Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics

The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Olomouc 2024

ISSN 2694-8133

Univerzita Palackého v Olomouci
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

ve spolupráci s

Jednotou českých matematiků a fyziků
pobočný spolek Olomouc

Elementary Mathematics Education Journal

ročník 6, číslo 1

2024

Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

in cooperation with

The Union of Czech Mathematicians and Physicists
Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 6, No. 1

2024

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Vydavatel: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Česká republika

Adresa a kontakty:
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Informace pro autory:
Časopis uveřejňuje články k aktuálním problémům z teorie elementární matematiky, o inovacích, trendech a výzkumech v primárním a preprimárním matematickém vzdělávání. Jednotlivé články jsou anonymně posuzovány dvěma odborníky v recenzním řízením typu „double-blind peer review“. Další informace a podrobné pokyny pro autory jsou k dispozici na webu: http://emejournal.upol.cz.

Za kvalitu obrázků, jazykovou správnost, dodržení bibliografické normy a dodržování publikační etiky odpovídají autoři jednotlivých článků.

Časopis vychází dvakrát ročně.

Ročník 6, číslo 1

ISSN 2694-8133

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Publisher: Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Czech Republic

Editor-in-chief: David Nocar (Palacký University Olomouc, Czech Republic)

Address and contacts:
Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc
Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Czech Republic
emej@upol.cz

Information for authors:
The journal publishes articles on current issues in the theory of elementary mathematics, about innovation, trends and research in primary and pre-primary mathematics education. Each article is reviewed by two anonymous experts ("double-blind peer review"). More information and other instructions for authors are available at: http://emejournal.upol.cz.

The authors of the articles are responsible for the quality of the images, language accuracy, compliance with bibliographic standards and adherence to publication ethics.

The journal is published twice a year.

Vol. 6, No. 1

ISSN 2694-8133

Obsah

Content

ISSN 2694-8133

THE PREDICTIVE POWER OF A MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICS ENGAGEMENT SCALE ON STUDENTS' MATHEMATICS ACHIEVEMENT IN EKITI STATE, NIGERIA

Janet ADEGBUYI[1], Roseline SAMA[2]
[1] University of Ibadan, Institute of Education (Nigeria)
[2] Alex Ekweme Federal University, Ndufu Alike (Nigeria)
adeyemisi1969@gmail.com, roselineanochiwa@gmail.com

Abstract

This study examined the relationships between student engagement and academic achievement using a multi-dimensional student mathematics engagement scale to determine the engagement factors specifically relevant to students' mathematics achievements. A survey design was applied in this study. A multistage sampling procedure was used to select a sample of 1008 Senior Secondary School students from 24 schools in Ekiti State, Nigeria. Robust 6-dimensional student mathematics Engagement scales (SMES) with a reliability index of each of the sub-scales of the SMES ranging from 0.68 to 0.87 were used to predict students' achievement in mathematics. (These dimensions were: Personal Agency Engagement, Positive Affective Engagement, Negative Affective Engagement, Positive Behavioural Engagement, Negative Behavioural Engagement and Cognitive Engagement). Regression analysis of the sub-scales showed that only Negative Behaviour Engagement predicted students' achievement in Mathematics ($\beta = -0.12$, $t = -0.2952$, $p < 0.05$). This implies that students with negative behaviour engagement tend to perform poorly in mathematics. Teachers should use any opportunity to select resources that can arouse students' interest and make them vigorous learners during mathematics lessons for better performance.

Keywords: Student mathematics engagement scale, multi-dimensional, Prediction of Mathematics achievement

1. Introduction

The ultimate goal in all educational endeavours is to realize meaningful achievement and learning outcomes through a series of classroom instructional practices and student engagement. By implication, there is a close link between engagement and achievement. Consequently, an educational system with little or no meaningful student engagement will barely bear positive outcomes.

Adegbuyi (2019) refers to student engagement as a multiple-dimensional concept comprising six discrete dimensions namely; positive affective, negative affective, positive behavioural, negative behavioural, cognitive and agentic or personal agency dimensions. These six dimensions are interrelated. Positive affective engagement refers to students' positive responses to teachers, learning tasks, schools, classmates, and student's genuinely treasured learning. Negative affective engagement denotes students' negative reactions in the classroom. These are the existence of annoyance, dryness, and worry.

Positive behavioural engagement describes the high level of students' involvement in teaching and learning activities in terms of devotion and effort (Salhab and Daher, 2023).

Students display excellent performance during class. It also involves the effort students put into their academics to effect a positive change in learning outcomes. This effort includes participation, task completion, performance and natural skills (Sweet et. al, 2021). Negative behavioural engagement refers to students' level of apathy during class, inability to complete homework and solve academic problems during class, and students' truancy or coming late to class.

