ROZVÍJENÍ GEOMETRICKÉ PŘEDSTAVIVOSTI V ÚLOHÁCH

Jaroslav BERÁNEK
Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

Hlavním cílem příspěvku je poskytnout náměty k rozvíjení geometrické představivosti studentů programu učitelství pro 1. stupeň základní školy a tím přispět k jejich motivaci k dalšímu studiu matematiky a tím i rozvoji jejich matematických znalostí. Článek obsahuje řadu zajímavých úloh s geometrickou tématikou, vybraných z uplynulých ročníků matematické olympiády v kategorii Z5. Úlohy jsou doplněné řešením i metodickými poznámkami. Snahou je docílit toho, aby se studenti studijního programu učitelství pro 1. stupeň ZŠ začali více zajímat jak o geometrii, tak i o matematickou olympiádu.

Klíčová slova: Matematická olympiáda, geometrická představivost, řešení úloh

DEVELOPMENT OF GEOMETRIC IMAGINATION IN PROBLEMS

Abstract

The main aim of this article is to provide topics which can develop the geometric imagination of future elementary school teachers and thus assist their further motivation and enlargement of their mathematical knowledge. There is given a series of remarkable geometric problems chosen from previous years of Czech Mathematical Olympiad in category Z5. All problems are supplemented with solutions and didactic remarks. The article should inspire future elementary school teachers to be more interested in both geometry and Mathematical Olympiad.

Keywords: Mathematical Olympiad, geometric imagination, solving problems

1. Úvod

Příspěvek je zaměřen na přípravu budoucích učitelů 1. stupně základní školy ve vzdělávací oblasti „Matematika a její aplikace“. Obsahuje řadu úloh a problémů, které mohou rozvíjet myšlení studentů v matematice, což následně může vést ke zkvalitnění výuky jejich budoucích žáků. Úlohy jsou tematicky orientovány na geometrii, a to zejména na představivost. Všechny úlohy byly vybrány ze soutěžních úloh starších ročníků matematické olympiády, kategorie Z4 ze Slovenské republiky a kategorie Z5 z České republiky. Úkolem příspěvku není podat podrobný metodický rozbor jednotlivých úloh. Uvádíme jen řešení se stručným komentářem. Dalším důvodem, proč byl sestaven tento příspěvek, je fakt, že mnozí studenti učitelství pro 1. stupeň ZŠ jsou přesvědčeni o tom, že pro kvalitní výuku matematiky stačí znát čtyři základní početní operace a rozpoznat od sebe základní geometrické útvary v rovině a v prostoru. Na uvedených úlohách se pak mohou přesvědčit, že i např. ve 4. ročníku ZŠ se mohou setkat s relativně složitou problematikou a žáci se na ně mohou obrátit s netriviálními dotazy. Všechny úlohy byly převzaty z dostupných webových stránek MO v ČR a SR [6]. Některé z těchto úloh mohou poskytnout i náměty pro další teoretické úvahy. Soubor úloh je doplněn dvěma úlohami, převzatými z publikace určené k přípravě na přijímací zkoušky na VŠ. Poznamenejme ještě, že všechny obrázky v textu jsou rovněž převzaty z příslušných autorských řešení úloh matematické olympiády.

2. Soubor úloh

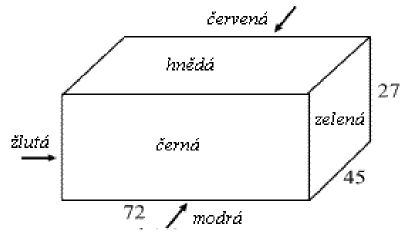
***Úloha 1**:* (45. r. Z4-I-1) Tři cihly ukládáme na sebe různým způsobem. Jaké různé výšky mohou mít tyto stavby? Rozměry jedné cihly jsou: délka 20 cm, šířka 15 cm, výška 7 cm.

Řešení: Jde o zajímavou úlohu, která rozvíjí prostorovou představivost. Žáci mohou využít i manipulativní činnosti, např. pomocí krabiček od zápalek. Výšky staveb mohou být (všechny údaje v centimetrech): 21, 29, 34, 37, 42, 45, 47, 50, 55, 60. Teoretickou podstatou úlohy jsou kombinace třetí třídy s opakováním ze tří čísel 20, 15 a 7.

Úloha 2: (46. r. Z4-I-4) Na vnějších rozích hřiště tvaru čtverce byly umístěné lampy umělého osvětlení. Navrhněte způsob, jak můžeme dvojnásobně zvětšit plochu hřiště (tvar čtverce se má zachovat), aby sloupy zůstaly stát mimo nové hřiště.

Řešení: Teoretickou podstatou úlohy je „klasický“ problém: Je-li dán čtverec o obsahu 1, pak čtverec, jehož vrcholy leží ve středech jeho stran, má obsah 0,5. Lze se o tom přesvědčit nejen výpočtem, ale i graficky, znázorníme-li v původním čtverci i obě úsečky spojující středy protilehlých stran. To je klíčem k této úloze. Každým vrcholem původního hřiště (umístěním lampy) vedeme rovnoběžku s úhlopříčkou původního hřiště (neobsahující tento vrchol). Průsečíky všech čtyř rovnoběžek budou tvořit vrcholy (rohy) nového hřiště, kde lampy budou umístěny ve středech stran.

