ISSN 2694-8133

MATEMATICKÉ ÚLOHY A KOUZLA JAKO MOŽNOSTI PRO MOTIVACI V MATEMATICE

Jaroslav BERÁNEK[1]
[1]Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta
beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

V příspěvku je obsaženo několik zajímavých a netradičních matematických úloh a kouzel. Tyto úlohy lze využít při motivaci žáků ke studiu matematiky a získávání jejich zájmu o matematiku. Mezi nematematiky působí podobné úlohy a kouzla velmi efektně; mohou však u nich navozovat dojem, že matematika je něco nadpřirozeného, že se jí nelze naučit a podobně. Proto je úkolem pro učitele matematiky takové úlohy a problémy žákům zadávat, společně s nimi objasňovat jejich matematickou podstatu a tím zvyšovat jejich zájem o učení se matematice.

Klíčová slova: matematická úloha, Catalanova čísla, logické úlohy, dělitelnost

MATHEMATIC PROBLEMS AND MAGIC TRICKS AS MOTIVATION IN MATHEMATICS

Abstract

The article contains several interesting and unusual mathematic problems and magic tricks which can be used while teaching mathematics for gaining and enhancing the pupils' interest. Such problems can be perceived by those who are not mathematicians as something supernatural and can imply the idea that mathematics is impossible to be mastered. Therefore, the teacher's task is to assign such problems to their pupils while clarifying their mathematics essence.

Keywords: mathematic problem, Catalan numbers, logic problems, divisibility

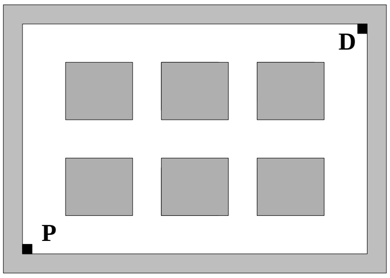
1. Úvod

Při individuální práci s talentovanými žáky v matematice hraje důležitou roli jejich motivace. To vyžaduje vyhledávání vhodných námětů, úloh a problémů pro matematické vzdělávání těchto nadaných žáků. Kromě možnosti využití celostátně organizovaných matematických soutěží (Matematická olympiáda a Klokan) a matematických soutěží organizovaných v regionech (Pythagoriáda, Pikomat, ...) je velmi výhodné i zadávání zajímavých netradičních úloh přímo ve výuce nebo v zájmových kroužcích věnovaných matematice. Tyto úlohy a problémy mohou současně přispívat jak k motivaci žáků, tak i k rozvíjení jejich matematického myšlení, kdy hravou formou mohou žáci objevovat nové matematické poznatky. Několik takových úloh i matematických hříček obsahuje tento příspěvek. Zadání úloh je možné případně upravit tak, aby motivovalo žáky k experimentování a hraní si při hledání řešení. Některé z těchto úloh mohou poskytnout rovněž námět pro další teoretické úvahy, pro učitele a studenty učitelství matematiky je vždy stručně uvedeno teoretické řešení.

ISSN 2694-8133

2. Zajímavé a netradiční úlohy

Úloha 1: [Beránek, 2007, s. 17] Na obrázku je plán města Obdélníkova. Šedou barvou jsou uvnitř plánu vyznačeny domy, bílou barvou ulice. Poštovní doručovatel má úkol doručit dopis z pošty P do domu D. Kolika různými cestami může jít, jestliže se může pohybovat pouze na sever a na východ?