Cognitive engagement describes students' level of investment in class activity, appreciation of the worth of learning and readiness to go beyond the least requirements (Capone and Lepore, 2022). It also involves the level of students' persistence in solving academic problems, students' perceptions and beliefs about course materials, and the readiness to put on the energy needed to comprehend difficult concepts. Agentic engagement or personal agency refers to students' deliberate, vigorous, and constructive influence on the drift of teaching they acquire through questioning, articulating of favorites, and students' demand for what they desire from the teacher (Bui, 2023)

Although student engagement has been examined as a multi-dimensional concept (Hastie, et. al 2022) and some studies have drawn attention to the positive relationships that exist between student engagement and achievement, there is limited research directly investigating the relationships between the different dimensions of student engagement and academic achievement in mathematics in Ekiti state. Therefore, the basic purpose of this study was to examine the relationships between student engagement and academic achievement using a multi-dimensional mathematics engagement scale to determine the extent to which student engagement explains or predicts students' mathematics achievement. In addition, the engagement factors specifically relevant to the mathematics achievements of students were also examined.

Research Question

1. How reliable are each sub-scales of the student Mathematics Engagement scale?
2. Is there any relationship among the identified factors of the Student's Mathematics Engagement scale?
3. Which of the student Mathematics engagement scale sub-scales is the best predictor of Mathematics achievement?

Objective of the Study

This study examined the relationships between student engagement and academic achievement using a multi-dimensional student mathematics engagement scale to determine the extent to which student engagement explains or predicts students' mathematics achievement. In addition, the engagement factors specifically relevant to the mathematics achievements of students were also examined to see how learning and achievement in Mathematics can be improved.

2. Literature Review

2.1. Empirical Studies on Mathematics Engagement and Achievement

Yang, and Sanborn (2021) identified that active participation in mathematics classes and consistent homework completion are robust predictors of academic success. Complementing these findings, empirical studies have demonstrated that regular attendance and engagement in mathematics-related activities are correlated with higher academic achievement (Tshering, 2024).

ISSN 2694-8133

Research by Han and Liou-Mark (2023) has shown that students who exhibit positive emotional responses toward mathematics tend to perform better academically. This is supported by studies, such as those by (Abín et. al, 2020) which confirm that students' interest in and enjoyment of mathematics are significant predictors of their achievement in the subject.

Syaiful, Huda, Mukminin, and Kamid, (2022) emphasized the role of cognitive strategies, such as metacognition and critical thinking, in enhancing mathematics performance. Supporting this, research by Minarni and Napitupulu (2020) indicated that students who utilize higher-order thinking skills and effective study strategies in mathematics tend to achieve superior academic results.

Wu, et al. (2022) found that positive peer relationships and supportive teacher-student interactions significantly contribute to higher academic performance. Alam and Mohanty (2023) highlighted the importance of a supportive social environment in nurturing mathematics achievement among secondary school students.

Fung, Tan and Chen (2018) explored the relationships between student engagement and mathematics achievement using a sample of 295,416, 15-year-old students from 11,767 secondary schools in 34 countries who participated in the Program for International Student Assessment (PISA) 2012. Their research assessed affective, behavioral, and cognitive engagement, revealing that more engaged students achieved higher scores, with cognitive engagement showing the strongest relationship with achievement. Furthermore, students who are highly engaged in at least two dimensions had higher achievement levels than those who engaged in only one dimension.

2.2. Multidimensional Scales and Predictive Power

Maamin, Maat, and Iksan, (2021) examined the relationship between student engagement and mathematical achievement among secondary school students. They found that affective engagement had the strongest predictive power for mathematics achievement, followed by behavioural and cognitive engagement.

Quintero et al. (2022) developed and validated the Mathematics and Science Engagement Scales, which measure engagement across behavioural, emotional, cognitive, and social dimensions. Their work confirmed the multidimensional nature of engagement and its predictive validity for academic performance.

3. Methodology

3.1. Research Design

A survey design of the Instrumentation research type was applied in this study. This type of research authenticates large and small populations by selecting small participants from the population to establish the connection that exists among constructs.

3.2. Sample and Sampling Technique

A multistage sampling procedure was used to select a sample of 1008 Senior Secondary School 3 students. Participants were selected from 24 schools in Ekiti State, Nigeria. First, one Senatorial District was randomly selected from the existing three Senatorial Districts in Ekiti State. From the selected Senatorial District, there are five Local government areas out of which four LGAs were randomly selected. From each of the selected Local government areas, simple random sampling was used to select three public senior secondary schools and three private senior secondary schools. Thus, the number of schools in this work was 12 public senior secondary schools and 12 private senior secondary schools respectively. Finally, 42 SS2 students were randomly selected from each of the 24 schools ($24 \cdot 42 = 1008$ students).