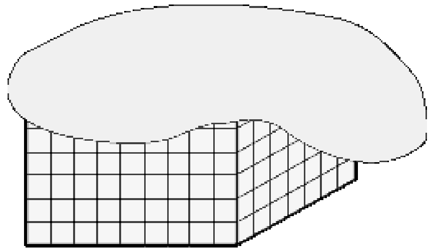
***Úloha 3**:* (48. r. Z4-I-1) Míša měl dřevěný hranolek o rozměrech 27 mm, 45 mm, 72 mm. Každou jeho stěnu natřel jinou barvou tak, jak to vidíš na obrázku 1. Dřív, než barva stačila zaschnout, položil kvádr hnědou stěnou na papír, potom ho překlopil na zelenou stěnu, potom na červenou, na modrou, na žlutou a naposledy na červenou. Nakonec hranolek odložil pryč a prohlédnul si celý obrázek. Jaký obsah má zabarvená část papíru? Jaký má obvod?



Obrázek 1. Barevný hranolek

Řešení: Tato úloha je náročná na prostorovou představivost a žáci zřejmě budou často využívat experimentu. První otázka je jednodušší a lze řešit i úsudkem. Stačí si uvědomit, že dvě protilehlé stěny mají týž obsah; pak snadno odvodíme, že v zabarvené části papíru bude každá ze tří různých stěn kvádru obsažena dvakrát, a tedy obsah zabarvené části je roven povrchu celého kvádru (12 798 mm^2, tj. přibližně 128 cm^2). Při hledání odpovědi na druhou z otázek se již asi bez experimentu neobejdeme. Uvedeme pouze výsledek: obvod zabarvené části papíru je složen z 5 úseček o délce 45 mm, 5 úseček o délce 72 mm a 3 úseček dlouhých 27 mm. Obvod je po výpočtu roven 666 mm.

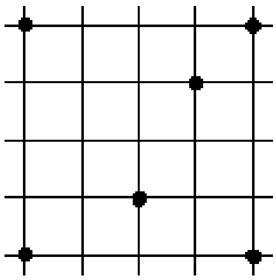
***Úloha 4**:* (48. r. Z4-I-3) Adam má 1638 stejně velkých modrých a bílých krychliček. Ze všech krychliček postavil kvádr, jehož část vidíte na obrázku 2. Přitom všechny krychličky uvnitř jsou bílé a zvenku je celý kvádr modrý. Kolik bílých a kolik modrých krychliček má Adam?



Obrázek 2. Částečně zakrytý kvádr

Řešení: Nejprve je nutné určit počet všech Adamových krychliček. Z obrázku vyčteme, že v podstavě je celkem 63 krychliček („9 × 7“). Protože všech krychliček je 1638, je výška kvádru 26 krychliček. Bílé krychličky jsou všechny vnitřní, tj. „7 × 5 × 24“, tedy po výpočtu 840 krychliček. Zbylé krychličky jsou modré, je jich tedy 798.

***Úloha 5**:* (48. r. Z4-I-5) Milan vyznačil na čtverečkovaném papíru 6 bodů (viz obrázek 3):



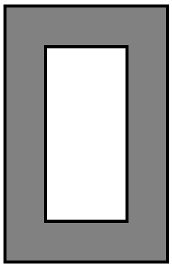
Obrázek 3. Body na čtverečkovaném papíře

Potom začal spojovat vyznačené body úsečkami tak, aby se tyto úsečky neprotínaly. Když už nemohl žádné dva z vyznačených bodů spojit, skončil. Jeho tři kamarádi udělali totéž. Může mít každý z nich jiný obrázek? Nakresli tyto 4 obrázky.

Řešení: Žáci budou zřejmě při řešení této úlohy užívat experimentování a budou „kreslit“ obrázky. Řešení není obtížné, tzn. snadno tyto potřebné 4 obrázky naleznou. Zvolíme-li počátek souřadné soustavy v bodě vlevo dole (bod [0, 0]), mají vyznačené body souřadnice: [0, 4], [2, 1], [3, 3], [4, 0], [4, 4]. Řešení pak lze vyjádřit následujícími trajektoriemi (kreslení obrázků jsme si již odpustili):

[0, 4] → [4, 4] → [4, 0] → [0, 0] → [2, 1] → [3, 3],
[0, 4] → [0, 0] → [4, 0] → [4, 4] → [3, 3] → [2, 1],
[0, 4] → [3, 3] → [4, 4] → [4, 0] → [0, 0] → [2, 1],
[0, 4] → [2, 1] → [3, 3] → [4, 4] → [4, 0] → [0, 0].