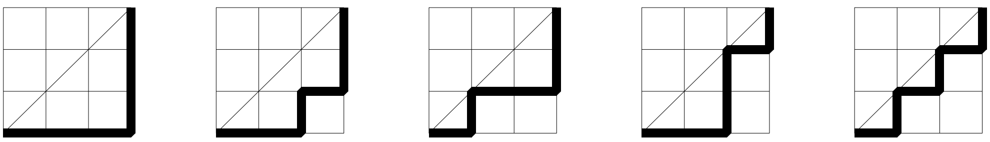
Obrázek 1. Plán města Obdélníkova

Řešení: Úlohu je vhodné buď řešit pomocí znázornění („stromový“ diagram) nebo pomocí vhodného označení a úsudku. Při matematickém řešení postupujeme takto: Povolené směry chůze označme S, V; úkolem je nyní určit počet všech pětic písmen, sestavených ze dvou písmen S a tří písmen V. Všech možností je deset (jedná se o permutace s opakováním). Podobné úlohy se vyskytují poměrně často („procházky po čtvercové síti“). V obecném případě, označíme-li počet výskytu písmen S jako p a počet písmen V jako q, je počet všech možných cest určen vztahem $P' = \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!}$. V našem zadání je $p = 2$, $q = 3$, tedy $P' = 10$.

Poznámka: Úlohy kombinatorického charakteru se v matematických soutěžích vyskytují velmi často. Podobného typu jako první úloha je i úloha druhá, jejímž námětem jsou také procházky po čtvercové síti. Procházkou po čtvercové síti se přitom rozumí taková cesta, která vede pouze po přímkách této sítě (změna směru je tedy možná pouze v mřížových bodech).

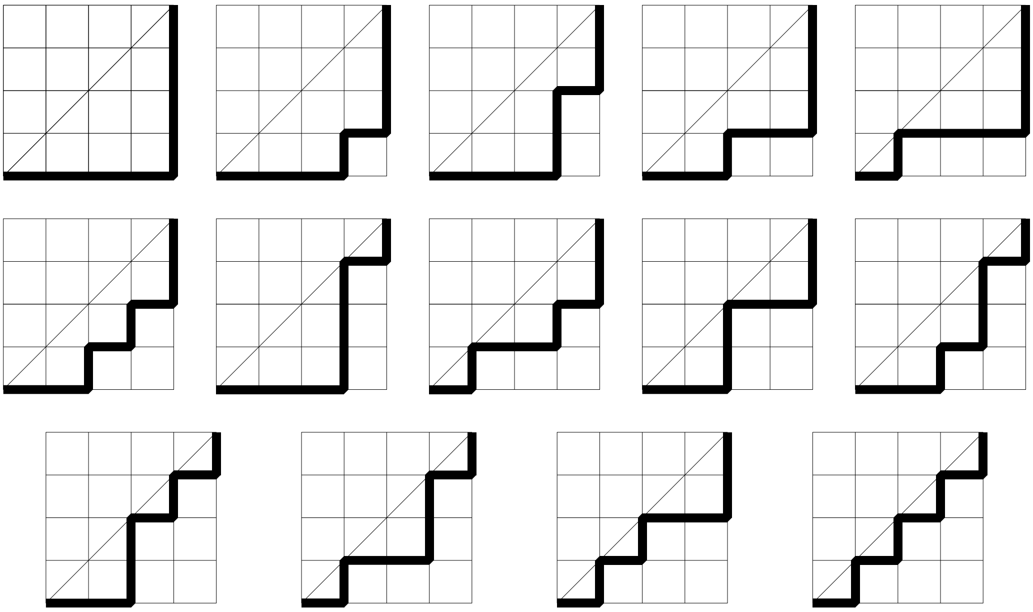
Úloha 2: [Beránek, 2008a, s. 45] Jsou dány čtvercové sítě o rozměrech 3×3 a 4×4. Kolik existuje „cest“ po této čtvercové síti z levého dolního rohu do pravého horního rohu, které nepřekročí diagonálu?

Řešení: Žáci zřejmě budou postupovat, podobně jako v úloze 1, experimentálně. Hledané počty cest jsou po řadě 5 a 14. Řešení je ilustrováno následujícími obrázky (převzato z Beránek, 2008a):