ISSN 2694-8133

3.3. Instrument: Students Mathematics Engagement Scale

The instrument consists of six sub-scales with 35 items of students' mathematics engagement scale viz: (Personal Agency Engagement, Positive Affective Engagement, Negative Affective Engagement, Positive Behavioural Engagement, Negative Behavioural Engagement and Cognitive Engagement). The scale was first constructed by Adegbuyi and Adegoke (2017) through Exploratory Factor Analysis and Parallel Analysis with 45 items. Thereafter, the scale was validated and standardized by Adegbuyi (2020) with 35 items through confirmatory factor analysis and a graded response model of the IRT framework.

Table 1. Method of Data Analysis

Research Question	Statistical software package
1. How reliable are each sub-scales of the students' Mathematics Engagement scale?	Reliability analysis using Ordinal Alpha coefficient analysis
2. Is there any relationship among the identified factors of the Student's Mathematics Engagement scale?	Confirmatory factor analysis, AMOS package
3. Which of the students' Mathematics engagement scale sub-scale is the best predictor of Mathematics achievement?	Inferential statistics using multiple Regressions in AMOS package

4. Results and Discussion

Research Question 1: How reliable are each sub-scales of students' Mathematics Engagement scale?

Table 2. Reliability of all the 6 sub-scale of students Mathematics Engagement scale

Factor	Name	Ordinal Alpha	Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	No of Items
Factor 1	Personal Agency Engagement	0.87	.846	.846	11
Factor 2	Positive Affective Engagement	0.69	.716	.726	6
Factor 3	Negative Affective Engagement	0.73	.843	.847	7
Factor 4	Positive Behavioural Engagement	0.68	.676	.687	3
Factor 5	Negative Behavioural Engagement	0.73	.724	.727	4
Factor 6	Cognitive Engagement	0.77	.691	.695	4

Table 2 shows the Ordinal alpha coefficient of each of the sub-scale of students' Mathematics Engagement scale. The value of the ordinal alpha coefficient showed the reliability of each of the sub-scale of students' Mathematics Engagement scale which ranges from 0.68 to 0.87. This shows that all the sub-scales of students' Mathematics Engagement scale are reliable.

Research Question 2: Is there any relationship between the identified factors of students' Mathematics Engagement scale?

Table 3. Sample correlation coefficient between all pairs of factors

Sample Correlation			**Estimate**
PERANG	<-->	POSAFF	.336
PERANG	<-->	NEGAFF	-.116
PERANG	<-->	POSBEH	.377
PERANG	<-->	NEGBEH	-.269
PERANG	<-->	COGNIT	.636
POSAFF	<-->	NEGAFF	-.373
POSAFF	<-->	POSBEH	.372
POSAFF	<-->	NEGBEH	-.229
POSAFF	<-->	COGNIT	.425
NEGAFF	<-->	POSBEH	-.258
NEGAFF	<-->	NEGBEH	.459
NEGAFF	<-->	COGNIT	-.168
POSBEH	<-->	NEGBEH	-.193
POSBEH	<-->	COGNIT	.416
NEGBEH	<-->	COGNIT	-.269

Sample correlation coefficient between all pairs of factors was done to find the pattern of relationships between the factors. The result of table 3 and path diagram in figure1 showed that the sample correlation between the factors ranges between -.373 to 0.636 meaning that the factors correlate well, meaning that there exist connection among the latent variables. In other word the items in the extracted factors are likely to be measuring the same trait.

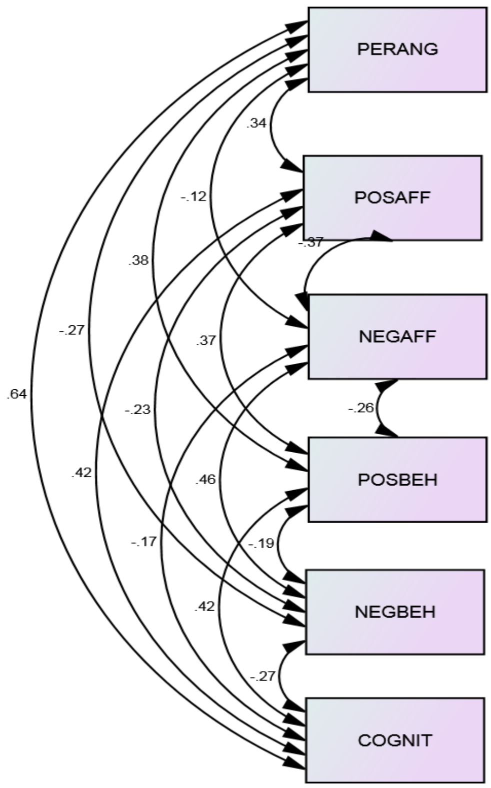


Figure 1. Path diagram of sample correlation between the identified factors of students' Mathematics Engagement scale

Research Question 3: Which of the students' Mathematics Engagement scale sub-scale is the best predictor of Mathematics achievement?