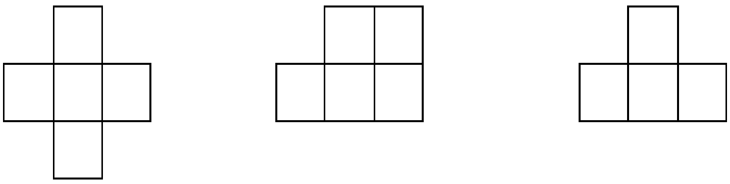
***Úloha 6**:* (49. r. Z4-II-1) Ondra a Zuzka dostali společnou maxi-čokoládu. Ondra z ní jedl první a snědl všechny „krajní“ dílky. Zuzce tak zůstalo 15 dílků. Kolik dílků měla maxi-čokoláda? Kdo snědl víc čokolády, Ondra nebo Zuzka? O kolik dílků



Obrázek 4. Maxi-čokoláda

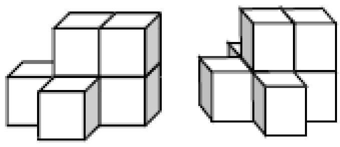
Řešení: Při řešení této úlohy je nutno využít názoru a zkušeností žáků z reálného života, podle nichž je počet dílků v každém řádku i sloupci čokolády vyjádřen přirozeným číslem. Vyjdeme z toho, že Zuzce zbylo 15 dílků. Protože rozklad čísla 15 na prvočinitele je $3 \cdot 5$, existují dvě možnosti: buďto 1 řádek o 15 dílcích nebo 3 řádky o 5 dílcích. Potom celá čokoláda měla buďto 3 řádky o 17 dílcích nebo 5 řádků o 7 dílcích. V prvním případě je celkový počet dílků roven 51, Ondra snědl 36 a Zuzka 15 dílků, ve druhém případě měla celá čokoláda 35 dílků, Ondra snědl 20 a Zuzka 15 dílků. Poznamenejme, že zkušenosti žáků se podstatně projevily v tom, že velká většina uvažovala pouze druhou možnost („čokoláda mající 3 řádky po 17 dílcích neexistuje“).

***Úloha** 7:* (52. r. Z4-I-3) Jirka postavil z dřevěných kostek na stole stavbu a zakreslil, jak jeho stavba vypadá shora, zepředu a zleva (Obr. č. 5). Jeho bratr Ivo stavbu doplnil stejnými kostkami na nejmenší možný kvádr. Kolik dřevěných kostek měl kvádr? Kolik kostek doplnil Ivo?



Obrázek. 5. Stavba z kostek (různé pohledy)

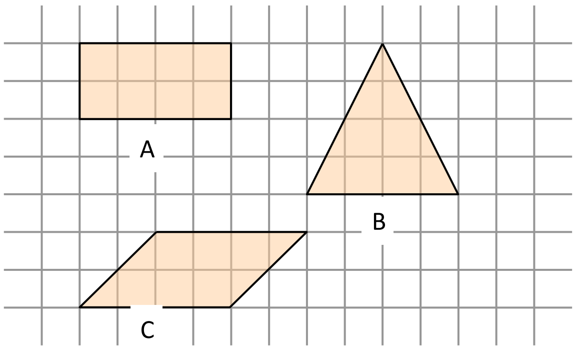
Řešení: Žák může situaci modelovat pomocí stavebnice (jde o domácí kolo). Těleso jsme nakreslili v pravém a levém nadhledu, aby bylo viditelné, že je složeno ze sedmi kostek. Podle obrázku měl kvádr 18 kostek a Ivo musel tedy doplnit 11 kostek.



Obrázek 6. Stavba z kostek

***Úloha 8*:** (53. r. Z4-I-4) Pavel rozstříhal obdélník A na obrázku 7 na několik trojúhelníčků. Ze všech těchto trojúhelníčků dokáže poskládat trojúhelník B z obrázku 7 a též ze všech těchto trojúhelníčků dokáže poskládat rovnoběžník C z obrázku 7**.**

ISSN 2694-8133



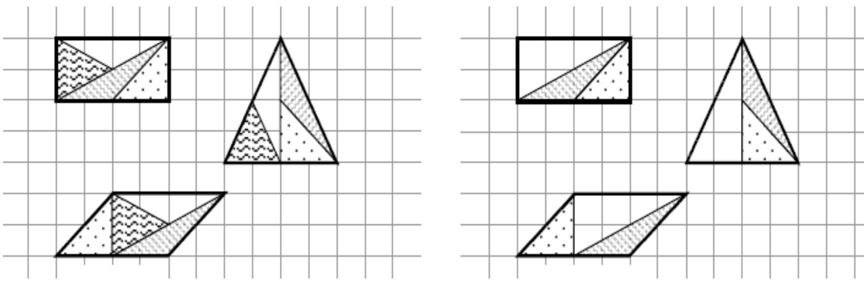
Obrázek 7. Ilustrace k úloze 8

Zjisti, jak Pavel stříhal, když počet trojúhelníčků byl

a) 4,
b) 3.

Vždy nakresli čáry, po kterých mohl Pavel stříhat. Dále nakresli trojúhelník B složený z malých trojúhelníčků i rovnoběžník C složený z malých trojúhelníčků. Při skládání se trojúhelníčky nesmí překrývat, a poskládané útvary nesmí být děravé.