Obrázek 2. Ilustrace řešení pro čtvercovou síť o rozměrech 3×3

ISSN 2694-8133



Obrázek 3. Ilustrace řešení pro čtvercovou síť o rozměrech 4×4

Pro učitele nyní uvedeme i matematickou podstatu problému a jeho zobecnění na síť $n \times n$ (viz Beránek, 2008a; Wikipedia, 2024). Nejprve problém přesně matematicky zformulujeme: Zvolme počátek souřadné soustavy do levého dolního rohu sítě a předpokládejme nyní, že pohyb v síti je realizován pouze pomocí dvou typů tahů: $[x, y] \to [x + 1, y]$ (tj. o jeden úsek na “východ”) a $[x, y] \to [x, y + 1]$ (o jeden úsek na “sever”). Problémem je nyní určit počet takových cest z levého dolního rohu do pravého horního rohu, které nepřekročí diagonálu. Hledaný počet cest je určen tzv. Catalanovými čísly c_n. Při řešení se nejprve odvodí rekurentní vztah $c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot c_{n-i}$: cestu vždy „rozdělíme“ bodem, v němž se poprvé dotkne diagonály (připouštíme i počáteční a koncový bod cesty) a užijeme princip součinu. Na základě rekurentního vztahu lze nalézt obecný vztah pro počet Catalanových čísel c_n. (teoretické odvození lze nalézt v Beránek, 2008a; Wikipedia, 2024). Uvedeme pouze výsledek (podrobnosti viz Beránek, 2008a, s. 43–44]) ve třech možných ekvivalentních tvarech:

$$c_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}, \qquad c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}, \qquad c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Vztahy (1) určují tzv. Catalanova čísla (byla studována už Eulerem). Poznamenejme, že první dva ze vztahů platí i pro $n = 0$, zatímco třetí nikoliv. Pro zařazení tohoto problému do výuky lze postupovat různě. Na základní škole se omezíme pouze na praktické experimentální určení c_n pro několik prvních hodnot n, viz úloha 2; na škole střední kromě zmíněného induktivního postupu lze uvést i vzorce (1) a procvičovat úpravy výrazů s faktoriály a kombinačními čísly (pro Catalanova čísla platí zajímavé vztahy, např. $c_{n+1} = \frac{2\cdot(2n+1)}{n+2} \cdot c_n$ pro $n \in \mathbb{N}, c_0 = 1$). Pro úplnost ještě dodejme, že Catalanova čísla c_n jsou lichá právě tehdy, když $n = 2^k - 1$. Pro všechna ostatní n jsou sudá. Catalanova čísla velmi rychle rostou; uvedeme několik prvních hodnot (včetně hodnoty c_0): 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357970, ... Lichými čísly jsou skutečně (nepočítáme-li triviální případ pro $n = 0$) hodnoty $c_3 = 5$, $c_7 = 429$, $c_{15} = 9694845$ atd.

ISSN 2694-8133

Závěrem již zbývá pouze krátká zmínka o Catalanovi. Belgický matematik Eugène Charles Catalan se narodil 30. 5. 1814 v Bruges. V roce 1841 ukončil studium na École Polytechnique v Paříži. Jeho prvním působištěm byla Charlemagne College, kde přednášel deskriptivní geometrii. Od roku 1865 působil na Univerzitě v Liège, od roku 1885 byl členem Belgické akademie věd. Nějaký čas byl rovněž členem francouzské poslanecké sněmovny. Zemřel 14. 2. 1894 v Liège. Zabýval se zejména teorií řetězových zlomků, deskriptivní geometrií, teorií čísel a kombinatorikou.

Úloha 3: [Beránek, 2008b, s. 38] Na rodinné oslavě se sešlo několik členů rodiny: otec, matka, syn, dcera, bratr, sestra, bratranec, sestřenice, synovec, neteř, strýc, teta (každý má k někomu z přítomných některý z uvedených příbuzenských vztahů). Jaký nejmenší počet osob byl na oslavě, jestliže víme, že se v této rodině neuzavřel žádný příbuzenský svazek?

Řešení: Nejmenší možný počet osob, vyhovujících zadání, jsou čtyři, a to dva muži a dvě ženy v příbuzenském vztahu buďto otec se synem a matka s dcerou nebo otec s dcerou a matka se synem. Otec a matka jsou sourozenci (bratr a sestra), tzn. jejich děti jsou bratranec a sestřenice, atd. Největším problémem pro žáky je uvědomit si fakt, že otec a matka podle zadání úlohy nejsou manželé.

