeme kuličky ze tří různých krabic s přeházenými popisky a máme zjistit, kolik kuliček je nutno vytáhnout, abychom popisky uspořádali správně. Na 45. straně v kapitole Nestandardní úlohy je úloha, kde mají žáci přeskupovat 4 symboly všemi možnými způsoby (tedy charakter permutací). K tomu jim má pomoci obrázek těchto symbolů a tabulka s uspořádáním políček 6x4. Třetí díl učebnice Matematika a její aplikace 5 obsahuje dvě kombinatorické úlohy v kapitole Nestandardní úlohy na straně 3. V první z nich žáci zjišťují, kolik bude podání rukou, pozdraví-li se čtyři chlapci, a kolik podání rukou přibude, přidají-li se k chlapcům ještě dvě dívky. Pro lepší pochopení mají žáci k dispozici obrázek s šesti různě barevnými dlaněmi. Druhá úloha se shoduje s jedinou kombinatorickou úlohou z „alterovské“ učebnice. Žáci mají určit počet odehraných zápasů v šachovém turnaji, úloha je doplněna (na rozdíl od Alteru) obrázkem. V učebnici se objevila i kapitola Úlohy z přijímacích zkoušek na víceletá gymnázia, žádnou kombinatorickou úlohu však neobsahuje.

2. díl:

- **s. 18:** Logické slovní úlohy

  1. a) Věrka si vzala na dovolenou 2 sukýnky, 2 kalhoty a 5 halenek. Kolika různými způsoby se může obléknout?

  1. b) Pavlína má s sebou 3 kalhoty a 7 triček. Která z dívek si může obléknout více různých kombinací oblečení?

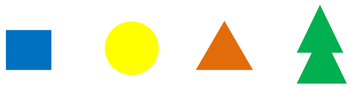
  2. Nepořádný Vilík má v batohu 2 páry modrých, 2 páry hnědých a 2 páry černých ponožek. Kolik ponožek má v batohu? Jaký nejmenší počet ponožek musí potmě z batohu vytáhnout, aby měl 1 pár ponožek téže barvy? A když potřebuje 2 páry?

  3. Lokomotiva táhne 6 vagonů, každý z vagonů je buď červený, nebo modrý. Pořadí barev jednotlivých vagonů je přitom stejné zepředu jako zezadu. Kolik takových vláčků umíte nakreslit?

  4. Máš 3 plné krabice kuliček. Jsou označeny nálepkami: bílé, červené, bílé a červené. Nálepky označují barvu kuliček, které jsou v krabicích. Jednoho dne ti někdo nálepky přemístí tak, že žádná není na správné krabici. Kolik kuliček musíš z krabic bez nahlížení vyjmout, abys mohl správně uspořádat popisky?

- **s. 45**: Nestandardní úlohy

  1. Jak lze seřadit následující 4 symboly? Nakresli všechny možnosti.

  (+ tabulka 6 x 4)

3. díl:

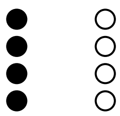
- **s. 3:**Nestandardní úlohy

  1. Bohouš, Libor, Pepík a Standa se vítají a podávají si ruce.

  a) Kolik je to celkem podání rukou?

  b) Kolik podání rukou přibude, přijdou-li za nimi Věrka a Pavlína?

  2. V šachovém utkání hrají proti sobě dvě čtyřčlenná družstva. Každý šachista jednoho družstva hraje s každým hráčem druhého družstva. Kolik partií se sehraje?

- **s. 57:** Úlohy z přijímacích zkoušek na víceletá gymnázia

  Neobsahuje žádné kombinatorické úlohy.

ISSN 2694-8133

SPN: Matematika pro 5. ročník ZŠ (Vacková aj. 2010)

Učebnice obsahuje dvě kombinatorické úlohy, vždy v kapitole Chytrost nejsou žádné čáry. První z nich najdeme na straně 72. Žáci mají zadané datum a jeho ciferný součet a mají uvést různá data, jejichž ciferný součet je shodný. Hrají si tedy se součtem čtyř cifer. Druhá kombinatorická úloha je na straně 109. Zde je k dispozici tabulka s uspořádáním polí 3x3. Žáci mají vytvářet různá čísla tak, že z každého sloupce a každého řádku použijí vždy jednu číslici.

- **s. 72:** Chytrost nejsou žádné čáry

  2. Představ si, že podle kalendáře je 24. 11. Ciferný součet tohoto data je 8 (2 + 4 + 1 + 1 = 8). Kolik dní v roce má stejný ciferný součet jako tento den? Jednotlivá data vypiš.

- **s. 109:** Chytrost nejsou žádné čáry

  2. Z cifer v tabulce sestav různá trojciferná čísla tak, že z každého sloupce a každého řádku vždy použiješ právě jednu cifru. Kolik bude celkem takových trojciferných čísel?

1	4	7
2	5	8
3	6	9

NOVÁ ŠKOLA: Uvažuj, odhaduj, počítej: Učebnice matematiky pro 5. ročník (Rosecká; Růžička 2010)

Na straně 39 v samostatné kapitole s názvem Kombinatorika, nalezneme úlohu, která má charakter permutací. Ve druhé úloze (charakter variace) řadí žáci lístečky s čtyřmístným kódem složeným ze dvou písmen (např. ABAA, BAAA, ABBB, aj.) dle abecedy a poté nahrazují písmena číslicemi. K pochopení úloh má v obou případech žákům pomoci grafický příklad (tabulka s čísly, výčet všech možností přeskupení). Za úlohu rozvíjející kombinatorické myšlení lze považovat také tu ze strany 45. Zde mají žáci různými způsoby rozměňovat částku 50 Kč na drobné mince.