Table 4. Level of prediction of regression model

Model Summary[b]				
Model	**R**	**R Square**	**Adjusted R Square**	**Std. Error of the Estimate**
1	.198[a]	0.39	.034	6.879
Independent variable: Congnit_Eng, Neg_Aff_Eng, Pos_Beh_Eng, Per_Ang_Eng, Pos_Aff_Eng, Neg_Beh_Eng				
b. Dependent Variable: MATHS TEST				

Table 4 provides the R, and R^2, this was used to define the level of fitness at which the regression model predicts the dependent variable. The value of R denotes the value of multiple correlation coefficients. In this case, R represents the measures of quality of the prediction of the Mathematics achievement test. Here, the value of .198 shows the level of prediction ascribed to the Mathematics achievement test. The "R Square" shows the squared multiple correlation coefficients. This refers to the amount of variance in the dependent variable that can be accounted for by the independent variables. From the table, all the latent variables explain 39 % of the variation in the Mathematics achievement tests. This result indicates a good level of prediction which shows the fitness of the regression model.

Table 5. The regression model fits

ANOVA[a]						
Model		**Sum of Squares**	**df**	**Mean Square**	**F**	**Sig.**
1	Regression	1936.507	6	322.751	6.821	.000[b]
	Residual	47364.350	1001	47.317		
	Total	49300.857	1007			
a. Dependent Variable: MATHS TEST						
b. Predictors: (Constant), Congnit_Eng, Neg_Aff_Eng, Pos_Beh_Eng, Per_Ang_Eng, Pos_Aff_Eng, Neg_Beh_Eng						

Table 5 shows the F column. The F examined how well the regression model fit the data. The table displays that the measured variables significantly predict the mathematics achievement test, F (6, 1001) = 6.821, $p < .05$ (i.e., the regression model has a good data fit model).

Table 6. Statistical significance of sub-scales of students' mathematics engagement

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95.0% Confidence Interval for B	
		B	**Std. Error**	**Beta**			**Lower Bound**	**Upper Bound**
1	(Constant)	22.561	2.057		10.968	**.000**	18.525	26.598
	Per_Ang Eng	-.050	.039	-.048	-1.287	**.198**	-.126	.026
	Pos_Aff_Eng	.130	.090	.056	1.446	**.148**	-.046	.307
	Neg_Aff_Eng	-.113	.073	-.064	-1.541	**.124**	-.257	.031
	Pos_Beh_Eng	.162	.126	.047	1.284	**.200**	-.086	.410
	Neg_Beh_Eng	-.302	.102	**-.115**	-2.952	**.003**	-.502	-.101
	Congnit_Eng	-.082	.096	-.033	-.859	**.390**	-.270	.106
MATHS TEST								

Unstandardized coefficients specify the extent to which Mathematics achievement test varies with the measured variable when all other measured variables are held constant. Table 6 examined whether the value of unstandardized/standardized coefficient is equal to 0 in the distribution. If p is less than .05, this suggested that the coefficients are significantly different from 0. The p-value is found in the "Sig." columns. The result of table 6 shows that Negative behaviour Engagement is statistically significantly different from 0 (zero), which means that it has a unique contribution to the level of students' performance in Mathematics with the value of P = 0.003 < 0.05. Not only that, figure 2 gives the pictorial representation of regression model of students' mathematics achievement and the six dimensions of students' mathematics engagement. However, with the result of table 6 and the graph in figure 2, Negative behaviour Engagement appeared the best predictor out of the six sub-scales of students Mathematics Engagement scale with the value of Beta = -.115.

