

RUDRATOVA JEZDCOVA ŠACHOVÁ PROCHÁZKA

Karel PASTOR¹

¹ Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)
karel.pastor@upol.cz

Abstrakt

Otevřenou jezdcovu procházku na šachovnici 8×8 je možné realizovat mnoha způsoby. V našem článku se zaměříme na takové otevřené jezdcovy procházky, které docílíme rozdělením šachovnice 8×8 na dvě menší šachovnice 4×8 . Jezdcovu procházku provedeme nejprve na jedné šachovnici 4×8 , poté se jezdec přesune svým obvyklým tahem na druhou šachovnici 4×8 , na které jezdcovu procházku dokončíme. Z možných jezdcových procházek na šachovnici 4×8 vybereme Rudratovu, která je dobře zapamatovatelná a může tak být atraktivní i pro žáky od 6 do 11 let.

Klíčová slova: kombinatorické myšlení, šachy, deskové hry, matematické šachové problémy.

THE RUDRATA KNIGHT'S TOUR

Abstract

An open knight's tour on an 8×8 chessboard can be realized in many ways. Our article will focus on such open knight tours, which can be achieved by dividing the 8×8 chessboard into two smaller chessboards 4×8 . We first perform the knight's tour on one chessboard 4×8 , and then the knight moves with his usual move to the second chessboard 4×8 , on which we complete the knight's tour. From the possible knight tours on smaller chessboards 4×8 , we will select the Rudrata knight's tour that is easy to remember and can thus be attractive even for pupils from 6 to 11 years old.

Keywords: combinatorial thinking, chess, board games, mathematical chess problems.

1. Úvod

K rozvoji kombinatorických schopností žáků základní školy mohou významným způsobem přispět deskové hry. Šachová hra patří dlouhodobě mezi nejznámější deskové hry. K rozvoji kombinatorických schopností však není nutné hraní partií, což může být spolu s osvojením všech šachových pravidel poměrně zdlouhavé, a ne pro všechny žáky záživné, ale stačí, aby žák porozuměl chodu některých šachových figur a poté již může (s pomocí papíru nebo nějaké webové aplikace) matematické šachové úlohy řešit.

Základní matematické šachové úlohy jsou popsány například v (Chybová, 2017, 2018) nebo na (Wikipedia, 2024a). V našem článku se budeme věnovat jezdcovým procházkám po šachovnici. Připomeňme, že šachový jezdec se na šachovnici pohybuje tak, že se posune nejprve o dvě pole rovně a potom jedno pole do strany, tj. ve tvaru písmene L (Wikipedia, 2024b).

Jezdcovou procházkou pak rozumíme úlohu navštívit šachovým jezdcem všechna pole šachovnice právě jednou v souladu s jeho pohybem podle šachových pravidel. Pokud se šachový jezdec ze svého posledního navštíveného pole nemůže svým tahem dostat na pole začátku své procházky, hovoříme o otevřené jezdcově procházce. V opačném případě pak mluvíme o uzavřené procházce. Podle šachových pravidel se partie hrají na šachovnici 8×8 , nicméně jezdcovu procházku je možné realizovat i na jiných šachovnicích obdélníkového tvaru. Otázku, na kterých šachovnicích uzavřená jezdcova procházka existuje, kompletně řeší Schwenkova věta (Schwenk, 1991).

Věta (Schwenkova). *Pro všechna přirozená $m \leq n$ existuje na šachovnici $m \times n$ uzavřená jezdcova procházka právě tehdy, když není splněna žádná z následujících podmínek:*

- i. m a n jsou obě lichá čísla,
- ii. $m = 1, 2$ nebo 4 ,
- iii. $m = 3$ a $n = 4, 6$ nebo 8 .

Schwenkova věta tak například říká, že na šachovnici 9×9 nebo 3×8 uzavřená jezdcova procházka neexistuje, kdežto například na šachovnici 6×6 uzavřená jezdcova procházka existuje, jak potvrzuje obrázek 1.