- **s. 39:** Kombinatorika (Hrej si)

  1. Lukáš si hraje se čtverečky, které vyrobil z krabičky od čaje. Napsal na ně číslice. Čtverečky s číslicemi přesunuje a zapisuje si čísla složená z těchto číslic.

1 3 4 8	3 1 4 8	4 1 3 8	8 1 3 4
1 3 8 4	3 1 8 4	4 1 8 3	8 1 4 3
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

  Proveď totéž s číslicemi 2 5 7 9 nebo 4 6 8 9 nebo 1 3 5 0.
  Napsaná čísla seřaď podle velikosti. Kolik různých čísel z těchto číslic dovedeš samostatně sestavit?

  2. Anetka se rozhodla urovnat rozházené lístečky podle abecedy. Když to také dokážeš, pokračuj podle pokynů dole.

  AAAA BAAA ABAB AAAB BBAB BBAA
  BBBB ABBA BABA BABB

  AABA ABBB BAAB ABAA BBBA AABB

  Ze dvou libovolných číslic sestavuj čtyřciferná čísla tak, že na urovnaných kartách nahrazuješ písmena číslicemi. Piš je pod sebe do sloupce.

- **s. 45:**

  3. Rozměňuj peníze na drobné (vyplať různými způsoby).

Na tuto analýzu jsme navázali v roce 2016-2017 v rámci řešení grantu SGS na FP TUL. Analyzovali jsme pět řad učebnic matematiky a tři učebnice rozšiřujícího učiva od různých autorů a nakladatelství uvedených v Tabulce 1, celkem se jednalo o 58 učebnic.

Tabulka 1. Učebnice, které byly předmětem výzkumu 2016–2017

Název	**Autor**	**Nakladatelství**
Matematika pro 1. - 5. ročník, 1. - 3. díl	Potůčková J., Potůček V.	Studio 1+1
Matematika pro 1. - 4. ročník, 1. - 2. díl	Cihlář J., Melichar J., Zelenka M.	Fortuna
Matematika pro 5. ročník. 1. díl	Cihlář J., Melichar J., Zelenka M.	Fortuna
Barevná matematika pro prvňáčky	Fialová D.	SPN
Barevná matematika pro druháky	Fialová D.	SPN
Barevná matematika pro třeťáky	Fialová D.	SPN
Barevná matematika pro čtvrťáky	Fialová D.	SPN
Barevná matematika pro páťáky	Fialová D.	SPN
Matematika pro 1. - 5. ročník, 1. - 3. díl	Molnár J., Mikulenková H.	Prodos
Matematika pro 3. - 5. ročník, 1. - 3. díl	Blažková R., Vaňurová M., Matoušková K.	ALTER
Matematika a její aplikace pro 1. ročník, 1. - 3. díl	Mikulenková H., Molnár J.	Prodos
Zajímavá matematika pro druháky	Mikulenková H., Molnár J.	Prodos
Zajímavá matematika (nejen) pro páťáky	Mikulenková H., Molnár J.	Prodos

Úlohy zařazené v těchto učebnicových řadách odpovídají typově úlohám, které uvádíme výše, proto je na tomto místě nevypisujeme. Na základě provedené analýzy učebnic matematiky jsme pro náš výzkum navrhli výchozí klasifikaci kombinatorických úloh. Jednotlivé typy úloh byly rozděleny do devíti kategorií C1 – C9 tak, jak se vyskytovaly v učebnicích viz Tabulka 2.

Tabulka 2. Klasifikace kategorií kombinatorických úloh v učebnicích

Kategorie	**Název**	**Typy úloh**
C1	Hry s čísly a písmeny	úlohy s číslicemi a vytváření čísel kombinacemi různých možností, početní operace s čísly, hledání možností pro daný výsledek, písmenné kombinace, kódování
C2	Kvantifikační a rozhodovací problémy	nejvíce, nejméně, alespoň …
C3	Sudoku a Magické čtverce	
C4	Využití teorie grafů	nalezení cesty v plánu, bludišti nebo čtvercové síti; úlohy na přelévání tekutin; úlohy na vážení; úlohy se sportovní tématikou, rozpis turnaje…
C5	Základní kombinatorická pravidla	kombinatorické pravidlo součtu a součinu, Pascalův trojúhelník v úlohách, tvorby *k*-tic z *n* prvků…
C6	Geometrické úlohy	problémy v rovině a v prostoru: dělení útvarů na části, sestavování možných obrazců z daných tvarů, barvení stěn krychlí, sirkové hlavolamy
C7	Třídící problémy	způsoby vyplacení určité částky peněz pomocí daného počtu a druhu mincí, rozdělování do přihrádek
C8	Komplexní úlohy	propojení jednotlivých prvků z úloh předchozích kategorií
C9	Kreativní úlohy	úlohy vyžadující buď vytvoření další úlohy a zadání na základě předchozí úlohy, nebo určení, co ještě můžeme ze zadaných dat vypočítat či určit

Každá z těchto kategorií má potenciál rozvíjet určité oblasti kombinačního uvažování žáků. Z provedené analýzy vyplývá, že největší zastoupení mají kategorie: C1 (Hry s čísly a písmeny) a C6 (Geometrické úlohy), což je pochopitelné vzhledem k vyučovaným tématům na prvním stupni ZŠ. Mezi nejpočetnější patří kategorie C8 a C9 (Komplexní a Kreativní). Kromě kategorie C5 (Základní kombinatorická pravidla) už žádná další nepřesáhne hranici 5 % z celkového počtu všech zařazených úloh v učebnicích. Toto poměrně malé zastoupení úloh, které přirozeně rozvíjejí logicko-kombinační myšlení žáků, může být jednou z příčin nízké úspěšnosti ve výzkumech TIMSS 2011, které ukazují, že pouze minimum žáků dosáhlo průměrných výsledků v oblasti matematiky a čtení dohromady (PIRLS &TIMSS 2011). Problémem není jen malé procentuální zastoupení kombinatorických úloh v učebnicích matematiky pro první stupeň ZŠ, ale také jejich malá druhová rozmanitost. To nedává velký prostor pro potřebný rozvoj kombinačního myšlení ani žákům, ani jejich učitelům. Analýza učebnic nám umožnila lépe se zaměřit na tvorbu těch aktivit, které rozvíjejí logicko-kombinační myšlení žáků a nejsou v učebnicích matematiky využívány.