Úloha 4 [Beránek, 2008b, s. 41] Kouzelník přinesl tři stejné krabice. Na jedné bylo víko s nápisem JABLKO–HRUŠKA, na druhé JABLKO–JABLKO, na třetí HRUŠKA–HRUŠKA. Potom řekl: „*V krabicích jsou jablka a hrušky tak, jak to vidíte na nápisech na víkách, tedy v jedné jsou dvě jablka, ve druhé dvě hrušky a ve třetí jablko a hruška. Víka jsem vyměnil tak, že ani jedno není na správné krabici. Můžete vytáhnout jeden kus ovoce ze kterékoliv krabice (ale jen z jedné). Do krabice se přitom nesmíte podívat. Potom mi musíte říct, ve které krabici je jaké ovoce.*“ Ze které krabice mají děti vytáhnout ovoce, aby správně určily obsah krabic?

Řešení: Protože ani jedno víko není na správné krabici (a z teorie permutací víme, že existují pouze dvě permutace tříprvkové množiny, které neobsahují pevný bod), měl kouzelník pouze dvě možnosti, jak víka vyměnit. Ukážeme je na obrázku (v horním řádku jsou nápisy na víkách, ve spodním obsah krabic (uvádíme pouze zkratky):

J J	H H	J H
H H	**J H**	**J J**

J H	J J	H H
H H	**J H**	**J J**

Obrázek 4. Ukázka možné výměny vík na krabicích

Pokud vytáhneme jakýkoliv druh ovoce z krabice s víkem J J nebo H H, zjistíme po chvíli přemýšlení nad obrázky (podrobnosti neuvádíme), že existuje více možností, tj. nelze jednoznačně odpovědět. Zajímavý je případ, kdy vytáhneme ovoce z krabice označené J H. V této krabici jsou buďto jen dvě jablka nebo jen dvě hrušky. Vytáhneme-li tedy jablko, lze jednoznačně usoudit na případ podle levé tabulky, při vytažení hrušky jde o tabulku pravou. Na této úloze je důležitá úvaha o permutacích, zjištění dvou uvedených možností a nakreslení obrázku. Děti musí vytáhnout ovoce z krabice s víkem J H.

Úloha 5: [Beránek, 2008b, s. 41] Král zavřel princeznu do jedné ze tří komnat hradní věže, ve druhých dvou byli umístěni lvi. Honza přišel princeznu vysvobodit. Na dveřích první komnaty našel nápis: „*Tady princezna není*.“ Na druhých dveřích stálo: „*V této komnatě je lev*.“

Na třetích dveřích byl nápis: „*Princezna je ve druhé komnatě*.“ Jen jediný z těchto nápisů byl pravdivý, ostatní dva byly nepravdivé. Když Honza princeznu najde, dostane ji za manželku. Otevře-li však dveře nesprávné, sežere ho lev. Pomozte Honzovi určit, ve které komnatě je princezna.

Řešení: Budeme zkoumat tři možnosti podle toho, který z nápisů budeme považovat za pravdivý. Nechť je pravdivý první nápis, princezna je tedy ve 2. nebo 3. komnatě. Podle třetího nápisu ale princezna není ani ve druhé, což je ve sporu s nepravdivostí tvrzení na druhých dveřích, za nimiž je skutečně lev. Předpokládejme, že druhý nápis je pravdivý, první a třetí nepravdivé; z nepravdivého prvního nápisu pak plyne, že je princezna v první komnatě. Další nápisy tuto skutečnost jen potvrdí (ve druhé je opravdu lev a princezna není ve druhé komnatě). Musíme ale zkoumat i třetí možnost, zda nemá problém více řešení (častá chyba studentů, kteří na toto často zapomínají; najdou-li jedno řešení, nezkoumají již další možnosti). Je-li ale pravdivý třetí nápis, musí být princezna ve druhé komnatě. Podle nepravdivého prvního nápisu musí ale být i v první, což je spor. Bezesporná je tedy pouze druhá z možností; pravdivý byl druhý nápis a princezna je v první komnatě.