13	36	23	28	15	2
22	27	14	1	24	29
7	12	35	26	3	16
34	21	8	17	30	25
11	6	19	32	9	4
20	33	10	5	18	31

Obrázek 1. Šachovnice 6×6

Realizovat otevřenou jezdcovu procházku je samozřejmě jednodušší než uzavřenou, pro žáky základní školy je tak vhodnější věnovat se především otevřeným jezdcovým procházkám. I to se může ukázat jako nelehký úkol, který je však možné modifikovat tím, že žáky vyzveme, aby se pokusili na dané šachovnici obdélníkového tvaru provést co nejdelší jezdcovu procházku.

A. Conradovi a jeho kolegům se podařilo dokázat větu (Conrad a kol., 1994), která jednoznačně udává, pro které šachovnice obdélníkového tvaru otevřená jezdcova procházka existuje.

Věta (Conrad a kol., 1994). *Pro všechna přirozená $m \leq n$ existuje na šachovnici $m \times n$ otevřená jezdcova procházka právě tehdy, když není splněna žádná z následujících podmínek:*

- i. $m = 1$ nebo 2 ,
- ii. $m = 3$ a $n = 3, 5$ nebo 6 ,
- iii. $m = 4$ a $n = 4$.

Podle předchozí věty nelze například najít otevřenou jezdcovu procházku na šachovnici 4×4 nebo 3×6 . Naopak existuje otevřená jezdcova procházka na šachovnici 5×5 (pro kterou podle Schwenkovy věty neexistuje uzavřená jezdcova procházka). Otevřená jezdcova procházka na šachovnici 5×5 patří zřejmě mezi nejsnáze realizovatelné – stačí začít jezdcovu procházku v některém rohu, poté se jezdcem „mechanicky“ pohybovat „dokola poblíž obvodu šachovnice“ a až ke konci procházky (na obrázku 2 to může být v okamžiku tahu 22) promyslet, jakým způsobem procházku zdárně dokončit.

1	14	9	20	3
24	19	2	15	10
13	8	23	4	21
18	25	6	11	16
7	12	17	22	5

Obrázek 2. Šachovnice 5×5

2. Rozdělení šachovnice

Při hledání jezdcovy procházky (ať už uzavřené neb otevřené) je v některých případech možné rozdělit danou šachovnici na šachovnice menších rozměrů a jezdcovu procházku realizovat postupně na každé z nich. Příkladem může být šachovnice 10×10 , kterou si můžeme rozdělit na 4 šachovnice 5×5 , jak ukazuje Obrázek 3.

Obrázek 3. Rozdělení šachovnice 10×10

Otevřenou jezdcovu procházku začneme (obrázek 4) v levé horní šachovnici 5×5 : budeme postupovat stejně jako na obrázku 2. Tahem 26 se přesuneme do dolní levé šachovnice 5×5 , ve které se můžeme jezdcem pohybovat nejprve stejně jako u levé horní šachovnice, ale při tahu 46 se od jezdcovy procházky v levé horní šachovnici odchýlíme tak, abychom se mohli 51. tahem přesunout do dolního rohu pravé dolní šachovnice 5×5 .

V pravé dolní šachovnici pak pokračujeme analogicky jako při předchozím vyplňování šachovnic 5×5 , tj. „dokola poblíž jejího obvodu“, přičemž 73. tah provedeme tak, abychom se 76. tahem mohli přesunout do pravé horní šachovnice 5×5 , kde jezdcovu procházku dokončíme.