Řešení: Úloha je pro žáky 4. ročníku ZŠ velmi náročná a vyžaduje experimentování pomocí vystřižených útvarů. Důležité je rovněž uvědomit si, že obsahy útvarů z obrázků A, B a C jsou stejné. Jako příprava pro řešení je doporučen tzv. Tangram. Tento historický hlavolam je založený na skládání rozličných útvarů ze základních dílů vzniklých jistým rozstříháním čtverce. Řešení je znázorněno na obrázku. Úloha a) je jednodušší v tom smyslu, že skládání lze provést pouhým posouváním vystřižených trojúhelníčků po podložce. V případě b) je již nutné některé díly převrátit.



Obrázek 8. Řešení úlohy 8

***Úloha 9**:* (55. r. Z4-I-3) Pohádkový nafukovací čtverec, který umí vyprávět, měl před pěti minutami délku strany 8cm. Při každé lži zvětší svůj obvod dvojnásobně. Při každé vyslovené pravdě se zmenší délka každé jeho strany o 2 cm. Za posledních 5 minut dvakrát lhal a dvakrát mluvil pravdu.

a) Jaký největší obvod může mít nyní?
b) Jaký nejmenší obvod může mít nyní?

Řešení: Vypočítejme všechny obvody, které mohl čtverec mít. Písmenem L označíme lež, písmenem P pravdivou informaci. Může nastat celkem 6 případů. Pro učitele poznamenejme, že se jedná o permutace čtvrté třídy ze dvou prvků L, P s opakováním, kdy každý z těchto prvků je v každé čtveřici obsažen dvakrát. Podle vztahu pro počet těchto permutací skutečně platí $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$.

LLPP $(8 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 2) \cdot 4 = 112$ cm
LPLP $[(8 \cdot 2 - 2) \cdot 2 - 2] \cdot 4 = 104$ cm
LPPL $(8 \cdot 2 - 2 - 2) \cdot 2 \cdot 4 = 96$ cm
PLLP $[(8 - 2) \cdot 2 \cdot 2 - 2] \cdot 4 = 88$ cm
PLPL $[(8 - 2) \cdot 2 - 2] \cdot 2 \cdot 4 = 80$ cm
PPLL $(8 - 2 - 2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 64$ cm

a) Největší možný obvod je 112 cm.
b) Nejmenší možný obvod je 64 cm.

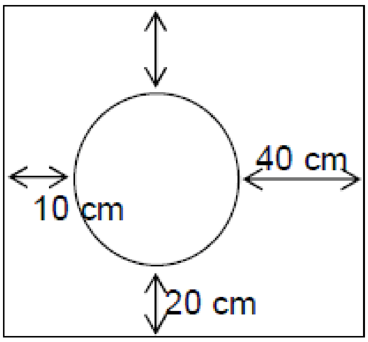
Úloha 10*:* (55. r. Z4-I-6) Majka má ve stavebnici jen stejně velké krychličky s hranou délky 3 cm. Když z nich postaví věž, která má na každém poschodí 4 krychličky, bude mít věž výšku 54 cm. Jak vysoká by byla jiná věž ze stejného počtu stejných krychliček, která by měla v každém poschodí 9 krychliček?

Řešení: Jestliže má každá krychle hranu délky 3 cm, tak je na výšku naskládaných $54 : 3 = 18$ krychliček. Ve stavebnici jich tedy je $18 \cdot 4 = 72$. Jestliže budeme do každého poschodí dávat po 9 krychlích, bude mít věž $72 : 9 = 8$ poschodí. Její výška proto bude $8 \cdot 3 = 24$ cm.

Úloha 11*:* (58. r. Z4-I-1) Na stole se čtvercovou deskou o straně délky 1 m byla „trochu nakřivo" umístěna kruhová dečka. Od nejbližší strany desky stolu byl její kraj vzdálený 10 cm, od sousední strany potom 20 cm a od nejvzdálenější strany 40 cm.

a) Jak daleko byl okraj dečky od čtvrté strany desky stolu?
b) Jaký poloměr měla dečka?

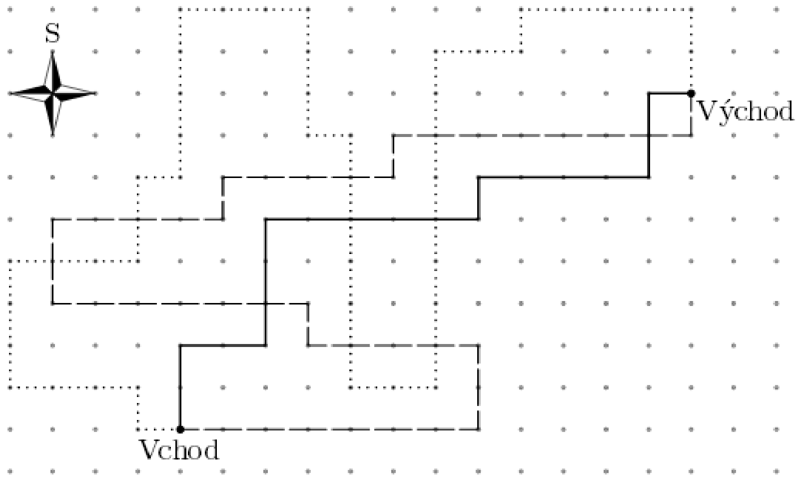
Řešení: Nejdůležitější je myšlenka „rozprostření" dečky na stůl a uvědomění si, co je vzdálenost od okraje. Předpokládáme, že si žáci nakreslí následující obrázek 9:



Obrázek 9. Stůl s kruhovou dečkou.