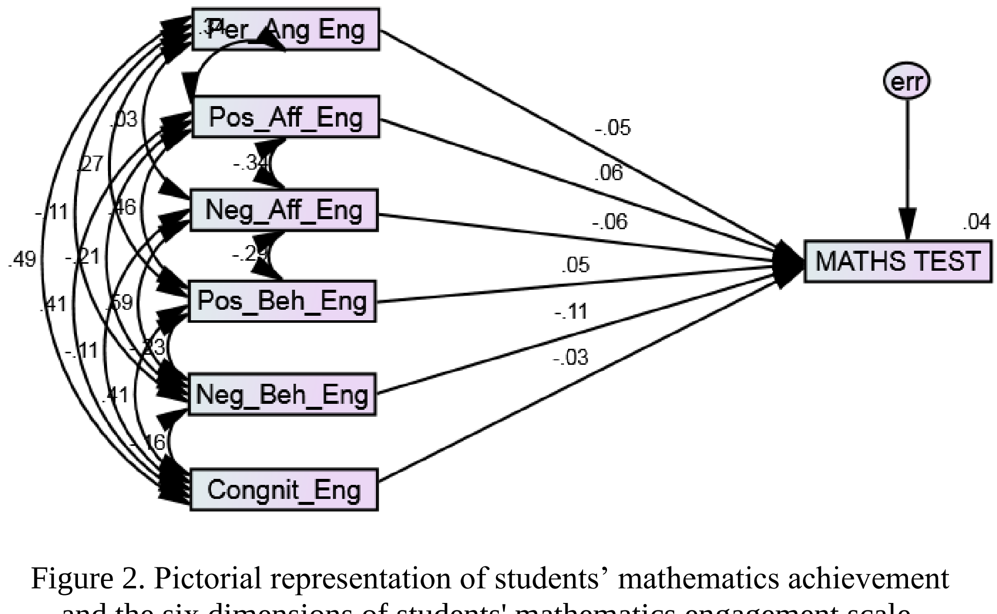


Figure 2. Pictorial representation of students' mathematics achievement and the six dimensions of students' mathematics engagement scale.

5. Conclusion

5.1. Summary of Findings

The key outcomes of this study are as follows:

- The reliability coefficient of each of the sub-scales of students' Mathematics Engagement scale which ranges from 0.68 to 0.87 shows that all the sub-scales of students' Mathematics Engagement scale are highly reliable.
- The correlation indices of all the sub-scales of students' Mathematics Engagement scale range between -.373 to 0.636. The values indicate that the items of the scale were meaningfully related and contributed to the construct being measured. In other word the items in all the sub-scales measure students' mathematics engagement.
- The six sub-scales were utilized to evaluate the level of students' Engagement in Mathematics. The result showed that Negative behaviour had the largest influence on the achievement of students in Mathematics.

5.2. Recommendations

Based on the outcomes of this work, the following recommendations were made:

- Teachers and school administrators need to identify those students with negative dispositions toward mathematics during the teaching and learning processes and try to occupy them in meaningful teaching and learning processes for high-level performance in their classrooms.
- Teachers and educators should use any opportunity available to them to select some resources that can stimulate the interest of students and make them vigorous learners during mathematics lessons for better performance.
- Educationalists and teachers should be close to their students and select the necessary method that will enable them to deliver interesting teaching that can increase the level of students' engagement in mathematics during their lessons.

References

Abín, A., Núñez, J. C., Rodríguez, C., Cueli, M., García, T., & Rosário, P. (2020). Predicting mathematics achievement in secondary education: The role of cognitive, motivational, and emotional variables. *Frontiers in Psychology*, *11,* 523356.

Adegbuyi, J. Y. (2019). Construction and Use of Multidimensional Student Mathematics Engagement Scale In Predicting Mathematics Achievement Among Senior Secondary School Students In Ekiti State, Nigeria [Doctoral Dissertation].

Alam, A., & Mohanty, A. (2023). Cultural beliefs and equity in educational institutions: exploring the social and philosophical notions of ability groupings in teaching and learning of mathematics. *International Journal of Adolescence and Youth*, *28*(1), 2270662.

Bui, H. H. (2023). Directed Motivational Currents Through Group Projects: A Study Of Vietnamese University Students [Doctoral Dissertation, University Of Essex].

Capone, R., & Lepore, M. (2022). From distance learning to integrated digital learning: A fuzzy cognitive analysis focused on engagement, motivation, and participation during COVID-19 pandemic. *Technology, Knowledge and Learning*, *27*(4), 1259–1289.

Fung, F., Tan, C. Y., & Chen, G. (2018). Student engagement and mathematics achievement: Unraveling main and interactive effects. *Psychology in the Schools*, *55*(7), 815–831. https://doi.org/10.1002/pits.22139

Han, S., & Liou-Mark, J. (2023). Self-efficacy and attitudes towards mathematics of undergraduates: A US and Taiwan comparison. *Journal of Mathematics Education*, *8*(1), 1–15.

Hastie, P. A., Stringfellow, A., Johnson, J. L., Dixon, C. E., Hollett, N., & Ward, K. (2022). Examining the concept of engagement in physical education. *Physical Education and Sport Pedagogy, 27*(1), 1–18.

Maamin, M., Maat, S. M., & H. Iksan, Z. (2021). The influence of student engagement on mathematical achievement among secondary school students. *Mathematics*, *10*(1), 41.

Minarni, A., & Napitupulu, E. E. (2020). The role of constructivism-based learning in improving mathematical high-order thinking skills of Indonesian students. *Infinity Journal*, *9*(1), 111–132.

Quintero, M., Hasty, L., Li, T., Song, S., & Wang, Z. (2022). A multidimensional examination of math anxiety and engagement on math achievement. *British Journal of Educational Psychology*, *92*(3), 955–973.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2020). Intrinsic and extrinsic motivation from a self-determination theory perspective: Definitions, theory, practices, and future directions. *Contemporary educational psychology, 61*, 101860.