Úloha 6*:* [Beránek, 2007, s. 20] Ořech a dvě třešně stojí tolik jako jedno jablko. Jablko a ořech stojí tolik jako jedna hruška. Dvě hrušky stojí tolik jako šest třešní. Za kolik ořechů je jablko?

Řešení: Tato slovní úloha je již poměrně složitá a vyžaduje kromě vhodného označení „zručnost“ při úpravě rovnic. Ze zadání plyne: O + 2T = J, J + O = H, 2H = 6T (tzn. H = 3T). Do druhé rovnice dosadíme vztah v závorce, máme J + O = 3T, odtud 2J + 2O = 6T. První z rovnic vynásobíme třemi (3O + 6T = 3J) a za 6T do ní dosadíme z posledního vztahu: 3O + (2J + 2O) = 3J, odkud J = 5O. Jablko je tedy za 5 ořechů. Otázkou ovšem je, jak si s uvedenými rovnicemi poradí žáci. Nejspíše zřejmě zvolí experiment (tvorba tabulek), případně úsudek. Ze prvních dvou podmínek zadání po úvaze plyne že H = 2O + 2T, ze třetí podmínky plyne 2H = 6T, proto 2H = 4O + 4T. Dohromady platí 4O + 4T = 6T, tedy 4O = 2T, tzn. T = 2O. Podle zadání J = O + 2T, po dosazení J = 5O. I nyní dostáváme řešení, že jablko je za 5 ořechů.

3. Matematické hříčky a kouzla

S různými matematickými hříčkami a kouzly se setkáváme poměrně často. Zejména mezi nematematiky působí taková kouzla velmi efektně. Problémem však je, že u lidí, kteří matematiku nemají v oblibě a nezajímají se o ni, mohou navozovat dojem, že matematika je jako věda něco nadpřirozeného, že se jí nelze naučit a podobně. Proto je úkolem, zejména pro učitele matematiky, tyto jevy vysvětlovat a objasňovat jejich matematickou podstatu, která bývá většinou velmi jednoduchá a snadno ji zvládnou nejen studenti oboru učitelství pro 1. stupeň ZŠ, ale i jejich žáci. V tomto příspěvku několik takových hříček a kouzel ukážeme.

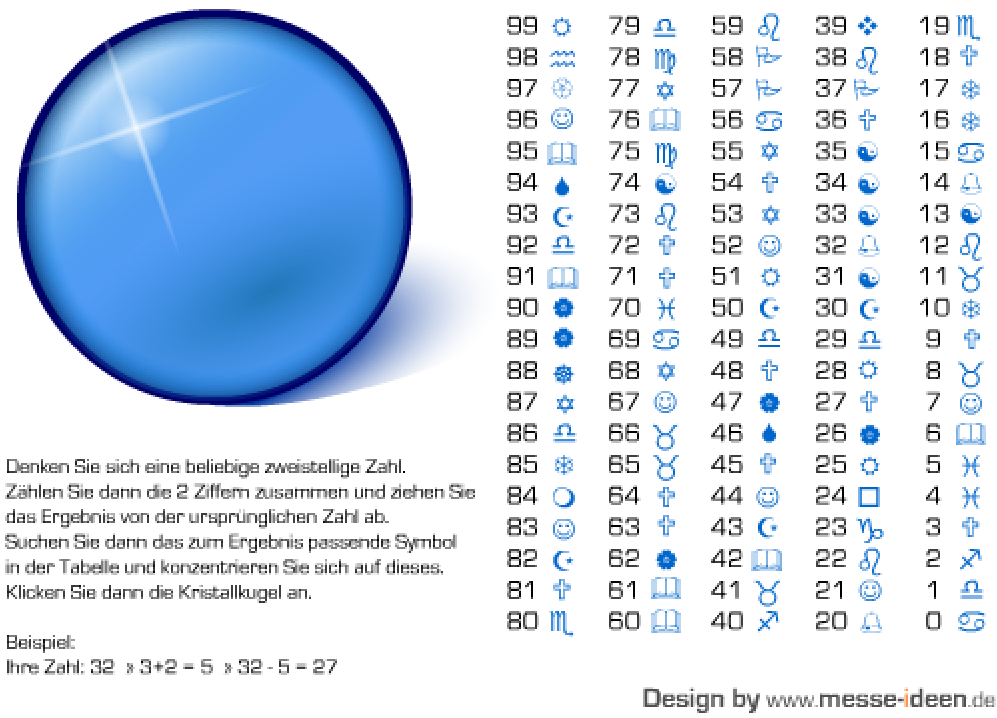
1. Magická koule [Magická koule - triky, kouzla a magie, 2023]
Po zadání webové adresy (http://www.ultrapc.cz/magicka-koule) se vygeneruje magická koule (viz obrázek na následující straně). Úkol pro řešitele je následující:

Myslete si libovolné dvojciferné číslo, sečtěte jeho cifry a výsledek odečtěte od původního čísla. V tabulce vyhledejte výsledné číslo a koncentrujte mysl na symbol vedle něho. Poté klikněte na magickou kouli.

ISSN 2694-8133

Na magické kouli se vždy objeví symbol, na který jste se koncentrovali a který je uveden u výsledného čísla. Jaké je zdůvodnění?

Ať je myšlené číslo jakékoliv, výsledek je vždy číslo dělitelné devíti. Označíme-li myšlené číslo xy, pak platí $(10x + y) - (x + y) = 9x$, $x = 1, 2, \ldots, 9$ (čísla *90* a *99* výsledným rozdílem být nemohou). U všech čísel 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 se vždy při spuštění koule vygeneruje týž symbol (při každém novém vygenerování samozřejmě jiný).



Obrázek 5. Magická koule

2. Hledání ideálního partnera (partnerky) [Kuncová, 2008]

Občas se můžeme setkat s následujícím úkolem (původní autor není dohledatelný):

1. Zvol si libovolné přirozené číslo od 1 do 9
2. Toto číslo vynásob třemi
3. K součinu přičti číslo tři
4. Získané číslo znovu vynásob třemi
5. Urči ciferný součet vzniklého čísla

Podle čísla, které Ti vyšlo, najdeš svůj skutečný idol:
1. Albert Einstein
2. Ondřej Vetchý
3. Bill Gates
4. Mel Gibson
5. Michael Jackson
6. Brad Pitt
7. Arnold Schwarznegger
8. Boleslav Polívka
9. Hurvínek

Jaké je matematické řešení této hříčky? Při jakékoliv volbě původního čísla vždy vychází jako výsledek číslo devět. V seznamu ideálních osob je proto vždy prvních osm sestaveno z některých populárních herců, sportovců a jiných významných osob, na devátém místě je pak osoba, která má vyjít jako výsledek (nějaká žertovná postavička nebo sám odesílatel dopisu). Nyní následuje vysvětlení:

Zvolené číslo označme x. Jednotlivé kroky podle zadání lze pak zapsat takto:
$x, 3x, 3x + 3, 9x + 9 = (10x + 9) - x = 10x + (9 - x)$, když jsme v posledním kroku využili jednoduchého umělého obratu. Ciferný součet je $x + (9 - x) = 9$.

3. Hádání čísla 1 [Kuncová, 2008, s. 41]
Zvolte si tři po sobě jdoucí trojciferná čísla. Sečtěte je. Určete ciferný součet vypočteného součtu, dále určete ciferný součet předchozího ciferného součtu atd. Pokračujte tak dlouho, až obdržíte jednociferné číslo. Číslo si zapamatujte. Při pohledu na původně zvolená tři čísla vám řeknu, k jakému výsledku jste došli. Jak je to možné?

Řešení: Záleží na postavení čísla dělitelného třemi mezi třemi zvolenými po sobě jdoucími čísly. Když bude v řadě jako první, dostaneme číslo 3, když bude v řadě jako druhé, dostaneme číslo 9. Bude-li jako třetí z nich, dostaneme výsledek 6.