Do kategorie C1 můžeme zařadit jednak úlohy s charakterem permutací, kdy se jedná o přeskupování daného počtu prvků, resp. číslic a písmen, jednak úlohy s využitím variací. Žáci např. vytvářejí několikamístné kódy/skupiny z daného počtu prvků, např. písmen dle abecedy a dále s těmito skupinami pracují, poté nahrazují písmena číslicemi a plní další úkoly. K pochopení a vyřešení úloh může žákům v obou případech pomoci tabulka s čísly, výčet všech možností přeskupení či logický strom řešení.

Úlohy kategorie C1 můžeme proto blíže specifikovat a rozdělit do dvou podkategorií:

- **C1a** – *úlohy přeskupovací* – vytvořit čísla z daných číslic a výsledná čísla seřadit, resp. roztřídit (využití permutací a variací)
- **C1b** – *úlohy kódovací* – vytváření kódů a následné propojení s čísly

Pozn.: *Kódování jako jedna z metod řešení je vhodně využitelná při řešení řady úloh i z druhých uvedených kategorií*

Propojení obou podkategorií C1 ilustruje úloha z učebnice (Rosecká, Z., & Růžička, J., 2010), viz str. 7 kapitoly 2.2:

> *Anetka se rozhodla urovnat rozházené lístečky podle abecedy. Když to také dokážeš, pokračuj podle pokynů dole.*
> *AAAA BAAA ABAB AAAB BBAB BBAA*
> *BBBB ABBA BABA BABB*
> *AABA ABBB BAAB ABAA BBBA AABB*
> *Ze dvou libovolných číslic sestavuj čtyřciferná čísla tak, že na urovnaných kartách nahrazuješ písmena číslicemi. Piš je pod sebe do sloupce.*

Typové úlohy kategorie C2 jsou např.:

- *Bára snědla 7 bonbonů a Tereza méně. Kolik bonbonů mohla sníst Tereza?*
- *V míse bylo šest jablek a osm hrušek. Do místnosti přiběhly ze zahrady děti a z mísy si vzaly celkem sedm kusů ovoce. Zůstala v míse aspoň jedna hruška? Zůstalo v míse aspoň jedno jablko? Vypiš všechny možnosti, jaké ovoce v míse zůstalo.*

Každá z předchozích kategorií vybízí k využití víceméně jedné z nejhodnějších metod k řešení. U úloh kategorie C8 (Komplexní) žáci nepracují odděleně s čísly, symboly či objekty, ale dochází k propojení využitelných metod jako experiment, obrázek, diagram či graf, tabulkové schéma, výpis všech možností, logická úvaha, výpočet. Úlohy tohoto typu rozvíjejí ve větší míře tvořivost žáků. Žáci využívají více pravidel, postupů a různých metod řešení. Úlohy v podstatě zahrnují jednotlivé úlohy z předchozích kategorií.

Příkladem může být úloha z učebnice (Molnár, J., Mikulenková, H., 2008) viz Tabulka 1, str. 8:

Lokomotiva táhne 6 vagonů, každý z vagonů je buď červený, nebo modrý. Pořadí barev jednotlivých vagonů je přitom stejné zepředu jako zezadu. Kolik takových vláčků umíte nakreslit?

Ještě více podporují rozvoj tvořivosti žáků úlohy kategorie C9, která je početnější než předchozí. Úlohy této kategorie vyžadující buď vytvoření další úlohy a zadání na základě předchozí úlohy, nebo určení co ještě můžeme ze zadaných dat vypočítat či určit, resp. vybízejí k úvaze nad dalšími problémy v souvislosti se zadáním.

Příkladem je úloha z učebnice (Blažková, R., Potůčková, J., 2011), viz Tabulka 1, str. 8:

Do obchodu přivezli deset svetrů po 1 250 Kč, osm svetrů po 1 390 Kč, dvanáct svetrů po 899 Kč a šest svetrů po 1 050 Kč.

a) *Jakou celkovou hodnotu mělo zboží, které do obchodu přivezli?*
b) *Během dopoledne se prodalo pět nejdražších svetrů a čtyři nejlevnější svetry. Kolik Kč za toto zboží utržili?*
c) *Odpoledne prodali některé z dovezených svetrů a utržili za ně 4 800 Kč. Dokážete přijít na to , jaké svetry a kolik jich prodali?*
d) *Jaké svetry jim po zavření obchodu večer zůstaly? Za kolik korun?*

2.3. Schopnost žáků řešit kombinatorické úlohy - využívané řešitelské strategie

Testování žáků probíhalo v období 2016 – 2017. Zadaný test byl primárně zaměřen na určení míry úspěšnosti žáků primární školy při řešení základních typů kombinatorických úloh. Dalším výstupem testu byly informace o způsobu řešení těchto úloh. Chtěli jsme získat představu o tom, jaké strategie při řešení kombinatorických úloh žáci využívají. Testování probíhalo na šesti různých základních školách s žáky, kteří neprošli žádnou speciální průpravou k řešení kombinatorických úloh. Celkem se testování zúčastnilo 72 žáků, z toho 48 dívek a 24 chlapců. Jejich věk se pohyboval v rozmezí 10 – 11 let. Z každé školy bylo stratifikovaným výběrem vyčleněno 12 žáků. Mezi vybranými nebyli žáci se specifickými poruchami učení a vzorek byl homogenní z hlediska žákovských schopností v matematice. Test obsahoval čtyři úlohy s otevřenou odpovědí. Kompletní zadání všech čtyř úloh jsou uvedena v Tabulce 3.