Délka hrany stolu je 100 cm. Ve vodorovném směru máme rozměry 10 cm, 40 cm a průměr dečky. Proto průměr dečky bude 100 cm − 10 cm − 40 cm = 50 cm. Ve svislém směru máme na obrázku 20 cm, průměr dečky a neznámý rozměr. Z obrázku vyjádříme, že poslední neznámý rozměr musí byť 30 cm. Od čtvrté strany stolu je dečka vzdálená 30 cm, poloměr dečky je tedy 25 cm.

Úloha 12: (Z5–I–1, 61. r.) Tři kamarádi Pankrác, Servác a Bonifác šli o prázdninách na noční procházku přírodním labyrintem. U vstupu dostal každý svíčku a vydali se různými směry. Všichni labyrintem úspěšně prošli, ale každý šel jinou cestou. V následující čtvercové síti jsou vyznačeny jejich cesty. Víme, že Pankrác nikdy nešel na jih a že Servác nikdy nešel na západ. Kolik metrů ušel v labyrintu Bonifác, když Pankrác ušel přesně 500 m?



Obrázek 10. Labyrint

Řešení: Nejdříve určíme, kterými cestami šli jednotliví kamarádi. K tomu potřebujeme vědět, na které světové strany vedou jednotlivé cesty. Cesta podle plné čáry vede pouze na sever a na východ. Čárkovaná cesta vede na sever, východ a západ. Tečkovaná cesta míří postupně na všechny světové strany. Jediná cesta, která nevede nikdy západním směrem, je ta vyznačená plnou čárou — patří tedy Servácovi. Tudy Bonifác jistě nešel. Ze zbylých dvou cest na jih nemíří ta čárkovaná — po ní tedy šel Pankrác. Takže Bonifác musel jít po tečkované čáře. Pankrác ušel 500m. Nyní spočítáme, po kolika úsečkách (tj. stranách čtverečku čtvercové sítě) šel:

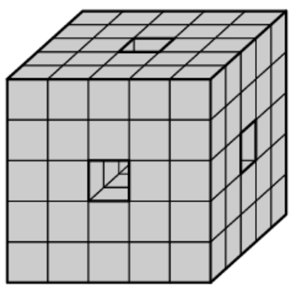
7(východ) + 2(sever) + 4(západ) + 1(sever) + 6(západ) + 2(sever) +4(východ) + 1(sever) + + 4(východ) + 1(sever) + 7(východ) + 1(sever) = 40.

Teď ještě určíme, po kolika úsečkách šel Bonifác:

1(západ) + 1(sever) + 3(západ) + 3(sever) + 3(východ) + 2(sever) + +1(východ) + 4(sever) + + 3(východ) + 3(jih) + 1(východ) + 6(jih) + 2(východ) + 8(sever) + 2(východ) + 1(sever) + + 4(východ) + 2(jih) = 50.

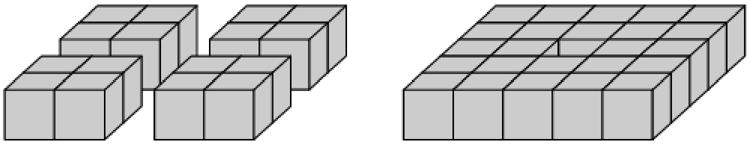
Jestliže 40 úseček měří 500 m, pak 10 úseček měří 500 : 4 = 125 (m). Takže 50 úseček měří 500 + + 125 = 625 (m). Bonifác ušel v labyrintu 625 metrů.

Úloha 13: (Z5–I–4, 61. r.) Na obrázku je stavba slepená ze stejných kostiček. Jedná se o krychli s několika dírami, kterými je vidět skrz a které mají všude stejný průřez. Z kolika kostiček je stavba slepena?



Obrázek 11. Krychle s otvory

Řešení: Stavbu rozdělíme čtyřmi vodorovnými řezy na pět vrstev. Prostřední vrstva je na obrázku vlevo, skládá se z 16 kostiček. Ostatní čtyři vrstvy vypadají všechny tak, jak ukazuje obrázek vpravo, a každá z nich se skládá z 24 kostiček. Na celou stavbu bylo použito $16 + 4 \cdot 24 = 112$ kostiček.

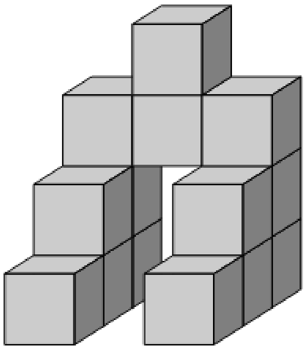


Obrázek 12. Řešení úlohy 13

Jiný nápad. Kolik kostiček chybí v tunelech?