Ilustrace (číslo dělitelné třemi je vytištěno tučně):

$\mathbf{612} + 613 + 614 = 1839$	$1 + 8 + 3 + 9 = 21$	$2 + 1 = 3$
$311 + \mathbf{312} + 313 = 936$	$9 + 3 + 6 = 18$	$1 + 8 = 9$
$910 + 911 + \mathbf{912} = 2733$	$2 + 7 + 3 + 3 = 15$	$1 + 5 = 6$

Důkaz: Číslo dělitelné třemi nechť je $a = 100x + 10y + z$. Platí $x + y + z = 3p$, kde číslo $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ podle předpokladu, že zvolená čísla jsou trojciferná. Odtud plyne $3p \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$.

a) Nechť a je na prvním místě. Platí:
$(100x + 10y + z) + (100x + 10y + z + 1) + (100x + 10y + z + 2) = 3(100x + 10y + z) + 3$. Ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z)$ je $3x + 3y + 3z = 9p$, $p \in \{1, 2, ..., 9\}$, odtud tedy $9p \in \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81\}$. Ciferný součet čísla $9p$ je vždy roven 9.
Nyní určíme ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z) + 3$. S ohledem na předchozí úvahy je roven $3x + 3y + (3z + 3) = 9p + 3$; $9p + 3 \in \{12, 21, 30, 39, 48, 57, 66, 75, 84\}$, ciferný součet všech těchto čísel je 3 nebo 12, výsledný ciferný součet je tedy 3.

b) Nechť a je na druhém místě. Platí:
$(100x + 10y + z - 1) + (100x + 10y + z) + (100x + 10y + z + 1) = 3(100x + 10y + z)$. Stejně jako v prvním případě, ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z)$ je $3x + 3y + 3z = 9p$, $p \in \{1, 2, ..., 9\}$, tedy $9p \in \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81\}$. Ciferný součet čísla $9p$ je vždy roven 9.

c) Nechť a je na třetím místě. Platí:
Analogicky jako v předchozích dvou případech, ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z)$ je vždy roven 9; Nyní určíme ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z) - 3$. Ten je roven $3x + 3y + (3z - 3) = 9p - 3$; $9p - 3 \in \{6, 15, 24, 33, 42, 51, 60, 69, 78\}$, ciferný součet všech těchto čísel je 6 nebo 15, výsledný ciferný součet je tedy 6.

4. Hádání čísla 2 [Kuncová, 2008, s. 41]

Zvolte si libovolné přirozené číslo od 1 do 9. Vynásobte toto číslo nejprve číslem 9 a součin potom ještě číslem 12 345 679 a sdělte mi výsledek; podle něj poznám číslo, které jste si mysleli.

Řešení: Je velmi jednoduché, uvedeme jej bez komentáře:

$$1 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 111\,111\,111$$
$$2 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 222\,222\,222$$
$$3 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 333\,333\,333$$
$$4 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 444\,444\,444$$
$$5 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 555\,555\,555$$
$$6 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 666\,666\,666$$
$$7 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 777\,777\,777$$
$$8 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 888\,888\,888$$
$$9 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 999\,999\,999$$

5. Určení zašifrovaného data [Pereľman, 1985, s. 95]

Zvolte si libovolné datum v roce (den, měsíc). Toto datum zašifrujte takto: Číslo označující den v měsíci vynásobte číslem 12, číslo označující měsíc v roce vynásobte číslem 31. Oba součiny sečtěte. Sdělíte-li mi součet, vypočítám z něho myšlené datum.