Salhab, R., & Daher, W. (2023). University students' engagement in mobile learning. *European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education*, *13*(1), 202–216.

Sweet, J. J., Heilbronner, R. L., Morgan, J. E., Larrabee, G. J., Rohling, M. L., Boone, K. B., & Conference Participants. (2021). American Academy of Clinical Neuropsychology (AACN) 2021 consensus statement on validity assessment: Update of the 2009 AACN consensus conference statement on neuropsychological assessment of effort, response bias, and malingering. *The Clinical Neuropsychologist, 35*(6), 1053–1106.

Syaiful, Huda, N., Mukminin, A., & Kamid. (2022). Using a metacognitive learning approach to enhance students' critical thinking skills through mathematics education. *SN Social Sciences*, *2*(4), 31.

Tshering, G. (2024). Perceptions of Teachers and Students Regarding the 10th Grade Students' Homework in Perspectives: Academic Achievement and Practices. *Asian Journal of Education and Social Studies*, *50*(5), 403–412.

Wu, F., Jiang, Y., Liu, D., Konorova, E., & Yang, X. (2022). The role of perceived teacher and peer relationships in adolescent students' academic motivation and educational outcomes. *Educational Psychology, 42*(4), 439–458.

Zhou, S., Zhou, W., & Traynor, A. (2020). Parent and teacher homework involvement and their associations with students' homework disaffection and mathematics achievement. *Learning and Individual Differences, 77*, 101780.

MATEMATICKÉ ÚLOHY A KOUZLA JAKO MOŽNOSTI PRO MOTIVACI V MATEMATICE

Jaroslav BERÁNEK[1]
[1]Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta
beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

V příspěvku je obsaženo několik zajímavých a netradičních matematických úloh a kouzel. Tyto úlohy lze využít při motivaci žáků ke studiu matematiky a získávání jejich zájmu o matematiku. Mezi nematematiky působí podobné úlohy a kouzla velmi efektně; mohou však u nich navozovat dojem, že matematika je něco nadpřirozeného, že se jí nelze naučit a podobně. Proto je úkolem pro učitele matematiky takové úlohy a problémy žákům zadávat, společně s nimi objasňovat jejich matematickou podstatu a tím zvyšovat jejich zájem o učení se matematice.

Klíčová slova: matematická úloha, Catalanova čísla, logické úlohy, dělitelnost

MATHEMATIC PROBLEMS AND MAGIC TRICKS AS MOTIVATION IN MATHEMATICS

Abstract

The article contains several interesting and unusual mathematic problems and magic tricks which can be used while teaching mathematics for gaining and enhancing the pupils' interest. Such problems can be perceived by those who are not mathematicians as something supernatural and can imply the idea that mathematics is impossible to be mastered. Therefore, the teacher's task is to assign such problems to their pupils while clarifying their mathematics essence.

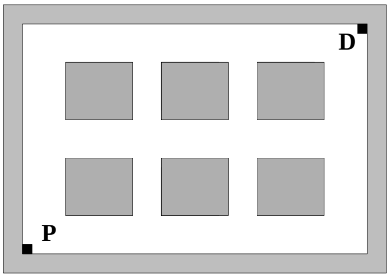
Keywords: mathematic problem, Catalan numbers, logic problems, divisibility

1. Úvod

Při individuální práci s talentovanými žáky v matematice hraje důležitou roli jejich motivace. To vyžaduje vyhledávání vhodných námětů, úloh a problémů pro matematické vzdělávání těchto nadaných žáků. Kromě možnosti využití celostátně organizovaných matematických soutěží (Matematická olympiáda a Klokan) a matematických soutěží organizovaných v regionech (Pythagoriáda, Pikomat, ...) je velmi výhodné i zadávání zajímavých netradičních úloh přímo ve výuce nebo v zájmových kroužcích věnovaných matematice. Tyto úlohy a problémy mohou současně přispívat jak k motivaci žáků, tak i k rozvíjení jejich matematického myšlení, kdy hravou formou mohou žáci objevovat nové matematické poznatky. Několik takových úloh i matematických hříček obsahuje tento příspěvek. Zadání úloh je možné případně upravit tak, aby motivovalo žáky k experimentování a hraní si při hledání řešení. Některé z těchto úloh mohou poskytnout rovněž námět pro další teoretické úvahy, pro učitele a studenty učitelství matematiky je vždy stručně uvedeno teoretické řešení.

2. Zajímavé a netradiční úlohy

Úloha 1: [Beránek, 2007, s. 17] Na obrázku je plán města Obdélníkova. Šedou barvou jsou uvnitř plánu vyznačeny domy, bílou barvou ulice. Poštovní doručovatel má úkol doručit dopis z pošty P do domu D. Kolika různými cestami může jít, jestliže se může pohybovat pouze na sever a na východ?