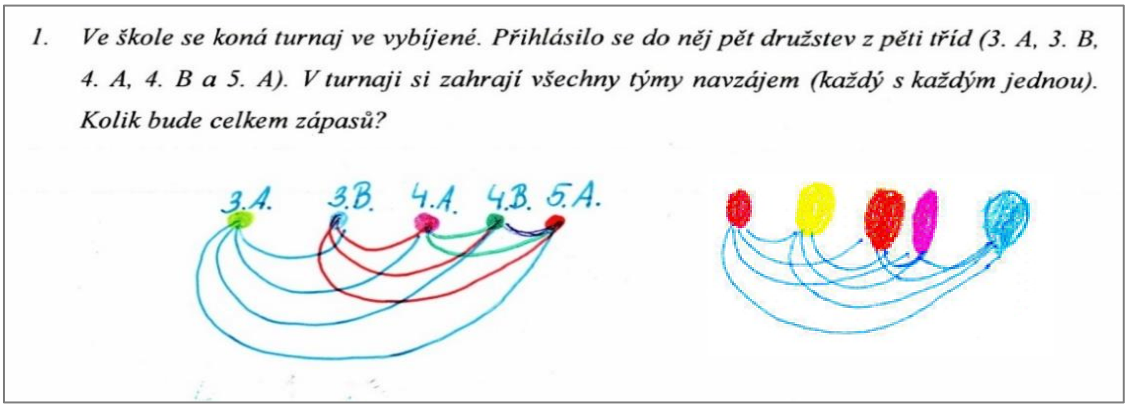
Tabulka 3. Zadání testu

Číslo úlohy	**Zadání**
1.	Ve škole se koná turnaj ve vybíjené. Přihlásilo se do něj pět družstev z pěti tříd (3. A, 3. B, 4. A, 4. B a 5. A). V turnaji si zahrají všechny týmy navzájem (každý s každým jednou). Kolik zápasů bude celkem?
2.	Jindra má v šuplíku zelené a červené ponožky. Poslepu ze šuplíku vytáhl tři ponožky. Má jistotu, že si vytáhl dvě ponožky stejné barvy?
3.	Paní učitelka je nemocná, a proto se v pondělí mění rozvrh. Žáci budou mít tyto předměty: český jazyk, matematiku, tělesnou výchovu, anglický jazyk a hudební výchovu. Druhou hodinou určitě musí být anglický jazyk a pátou hodinou tělesná výchova. Jak může vypadat rozvrh na pondělí?
4.	Maruška má zaplatit 11 Kč. V peněžence má pouze pětikoruny, dvoukoruny a koruny. Najdi všechny způsoby, jak může tuto částku vyplatit, když mincí je hodně a může použít všechny druhy mincí, nebo jen některé.

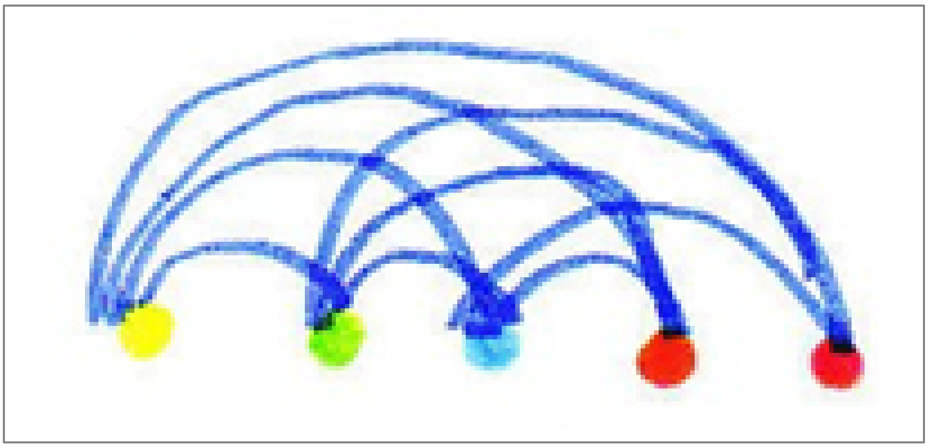
ISSN 2694-8133

Zadané úlohy byly vybrány na základě série pretestů, aby se omezily nežádoucí jevy, které by mohly nepříznivě ovlivnit výsledky testování. Úlohy byly kontextově odlišné a k jejich řešení se dalo využít více strategií. Typově stejné úlohy byly zadávány již v roce 2012. Identifikované řešitelské strategie byly vesměs totožné (viz ukázky řešení), stejně tak i úspěšnost žáků v závislosti na použité metodě řešení, byla srovnatelná v obou šetřeních.

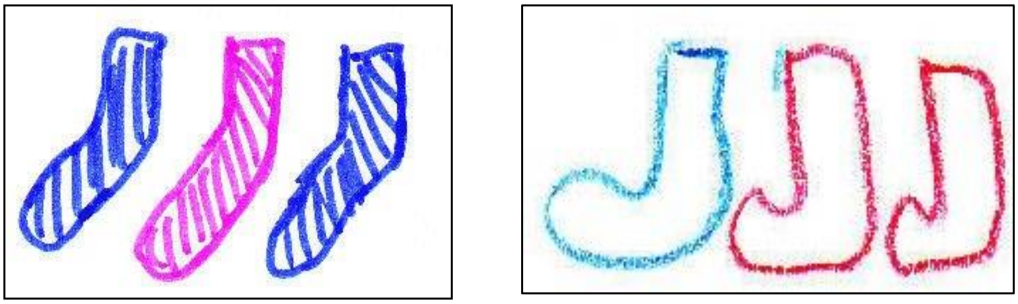
Ukázky konkrétních žákovských řešení ilustrují obrázky 1 až 9.