Jiné řešení. Představme si, že stavba byla zhotovena bez „tunelů" a ty byly proraženy až dodatečně. Původně se tedy skládala z $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ kostiček. Proražením prvního tunelu stavba ztratila 5 kostiček, proražením dalších dvou tunelů ztratila po 4 kostičkách. Konečný počet kostiček tedy je $125 - 5 - 4 - 4 = 112$.

Úloha 14**:** (Z5–II–2, 62. r.) Na obrázku je stavba slepená ze 14 stejných krychliček. Stavbu chceme ze všech stran obarvit, tedy i zespodu. Jaká bude spotřeba barvy, když 10 ml barvy stačí na natření jedné celé krychličky?



Obrázek 13. Stavba ze 14 krychlí.

Možné řešení. Je šest různých směrů, jak se na stavbu, respektive na jednotlivé krychličky stavby, dívat. Pro každý směr spočítáme, kolik stěn krychliček bude potřeba natřít:

- Když se na obrázek podíváme shora, vidíme právě 7 stěn, které bude třeba natřít. Stejný počet napočítáme při pohledu zdola.
- Při pohledu zepředu vidíme celkem 8 stěn. Stejný počet napočítáme při pohledu zezadu.
- Při pohledu zleva vidíme 7 stěn, ale bude potřeba obarvit ještě dalších 5 stěn, které jsou zakryté - jedná se o krychličky v pravém pilíři stavby. Celkem jsme napočítali 12 stěn. Při pohledu zprava je situace stejná.
  Celkem tedy potřebujeme natřít $2 \cdot (7 + 8 + 12) = 2 \cdot 27 = 54$ stěn, což je stejné jako natřít 9 celých krychliček ($9 \cdot 6 = 54$). K natření jedné celé krychličky je potřeba 10 ml barvy, tudíž celkem potřebujeme $9 \cdot 10 = 90$ (ml) barvy.

Jiné řešení. Můžeme postupně probrat všechny krychličky ve stavbě a určit, kolik jejích stěn budeme natírat. Postupujeme po vrstvách shora dolů, v každé vrstvě po řadách zepředu dozadu, v každé řadě zleva doprava:

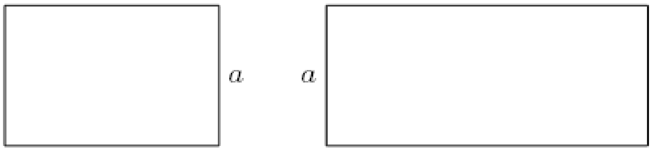
- V 1. vrstvě je jediná krychlička, u níž budeme natírat 5 stěn.
- Ve 2. vrstvě jsou tři krychličky – počítáme postupně 4 + 3 + 4 = 11 stěn.
- Ve 3. vrstvě jsou čtyři krychličky – počítáme postupně 4 + 4 + 3 + 3 = 14 stěn.
- Ve 4. vrstvě je šest krychliček – počítáme postupně 5 + 5 + 3 + 3 + 4 + 4 = 24 stěn.

Celkem tedy potřebujeme natřít 5 + 11 + 14 + 24 = 54 stěn. Další postup může být stejný jako v předchozím řešení.

Úloha 15: (Z5–II–2, 63. r.) Libor rozdělil obdélník jednou čarou na dva menší obdélníky. Obvod velkého obdélníku je 76 cm, obvody menších obdélníků jsou 40 cm a 52 cm. Určete rozměry velkého obdélníku.

Obrázek 14. Ilustrace k úloze 15

Řešení: Společnou stranu dvou menších obdélníků označíme a tyto dva obdélníky překreslíme oddělené od sebe.



Obrázek 15. Řešení úlohy 15

Součet obvodů dvou menších obdélníků je 40 + 52 = 92 (cm), což je o 16 cm více než obvod původního obdélníku, neboť 92 − 76 = 16. Těchto 16 cm odpovídá dvěma stranám *a*, strana *a* má proto délku 16 : 2 = 8 (cm).

Stejnou délku mají i dvě strany původního obdélníku, součet délek jeho zbylých dvou stran je 76 − 2 · 8 = 60 (cm), každá z nich je tedy dlouhá 60 : 2 = 30 (cm). Rozměry původního velkého obdélníku jsou 30 cm a 8 cm.

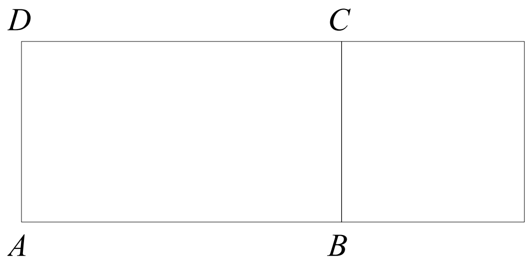
Úloha 16: (Moll 2009, s. 95) Součet stran trojúhelníka ABC je 10 cm. Strana AB má stejnou délku jako strany AC a BC dohromady. Strana BC je třikrát delší než strana AC. Určete délky stran trojúhelníka ABC.