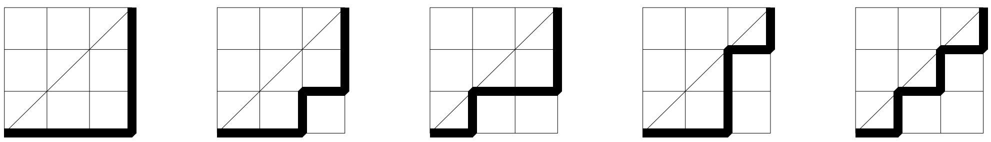
Obrázek 1. Plán města Obdélníkova

Řešení: Úlohu je vhodné buď řešit pomocí znázornění („stromový“ diagram) nebo pomocí vhodného označení a úsudku. Při matematickém řešení postupujeme takto: Povolené směry chůze označme S, V; úkolem je nyní určit počet všech pětic písmen, sestavených ze dvou písmen S a tří písmen V. Všech možností je deset (jedná se o permutace s opakováním). Podobné úlohy se vyskytují poměrně často („procházky po čtvercové síti“). V obecném případě, označíme-li počet výskytu písmen S jako p a počet písmen V jako q, je počet všech možných cest určen vztahem $P' = \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!}$. V našem zadání je $p = 2$, $q = 3$, tedy $P' = 10$.

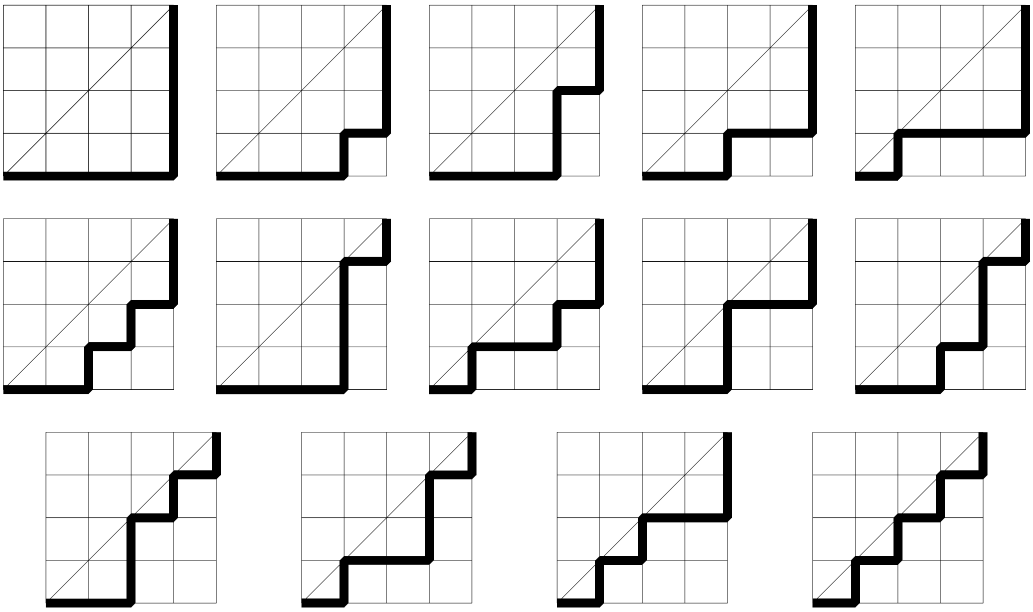
Poznámka: Úlohy kombinatorického charakteru se v matematických soutěžích vyskytují velmi často. Podobného typu jako první úloha je i úloha druhá, jejímž námětem jsou také procházky po čtvercové síti. Procházkou po čtvercové síti se přitom rozumí taková cesta, která vede pouze po přímkách této sítě (změna směru je tedy možná pouze v mřížových bodech).

Úloha 2: [Beránek, 2008a, s. 45] Jsou dány čtvercové sítě o rozměrech 3×3 a 4×4. Kolik existuje „cest“ po této čtvercové síti z levého dolního rohu do pravého horního rohu, které nepřekročí diagonálu?

Řešení: Žáci zřejmě budou postupovat, podobně jako v úloze 1, experimentálně. Hledané počty cest jsou po řadě 5 a 14. Řešení je ilustrováno následujícími obrázky (převzato z Beránek, 2008a):