Obrázek 1. Řešení - SGS 2016



Obrázek 2. Řešení úlohy 1 - DP 2012



Obrázek 3. Řešení úlohy 2 - DP – 2012

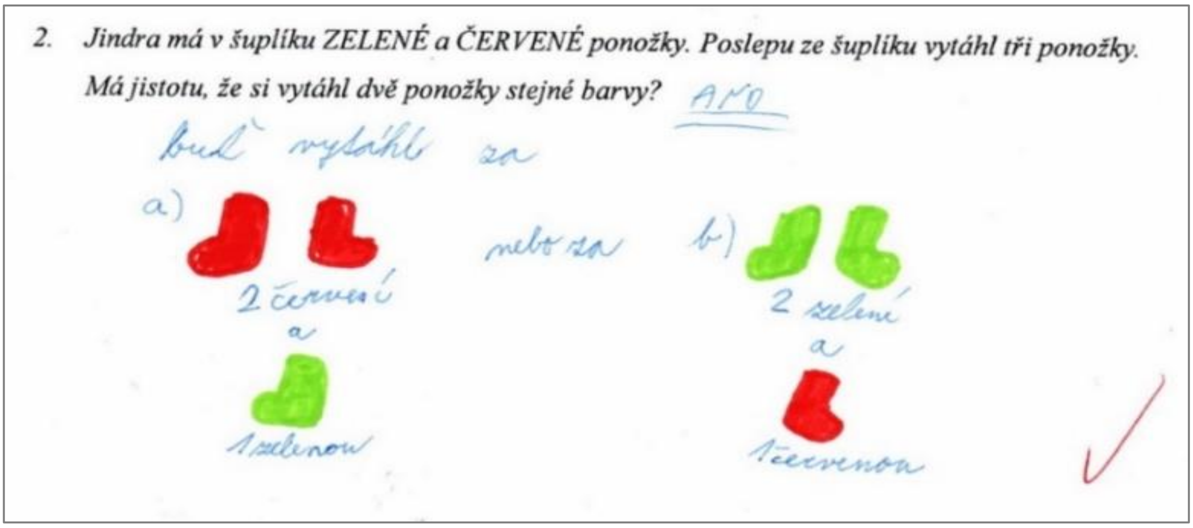
Jeden žák odpověděl: *„Ne, vytáhl dvě modré a jednu červenou ponožku."*

ISSN 2694-8133

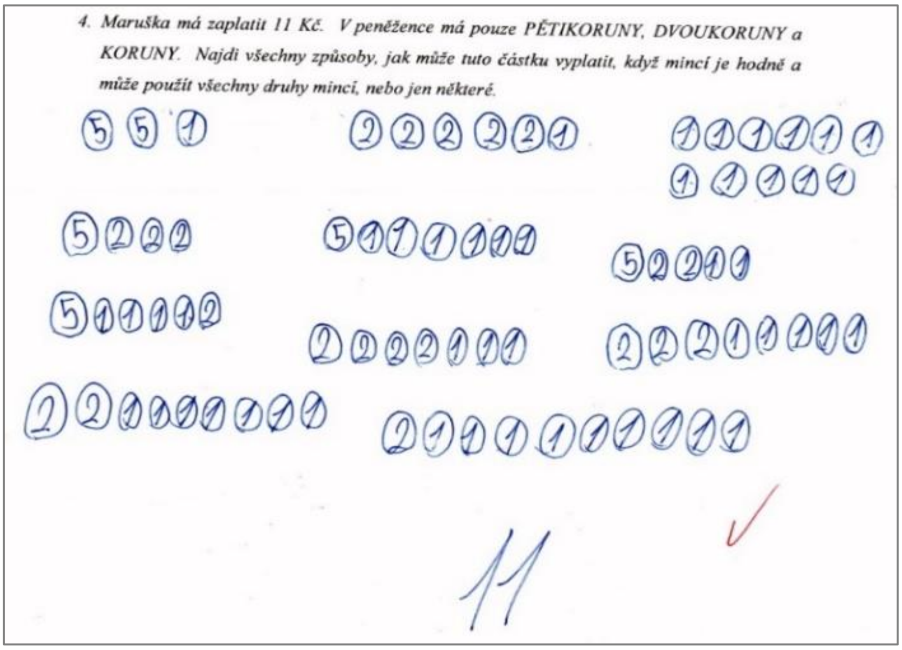
Pozn. 1: *Můžeme se domnívat, proč tento žák odpověděl ne. 1. Žák nerozuměl zadání. 2. Žák nepochopil pojem pár. 3. Žák věděl, co je pár, a proto rozhodl, že tři vytažené ponožky nejsou pár (červená ponožka mu přebývala).*

Pozn. 2: *18 žáků ze 45 nevyužilo k řešení úlohy kreslení obrázku. Úlohu řešili „úvahou“, resp. tipováním, což odpovídá výzkumnému předpokladu c), viz kap.2.1. Správně odpovědělo 11 žáků, bližší zdůvodnění však neuvedli. Tři žáci volili odpověď ne. Další dva žáci vůbec neodpověděli. U dvou zbývajících žáků byla odpověď nerozhodná: „Nevím. Je to 50 na 50.*