1	14	9	20	3	82	87	92	97	80
24	19	2	15	10	93	100	81	86	91
13	8	23	4	21	88	83	98	79	96
18	25	6	11	16	99	94	77	90	85
7	12	17	22	5	76	89	84	95	78
26	39	34	45	28	57	62	67	72	55
47	44	27	40	35	68	75	56	61	66
38	33	46	29	50	63	58	73	54	71
43	48	31	36	41	74	69	52	65	60
32	37	42	49	30	51	64	59	70	53

Obrázek 4. Jezdcova procházka na šachovnici 10×10

Již zmíněná věta A. Conrada a jeho kolegů dokládá, že otevřenou jezdcovu procházku je možné uskutečnit na nekonečném množství šachovnic obdélníkového tvaru. Nicméně standardní šachovnice má rozměry 8×8 . Na šachovnici o těchto rozměrech je možné najít 9 795 914 085 489 952 otevřených jezdcových procházek za předpokladu, že dvě otevřené jezdcovy procházky lišící se pouze směrem budeme považovat za jedinou procházku (Knight's Tour Notes, 2023). Zkušenosti autora článku po zadání této úlohy žákům a studentům různých věkových kategorií ukazují, že provést kompletní jezdcovu procházku na několik prvních pokusů je výjimečnou záležitostí. Za velký úspěch řešitele je podle mínění autora možné považovat, pokud jezdcova procházka přesáhne 60 tahů. Pro žáky a studenty se zdá být zajímavé, když se seznámí s řešením úlohy, které se dá snadno zapamatovat.

Obrázek 5. Rozdělení šachovnice 8×8

Rozdělení šachovnice 8×8 na čtyři menší šachovnice (obrázek 5) obdobně jako tomu bylo v případě šachovnice 10×10 s cílem provést jezdcovu procházku postupně na každé šachovnici rozměru 4×4 však k cíli nevede, protože podle věty A. Conrada a jeho kolegů otevřená jezdcova procházka na šachovnici 4×4 neexistuje. Nicméně při této souvislosti zmiňme, že takové rozdělení šachovnice 8×8 využil Leonhard Euler v roce 1759, přičemž však v každé menší šachovnici rozdělil pole do 4 skupin a šachový jezdec při své procházce navštívil postupně vždy všechna pole stejného typu (na obrázku 6 se jedná nejprve o pole červená, pak modrá, bílá a nakonec zelená). Blíže je možné se s Eulerovou šachovou procházkou seznámit v (Chybová, 2017, 2018) nebo (Pastor, 2023).

1	54	21	40	15	58	17	42
22	39	2	55	20	41	14	59
53	4	37	24	57	16	43	18
38	23	56	3	44	19	60	13
5	52	25	36	9	62	31	46
26	35	8	49	32	45	12	61
51	6	33	28	63	10	47	30
34	27	50	7	48	29	64	11

Obrázek 6. Eulerova otevřená jezdcova procházka

3. Rundratova jezdcova procházka

Podle věty A. Conrada a jeho kolegů však existuje otevřená jezdcova procházka na šachovnici 4×8 . Těchto procházek existuje 124 352 (Wikipedia, 2024c). Budeme se dále zabývat jezdcovou procházkou kašmírského básníka Rudraty, který žil v 9. století našeho letopočtu (Wikipedia, 2024). Rudratova procházka může dobře posloužit našemu cíli ukázat žákům dobře zapamatovatelnou jezdcovu procházku na šachovnici 8×8 . Rudratova otevřená procházka je předvedena na obrázku 7 (Knight's Tour Notes, 2023). Všimněme si, že začneme v levém horním rohu a poté pokračujeme „dokola poblíž obvodu šachovnice“ až do tahu 16 (tedy poloviny jezdcovy procházky po šachovnici 4×8). Poté v dalším obdobném pokračování brání provedený tah 9, ale můžeme si všimnout, že je potřeba navštívit jezdcovou procházkou levý dolní roh šachovnice, což tahy 17-19 zajistíme a poté se vrátíme tahem 20 na obvod šachovnice. Nyní jezdcovu procházku dokončíme tak, abychom vyplnili pravý horní roh a abychom byli schopni se v případě šachovnice 8×8 dostat 33. tahem do levého horního rohu dolní poloviny šachovnice 8×8 .