Řešení: Úloha je pozoruhodná tím, že odpověď je negativní, tzn. takový trojúhelník neexistuje. Zajímavé je rovněž to, že při řešení je nutno využít trojúhelníkovou nerovnost. Označíme-li délky stran klasicky *a, b, c,* pak podle zadání platí soustava rovnic

$$c = a + b$$
$$a = 3b$$
$$a + b + c = 10$$

Tato soustava sice řešení má (3,75; 1,25, 5), ale první z rovnic nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost.

Úloha 17: (Moll 2009, s. 95) K pozemku tvaru obdélníka ABCD byl přidán čtvercový pozemek nad stranou BC původního pozemku. Zvětšený pozemek má obvod 100 m. Strana přidaného čtverce má délku 16 m. Určete rozměry původního pozemku.



Obrázek 16. Zvětšení pozemku z úlohy 17

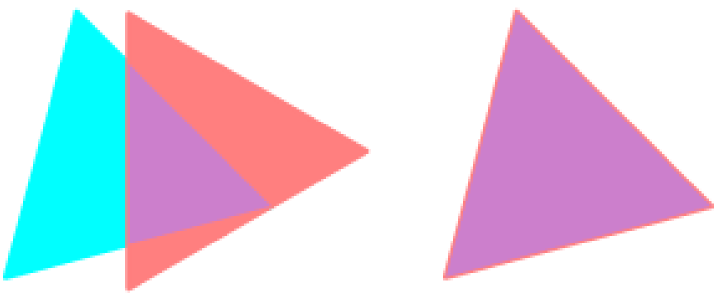
Řešení: Spočívá ve vhodném označení. Označíme-li rozměry původního pozemku *a, b*, pak přímo ze zadání plyne $b = 16$. Strana prodlouženého pozemku má nyní délku $a + 16$. Ze zadání platí vztah $2.(a+16) + 2.16 = 100$, odkud plyne $a = 18$.

***Úloha 18*:** (Z5–I–2, 63. r.) Vojta má dvě stejná sklíčka tvaru rovnostranného trojúhelníku, která se liší pouze svou barvou — jedno je červené, druhé modré. Pokud se sklíčka položí přes sebe, vznikne útvar fialové barvy. Udejte příklad překrývání sklíček, při kterém mohl Vojta dostat:

a) fialový trojúhelník,
b) fialový čtyřúhelník,
c) fialový pětiúhelník,
d) fialový šestiúhelník.

Řešení: Každý z fialových mnohoúhelníků lze realizovat mnoha různými způsoby; uvádíme několik možných příkladů.

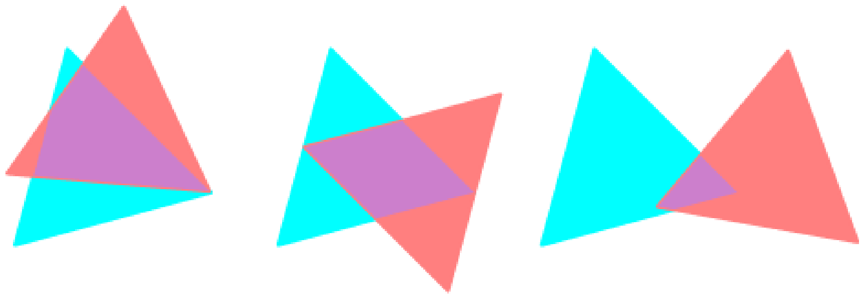
a) fialový trojúhelník:



Obrázek 17. Trojúhelníky – možná řešení

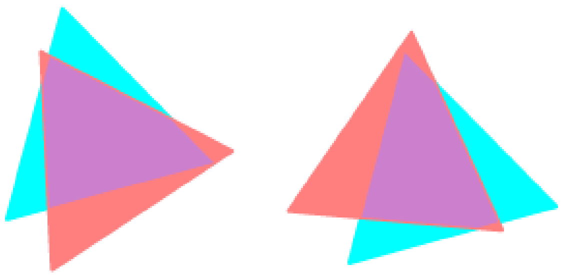
ISSN 2694-8133

b) fialový čtyřúhelník:



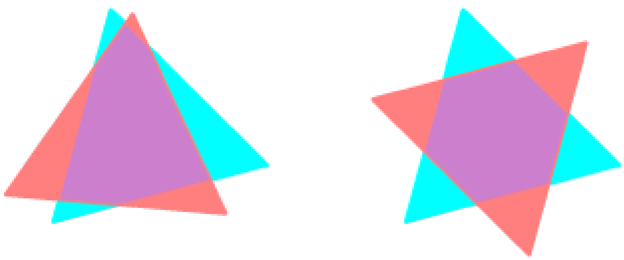
Obrázek 18. Čtyřúhelníky – možná řešení

c) fialový pětiúhelník:



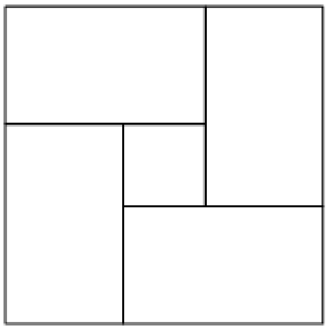
Obrázek 19. Pětiúhelníky – možná řešení

d) fialový šestiúhelník:



Obrázek 20. Šestiúhelníky – možná řešení

Úloha 19: (Z5–I–3, 66. r.) Na obrázku 19 je čtvercová dlaždice se stranou délky 10dm, která je složena ze čtyř shodných obdélníků a malého čtverce. Obvod malého čtverce je pětkrát menší než obvod celé dlaždice. Určete rozměry obdélníků.