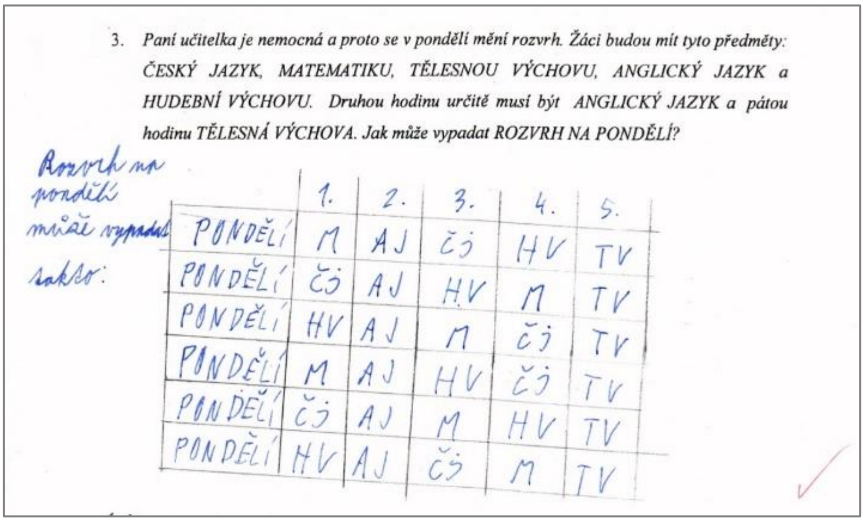
Ukazuje se však, že pro žáky je v podobných úlohách důležité propojení s reálným obrazem skutečnosti, tj. konkrétní obrázky zmíněných objektů, jako jsou např. ponožky či mince (obr. 4, obr. 5).



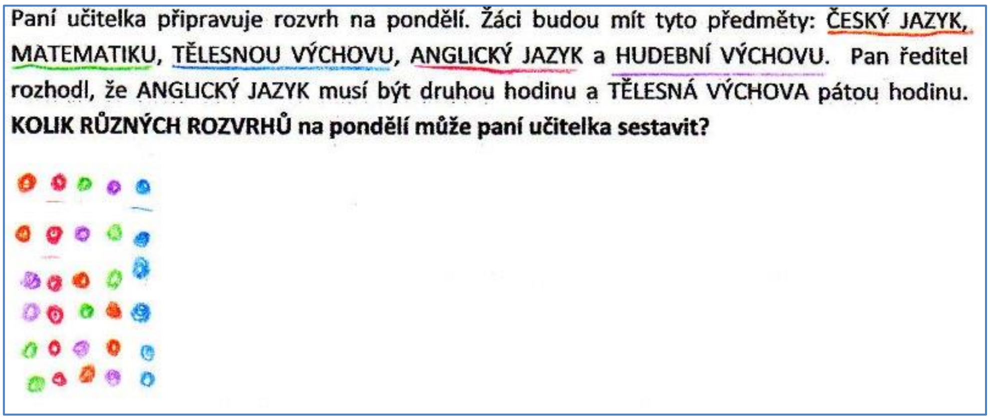
Obrázek 4. Řešení úlohy 2 - SGS 2016



Obrázek 5. Řešení úlohy 4 - SGS 2016



Obrázek 6. Řešení úlohy 3 - SGS 2016



Obrázek 7. Řešení úlohy 3 - SGS 2016

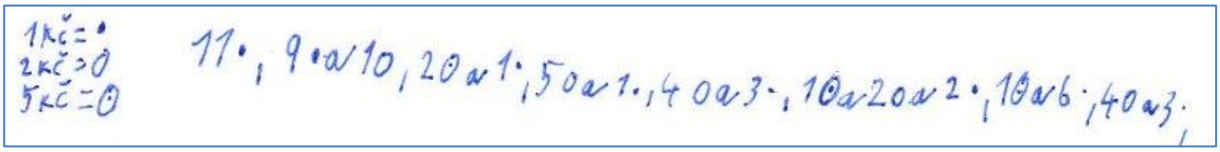
Vyhodnocení dostupných dat ukazuje, že žáci volili k řešení kombinatorických úloh nejčastěji dvě metody:

- systematický zápis všech možných řešení ve formě tabulky, resp. tabulkového schématu či symbolického zápisu (obr. 3, obr. 4, obr. 5, obr. 6, obr. 7)
- diskrétní graf jako metodu grafického postupu či vizualizace dané situace (obr. 1, obr. 2)

Využití tabulky i symbolický zápis, či vizualizace ve formě obrázku jsou v podstatě různé formy metody výčtu všech možných řešení. Vizualizace je ve většině případů uplatněna formou obrázku (viz úloha s barevnými ponožkami). Naopak obr. 1 a 2 představují velmi konkrétní případ grafického postupu (znázornění), resp. vizualizace. Grafické postupy, mezi které řadíme i grafy, jsou jednou z kategorií kombinatorických postupů, které vymezují Batanero s Godinem (1997), viz str. 2. Ukazuje se, že diskrétní graf je z hlediska jeho využití již u dětí na ZŠ přijatelný a není nutno jej předem nějak blíže zavádět, resp. ukazovat. Co je velmi zajímavé z hlediska vizualizace a systematického zápisu, jsou drobné odlišnosti, které se týkají např. způsobu kódování záznamu všech možností. V řešení žáků bylo možno identifikovat buď barevné kódování (obr.7, obr. 8) nebo symbolické ve formě zavedení jistých pomocných znaků (obr. 9).