1	30	9	20	3	24	11	26
16	19	2	29	10	27	4	23
31	8	17	14	21	6	25	12
18	15	32	7	28	13	22	5

Obrázek 7. Rudratova procházka

Jezdcova procházka na šachovnici 8×8 , kterou docílíme dvojnásobným provedením Rundratovy jezdcovy procházky na šachovnici 4×8 , je znázorněna na obrázku 8.

1	30	9	20	3	24	11	26
16	19	2	29	10	27	4	23
31	8	17	14	21	6	25	12
18	15	32	7	28	13	22	5
33	62	41	52	35	56	43	58
48	51	34	61	42	59	36	55
63	40	49	46	53	38	57	44
50	47	64	39	60	45	54	37

Obrázek 8. Využití Rundratovy procházky

Pokud bychom na obrázku 33. tah provedli způsobem, který je uveden na obrázku 9, tak otevřenou jezdcovu procházku na dolní polovině šachovnice 8×8 můžeme také dokončit, například způsobem uvedeným na obrázku 9. Tento způsob až do 61. tahu kopíruje jezdcovu procházku zmíněnou v (Knight's Tour Notes, 2023) spolu s dalšími zajímavými poznámkami.

1	30	9	20	3	24	11	26
16	19	2	29	10	27	4	23
31	8	17	14	21	6	25	12
18	15	32	7	28	13	22	5
35	54	45	60	33	62	47	50
44	57	34	53	46	49	40	63
55	36	59	42	61	38	51	48
58	43	56	37	52	41	64	39

Obrázek 9. Alternativa Rundratovy procházky

4. Závěr

Provedení otevřené jezdcovy procházky na klasické šachovnici 8×8 může být pro žáky základních i středních škol zajímavou výzvou. V článku byla pozornost věnována především procházce, která dvakrát využívá Rundratovu jezdcovu procházku na šachovnici 4×8 . Algoritmus Rundratovy procházky je relativně lehce zapamatovatelný, což jej činí atraktivním i pro žáky 1. stupně ZŠ.

Dále jsme připomněli Schwarzovu větu a větu A. Conrada a jeho kolegů o existenci jezdcových procházek na šachovnicích obdélníkového tvaru, které mohou inspirovat učitele pro zadávání úkolu najít jezdcovu procházku i na jiné než standardní šachovnici 8×8 . Zájemci se pak mohou pokusit jezdcovu procházku také naprogramovat.

Literatura

- Conrad, A., Hindrichs, T., Morsy, H., & Wegener, I. (1994). Solution of the Knight's Hamiltonian Path Problem on Chessboards. *Discrete Applied Mathematics* 50(2). [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(92\)00170-Q](https://doi.org/10.1016/0166-218X(92)00170-Q)
- Chybová, L. (2017). *Šachové úlohy v kombinatorice* [diploma thesis]. Charles University, Prague.
- Chybová, L. (2018). Šachové úlohy v kombinatorice. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 63(2), 125–147. <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/147328>
- Knight's Tour Notes. (2023). Compiled by George Jelliss © 2000–2025. Retrieved from <https://www.mayhematics.com/t/t.htm>
- Pastor, K. (2023). Eulerova šachová procházka. *Elementary Mathematics Education Journal*, 5(2), 46–52. https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No2/Vol5No2_Pastor.pdf
- Schwenk, A. J. (1991). Which Rectangular Chessboard Have a Knight's Tour?. *Mathematics Magazine*, 64(5), 325–332. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1991.11977627>
- Wikipedia. (2024a). *Mathematical chess problem*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_chess_problem
- Wikipedia. (2024b). *Pravidla šachů*. Retrieved from https://cs.wikipedia.org/wiki/Pravidla_šachů
- Wikipedia. (2024c). *Jezdcova procházka*. Retrieved from https://cs.wikipedia.org/wiki/Jezdcova_procházka