Řešení: Tato úloha je již složitější a její řešení vyžaduje znalost neurčitých rovnic v oboru celých čísel. Označíme-li číslo dne v měsíci jako x, číslo měsíce v roce jako y a vypočtený součet jako c, vede úloha k řešení neurčité rovnice

$$12x + 31y = c,$$

kde $x, y \in \mathbb{N}, x \le 31, y \le 12, c \in \mathbb{N}, 43 \le c \le 744.$ Tato rovnice je vždy řešitelná, neboť čísla 12 a 31 jsou nesoudělná. V oboru přirozených čísel vždy existuje jediné řešení $[x, y]$. Jako příklad zvolme datum 24. 4., tedy $x = 24, y = 4, c = 288 + 124 = 412.$ Jediným řešením neurčité rovnice $12x + 31y = 412$ v oboru $\mathbb{N}$ je $x = 24, y = 4.$

Důležité je nyní dokázat výše uvedené tvrzení, že v oboru přirozených čísel existuje pro každé přípustné číslo c vždy jediné řešení. Postupujeme sporem. Nechť pro dané číslo c existují dvě různá řešení $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $x_1, x_2 \le 31,\ \ y_1, y_2 \le 12$. Platí tedy

$$12x_1 + 31y_1 = c,$$
$$12x_2 + 31y_2 = c.$$

Odečteme druhou rovnici od první, dostaneme $12(x_1 - x_2) + 31(y_1 - y_2) = 0.$ Číslo $12(x_1 - x_2)$ musí být dělitelné číslem $31.$ Protože $1 \le x_1, x_2 \le 31,$ platí $x_1 - x_2 < 31.$ Číslo $12(x_1 - x_2)$ může být tedy dělitelné číslem 31 pouze pro $x_1 - x_2 = 0,$ tedy $x_1 = x_2.$ Pak ale musí platit vztah $31(y_1 - y_2) = 0,$ tedy $y_1 = y_2.$ Dohromady tedy platí $[x_1, y_1] = [x_2, y_2].$

Poslední poznámka se týká možné snahy „publika“ zmást předkladatele úlohy zašifrováním neexistujícího data. V tom případě ale rovnice buďto nemá žádné řešení nebo jich má více. Jako příklad uveďme, že nám bylo oznámeno číslo $c = 561.$ Obecným řešením sestavené neurčité rovnice $12x + 31y = 561$ je $x = 39 - 31t, y = 3 + 12t.$ Rovnice má dvě kladná řešení $[39, 3]$, $[8, 15]$, která ale označují nemožná data.

ISSN 2694-8133

4. Závěr

Je nepochybné, že motivace má ve výuce matematiky významné a nezastupitelné místo, a tedy je nutné hovořit o ní i s budoucími učiteli matematiky, a to i na 1. stupni základní školy. Motivovaní studenti projevují větší zájem o učení se matematice a většinou dosahují i lepších studijních výsledků. Motivovat žáky a studenty lze různými způsoby; může to být využití konstruktivistického učení, dnes zdůrazňované zejména metodou VOBS (Výuka orientovaná na budování schémat), kdy žáci sami vyvozují některé poznatky, může to být využití historických témat ve výuce (např. historické numerace, jednotky délky, obsahu a objemu užívané v historii apod.). Další možností pro získávání zájmu o matematiku je zařazování zajímavých úloh a problémů do výuky. Některé náměty poskytnul i tento příspěvek.

Literatura

Beránek, J. (2007). Práce s talentovanými žáky v matematice vede k úspěchu u talentových přijímacích zkoušek. In: *Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního vzdělávání.* (s. 17–19). Plzeň : Západočeská univerzita.

Beránek, J. (2008a). Catalanova čísla a jejich užití. In: *Sborník příspěvků ze XXVI. vědeckého kolokvia*. (s. 43–51). Brno : Univerzita Obrany.

Beránek, J. (2008b). Logické úlohy na 1. stupni základní školy. In: *Matematické vzdělávání z pohledu žáka a učitele primární školy.* (s. 38–42). Olomouc : Univerzita Palackého.

Kuncová, V. (2008). *Historie matematiky ve vztahu k vyučování matematice na 1. stupni ZŠ*. [Diplomová práce, Masarykova univerzita]. https://is.muni.cz/th/mpwti/

Magická koule - triky, kouzla a magie. (2023, 19. listopadu). http://www.ultrapc.cz/magicka-koule.

Pereľman, J. I. (1985). *Zajímavá algebra*. (169 s.). Praha : SNTL.

Wikipedia. (2024, 13. února). *Catalan numbers*. http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number.