ISSN 2694-8133

Obrázek 8. Řešení úlohy 4 - SGS 2016



Obrázek 9. Řešení úlohy 4 - SGS 2016

2.4. Dotazníkové šetření učitelů

Abychom získali ucelenější přehled o celé situaci, bylo součástí průzkumu též dotazníkové šetření zaměřené na učitele primární školy. Jeho cílem bylo zmapovat přístup učitelů základní školy k zařazování a řešení kombinatorických úloh ve výuce matematiky. Celkem se průzkumu zúčastnilo 52 učitelů, kteří vyučují na prvním stupni základní školy. Doba jejich učitelské praxe se pohybovala v rozmezí 2 až 35 let. Zapojeno bylo 7 základních škol Libereckého kraje. Dotazník byl anonymní. Obsahoval celkem šest otázek, z toho tři s uzavřenou a tři s otevřenou odpovědí. Otázky dotazníku byly zaměřeny na využívané učebnice, typy zadávaných úloh, četnost zadávání těchto úloh a metody řešení.

Z dostupných dat nebylo možné jednoznačně určit typ kombinatorických úloh, které učitelé řeší s žáky nejčastěji. Výsledky průzkumu naznačují, že volba úloh závisí především na druhu používané učebnice. Přičemž analýza učebnic ukazuje, že druhová rozmanitost kombinatorických úloh v učebnicích matematiky pro první stupeň není velká. Proto jsme se zaměřili na vytvoření souboru aktivit, z nichž uvádím ukázku jedné autorské hry. Hru vytvořila spoluřešitelka grantu SGS.

3. Kombinatorická hra - ukázka aktivity

Zahrada tulipánů

Autor: Mgr. Jana Rolečková, spoluřešitelka SGS grantu 2016–2017

Věk/Ročník	8 – 11 let / 2. – 5. ročník
Časová dotace	45 minut
Pomůcky	herní plán šachovnice 5 × 5 polí, 4 žluté, 4 zelené, 4 modré, 4 červené a 4 bílé hrací kameny, 16 kartiček s barevnými květy tulipánů a bodovým ohodnocením – 5 karet s jedním bodem, 4 karty s dvěma body, 3 karty s třemi body, 2 karty se čtyřmi body a 2 karty s pěti body
Cíl	vnímání uspořádání a opakování prvků v dané konfiguraci, rozvoj logického myšlení, rozvoj řešitelských strategií

Popis hry

Barevné kameny rozmístíme na herní plán. Pokládáme je do řady vedle sebe v tomto pořadí: zelená, modrá, bílá, žlutá, červená jako na Obrázku 10. Vždy dvě řady na krajích herního plánu jsou obsazeny kameny, prostřední řada zůstane volná. Vedle herního plánu umístíme karty lícem dolů, kde karty s jedním bodem budou navrchu a karty s pěti body úplně vespod. Každé dítě si vezme z hromádky jednu kartu (vzor barevných tulipánů). Nesmí je soupeřovi ukázat. Následně děti posouvají vždy jeden hrací kámen ve směru dopředu, dozadu i diagonálně. V tazích se děti střídají. Pokud jedno dítě táhne kamenem, může druhé dítě stejný kámen v tahu hned po soupeři posunout dál. Zakázáno je však posunout daný kámen po soupeřově tahu na původní místo, ve kterém byl před tahem soupeře.

Úkolem dětí je sestavit z hracích kamenů barevnou řadu totožnou s barevnými tulipány na kartičce. Řady se mohou na herním plánu vytvářet svisle, vodorovně i diagonálně. Když se jednomu z hráčů podaří řadu sestavit, řekne slovo „mám“ a ukáže soupeřovi kartičku i řadu na plánu, kterou sestavil, aby to mohl soupeř zkontrolovat. Poté si položí kartičku vedle sebe na lavici a vezme si další. Postupně si děti berou kartičky s odstupňovanou obtížností. Karty s jedním a dvěma body mají každou barvu tulipánu jen jednou. Karty se třemi body mají jednu barvu tulipánu dvakrát. Karty se čtyřmi body mají dvě barvy tulipánů dvakrát a karty s pěti body mají jednu barvu tulipánů dokonce třikrát. Každý hráč postupuje vlastním tempem. Na konci hry, kdy má každý hráč jednu kartu v ruce a v balíčku již žádné karty nejsou, záleží na tom, kdo jako první poslední řadu sestaví. Druhý pomalejší hráč musí následně kartu odložit, protože neplatí a do celkového počtu se nezapočítává. Děti si sečtou body na kartičkách. Vyhrává hráč s vyšším počtem získaných bodů.

Obrázek 10. Herní plán pro hru „Zahrada tulipánů“ (začátek hry)

Motivační pohádka

Budu vám vyprávět příběh o jedné daleké zemi, ležící na břehu moře. Studené vody Severního moře omývají její břehy a šplouchají na pobřeží v podobě blankytných vlnek. Na pevnině se zde rozprostírají široké lány polí, lesů a zahrad. Příroda je tu čistá a nádherná.

Silný a studený západní vítr roztáčí kola větrných mlýnů, a kam se lidské oko podívá, leží pestrobarevné zahrady různorodých tulipánů. Lidé se tu věnují zemědělství, chovu dobytka a výrobě dřeváků. Vyrábí také lahodné sýry, které nikde jinde ve světě nenajdete. Ptáte se, o jakou zemi se jedná? Jistě, je to Holandsko. A v této zemi se odehrává naše vyprávění.

Král této mírumilovné země měl velmi rád krásu rozkvetlých tulipánů. Jeho královské zahrady se mohly pyšnit nejrůznějšími druhy a barvami těchto jarních květin. Rád se procházel mezi zahradami, kde každá řada tulipánů měla jinou barvu. Byly rudě červené, pomněnkově modré, zlatavě žluté, smaragdově zelené i bílé jako první sníh. Za ranních východů slunce či za pozdních teplých večerů brouzdal mezi záhonky, obdivoval nesmírnou krásu tulipánů a vdechoval jejich rozmanitou vůni. Víte, kdo se o všechny tyto květiny musel starat, aby krásně kvetly? To se ví, přeci mnoho šikovných zahradníků.