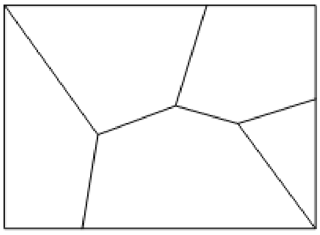
Obrázek 21. Dlaždice z úlohy 19

Řešení: Obvod malého čtverce je pětkrát menší než obvod dlaždice, proto i jeho strana je pětkrát menší než strana dlaždice. Strana malého čtverce tedy měří 10 : 5 = 2 (dm). Přitom délka strany dlaždice je rovna součtu délek strany malého čtverce a dvou kratších stran obdélníku. Kratší strana obdélníku tedy měří (10 − 2) : 2 = 4 (dm). Současně délka strany dlaždice je rovna součtu délek kratší a delší strany obdélníku. Delší strana obdélníku tedy měří 10 − 4 = 6 (dm). Rozměry obdélníků jsou 4 dm × 6 dm.

Úloha 20: (Z5–II–1, 67. r.) Na obrázku 24 je znázorněno pět výběhů části zoo. Každý výběh obývá jeden z pěti druhů zvířat. Přitom víme, že

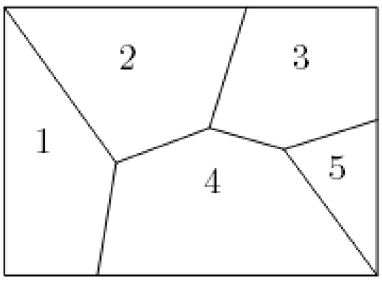
- výběh žiraf má pět stran,
- výběh opic nesousedí ani s výběhem nosorožců, ani s výběhem žiraf,
- výběh lvů má stejný počet stran jako výběh opic,
- ve výběhu tuleňů je bazén.

Určete, která zvířata jsou ve kterém výběhu.



Obrázek 22. Plán ZOO - pět výběhů

Řešení: Označme jednotlivé výběhy číslicemi jako na obrázku 25:



Obrázek 23. Označení výběhů

Podle první informace jsou žirafy buď ve výběhu 3, nebo 4. Podle druhé informace víme, že výběh žiraf nemá sousedit s výběhem opic. Výběh 4 však sousedí se všemi ostatními výběhy, proto musí být žirafy ve výběhu 3. Jediný výběh, který s výběhem žiraf nesousedí, je výběh 1. Podle druhé informace musí být ve výběhu 1 opice. Kromě výběhu žiraf nesousedí s výběhem opic už jenom výběh 5. Podle druhé informace musí být ve výběhu 5 nosorožci. Jediný výběh, který má stejný počet stran jako výběh opic, je výběh 2. Podle třetí informace musí být ve výběhu 3 lvi. Zbývá jediný neobsazený výběh, a to výběh 4. Tuleni jsou tedy ve výběhu 4.

3. Závěr

V příspěvku jsme uvedli celkem 20 úloh z matematické olympiády v ČR a SR, kategorie týkající se 1. stupně základní školy. Tyto úlohy, vzhledem k jejich zařazení převážně do domácího kola, mohou dále na žáky působit i výchovně (rozvoj trpělivosti, systematičnost v práci apod.). Hlavním cílem bylo připomenout, že matematické soutěže existují i na 1. stupni ZŠ, mají zde své opodstatnění, a proto by učitelé měli úlohy z matematických soutěží do výuky zařazovat a využívat a rovněž žáky k účasti v matematických soutěžích motivovat.

Literatura

Beránek, J. (2009). Školní matematické soutěže – řešení zajímavých úloh. In: *Setkání učitelů matematiky II - Matematika a hry* (10 s.). Brno: Pedagogická fakulta MU.

Kouřim, J., Šedivý, O. & Kuřina, F. (1985). *Základy elementární geometrie pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Kuřina, F. (1990). *Umění vidět v matematice*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Matematická olympiáda v ČR, 61. až 67. ročník [online]. [cit. 2019-01-21]. Dostupné z http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly

Matematická olympiáda v SR [online]. [cit. 2019-01-23]. Dostupné z http://www.gljs.sk/mo/.

Moll, P. & Mezník, I. (2009). *Příručka pro přípravu k přijímacím zkouškám na bakalářské studijní programy.* Brno: VUT Brno, CERM.

Půlpán, Z., Kuřina, F. & Kebza, V. (1992). *O představivosti a její úloze v matematice*. Praha: Academia.