Jednoho teplého dne, když se tak král procházel zahradami, napadlo ho, že by bylo jistě velmi nádherné, kdyby se barvy tulipánů mezi sebou v barvách duhově promíchaly. „Mít každou řadu jedné barvy, to už se mi nelíbí," pomyslel si. „Takhle by určitě má zahrada byla ještě krásnější." Zavolal si všechny zahradníky a poručil jim, aby do královské zahrady zasázeli řady tulipánů v co nejvíce barevných kombinacích. Kdo bude pracovat nejrychleji a jeho práce bude odpovídat požadavkům krále, stane se vrchním zahradníkem a jeho sláva bude známa po celém Holandsku.

4. Závěr

Výzkum byl zaměřený na rozvíjení logicko-kombinačních schopností žáků primární školy. Vycházeli jsme přitom ze širokého spektra převážně zahraničních studií, které se touto problematikou zabývají. Analýza dotazníku pro učitele ukázala na určitou korelaci mezi četností zařazování kombinatorických úloh a učebnicemi, které učitelé při výuce využívají. Je zřejmé, že učitelé využívají k řešení kombinatorických úloh s žáky v podstatě tři metody: výčet prvků, logickou úvahu spolu s grafickou reprezentací a strategii pokus - omyl. Testování žáků odhalilo, že žákovská řešení se pohybují od náhodného výběru položek až po systematické řazení výběru položek, což odráží rostoucí sofistikovanost v postupu žákovských řešení. Zjištěné výsledky nám umožnily lépe se zaměřit na tvorbu takových aktivit, které nejsou v učebnicích matematiky ani učiteli běžně využívány a jsou v souladu s konstruktivistickým pojetím budování nových poznatků. Důvodem pro zařazování nestandardních aplikačních úloh (a tedy i kombinatorických) je i výskyt podobných úloh v matematických soutěžích. Pro žáky 5. ročníku může být velkým motivačním faktorem např. soutěž Klokánek (Cvrček). Zde je velký prostor věnován právě logickým, nestandardním a kombinatorickým úlohám přiměřené obtížnosti. Společně s přípravou žáků nebo následným rozborem řešení úloh může být kromě učebnic vhodným zdrojem úloh pro vyučujícího. Další důvodem k zařazování těchto úloh do výuky je i jejich výskyt v 6. ročníku. Proto je v 5. ročníku důležité tyto úlohy přípravně zařazovat, aby role nestandardních aplikačních úloh na ZŠ mohla růst.

Zjištěné výsledky byly publikovány na konferencích APLIMAT (2017, 2018) a v časopise Učitel matematiky 2017. Rádi bychom pomocí různých aktivizujících činností motivovali učitele k častějšímu zařazování kombinatorických úloh při výuce (Příhonská & Břehovský, 2018). V návaznosti na výše uvedená zjištění se chceme dále zaměřit na ověření navržených aktivit z pohledu rozvoje žákovské argumentace a systematičnosti při zpracování vstupních informací.

Literatura

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*. Volume 32, 181–199.

Břehovský, J., & Příhonská, J. (2018). The ability of primary school pupils to solve combinatorial tasks. In *Aplimat 2018, 17th Conference of Applied Mathematics Proceedings* (p. 127–137). Bratislava: Slovak University of Technology.

Břehovský, J., & Příhonská, J. (2017). Rozvíjení kombinatorického myšlení na prvním stupni základní školy. *Učitel matematiky, 25*(4), 215–231.

Břehovský, J., & Příhonská, J. (2017). Combinatorial problems of mathematics for elementary school. In: *Aplimat 2017, 16th Conference of Applied Mathematics Proceedings* (p. 206–214). Bratislava: Slovak University of Technology.

English, Lyn D. (2005). Combinatorics and the Development of Children's Combinatorial Reasoning. In: Jones, G. A (Ed.) *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning.* Springer, New York, pp. 121–141.

Příhonská, J. & Břehovský, J. (2018). *Kombinatorika v primární škole (Rozvoj logicko-kombinačního myšlení žáků*. Liberec: Technická Univerzita v Liberci.

PIRLS 2011 & TIMSS 2011. Vybraná zjištění. Česká školní inspekce. Praha 2013.

Vilimovská, L. (2012). *Aktivizující činnosti pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků 1. stupně ZŠ*. (Diplomová práce). Liberec: FP TUL.

Analyzované učebnice v roce 2012

Blažková, J. a kol. (2011). *Matematika pro 5. ročník základní školy*. Vyd. 1. Brno: Didaktis.

Hejný, M. a kol. (2011). *Matematika pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus.

Justová, J. (2009). *Matematika pro 5. ročník základních škol*: *Učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Havlíčkův Brod: Alter,

Molnár, J., & Mikulenková, H. (2008). *Matematika a její aplikace: 5. ročník*, *1. díl*. Olomouc: Prodos, Modrá řada.

Molnár, J., & Mikulenková, H. (2008). *Matematika a její aplikace: 5. ročník*, *2. díl*. Olomouc: Prodos, Modrá řada.

Molnár, J., & Mikulenková, H. (2008). *Matematika a její aplikace, 5. ročník*: *3. díl*. Olomouc: Prodos, Modrá řada.

Vacková, I., Fajfrlíková, L., & Uzlová, Z. (2010). *Matematika pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN.

Rosecká, Z., & Růžička, J. (2010). *Uvažuj, odhaduj, počítej*: *Učebnice matematiky pro 5. ročník*. Brno: Nová škola.