Obrázek 2. Ilustrace řešení pro čtvercovou síť o rozměrech 3×3



Obrázek 3. Ilustrace řešení pro čtvercovou síť o rozměrech 4×4

Pro učitele nyní uvedeme i matematickou podstatu problému a jeho zobecnění na síť $n \times n$ (viz Beránek, 2008a; Wikipedia, 2024). Nejprve problém přesně matematicky zformulujeme: Zvolme počátek souřadné soustavy do levého dolního rohu sítě a předpokládejme nyní, že pohyb v síti je realizován pouze pomocí dvou typů tahů: $[x, y] \to [x + 1, y]$ (tj. o jeden úsek na “východ”) a $[x, y] \to [x, y + 1]$ (o jeden úsek na “sever”). Problémem je nyní určit počet takových cest z levého dolního rohu do pravého horního rohu, které nepřekročí diagonálu. Hledaný počet cest je určen tzv. Catalanovými čísly c_n. Při řešení se nejprve odvodí rekurentní vztah $c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot c_{n-i}$: cestu vždy „rozdělíme“ bodem, v němž se poprvé dotkne diagonály (připouštíme i počáteční a koncový bod cesty) a užijeme princip součinu. Na základě rekurentního vztahu lze nalézt obecný vztah pro počet Catalanových čísel c_n. (teoretické odvození lze nalézt v Beránek, 2008a; Wikipedia, 2024). Uvedeme pouze výsledek (podrobnosti viz Beránek, 2008a, s. 43–44]) ve třech možných ekvivalentních tvarech:

$$c_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}, \qquad c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}, \qquad c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Vztahy (1) určují tzv. Catalanova čísla (byla studována už Eulerem). Poznamenejme, že první dva ze vztahů platí i pro $n = 0$, zatímco třetí nikoliv. Pro zařazení tohoto problému do výuky lze postupovat různě. Na základní škole se omezíme pouze na praktické experimentální určení c_n pro několik prvních hodnot n, viz úloha 2; na škole střední kromě zmíněného induktivního postupu lze uvést i vzorce (1) a procvičovat úpravy výrazů s faktoriály a kombinačními čísly (pro Catalanova čísla platí zajímavé vztahy, např. $c_{n+1} = \frac{2\cdot(2n+1)}{n+2} \cdot c_n$ pro $n \in \mathbb{N}, c_0 = 1$). Pro úplnost ještě dodejme, že Catalanova čísla c_n jsou lichá právě tehdy, když $n = 2^k - 1$. Pro všechna ostatní n jsou sudá. Catalanova čísla velmi rychle rostou; uvedeme několik prvních hodnot (včetně hodnoty c_0): 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357970, ... Lichými čísly jsou skutečně (nepočítáme-li triviální případ pro $n = 0$) hodnoty $c_3 = 5$, $c_7 = 429$, $c_{15} = 9694845$ atd.

ISSN 2694-8133

Závěrem již zbývá pouze krátká zmínka o Catalanovi. Belgický matematik Eugène Charles Catalan se narodil 30. 5. 1814 v Bruges. V roce 1841 ukončil studium na École Polytechnique v Paříži. Jeho prvním působištěm byla Charlemagne College, kde přednášel deskriptivní geometrii. Od roku 1865 působil na Univerzitě v Liège, od roku 1885 byl členem Belgické akademie věd. Nějaký čas byl rovněž členem francouzské poslanecké sněmovny. Zemřel 14. 2. 1894 v Liège. Zabýval se zejména teorií řetězových zlomků, deskriptivní geometrií, teorií čísel a kombinatorikou.

Úloha 3: [Beránek, 2008b, s. 38] Na rodinné oslavě se sešlo několik členů rodiny: otec, matka, syn, dcera, bratr, sestra, bratranec, sestřenice, synovec, neteř, strýc, teta (každý má k někomu z přítomných některý z uvedených příbuzenských vztahů). Jaký nejmenší počet osob byl na oslavě, jestliže víme, že se v této rodině neuzavřel žádný příbuzenský svazek?

Řešení: Nejmenší možný počet osob, vyhovujících zadání, jsou čtyři, a to dva muži a dvě ženy v příbuzenském vztahu buďto otec se synem a matka s dcerou nebo otec s dcerou a matka se synem. Otec a matka jsou sourozenci (bratr a sestra), tzn. jejich děti jsou bratranec a sestřenice, atd. Největším problémem pro žáky je uvědomit si fakt, že otec a matka podle zadání úlohy nejsou manželé.

Úloha 4 [Beránek, 2008b, s. 41] Kouzelník přinesl tři stejné krabice. Na jedné bylo víko s nápisem JABLKO–HRUŠKA, na druhé JABLKO–JABLKO, na třetí HRUŠKA–HRUŠKA. Potom řekl: „*V krabicích jsou jablka a hrušky tak, jak to vidíte na nápisech na víkách, tedy v jedné jsou dvě jablka, ve druhé dvě hrušky a ve třetí jablko a hruška. Víka jsem vyměnil tak, že ani jedno není na správné krabici. Můžete vytáhnout jeden kus ovoce ze kterékoliv krabice (ale jen z jedné). Do krabice se přitom nesmíte podívat. Potom mi musíte říct, ve které krabici je jaké ovoce.*“ Ze které krabice mají děti vytáhnout ovoce, aby správně určily obsah krabic?

Řešení: Protože ani jedno víko není na správné krabici (a z teorie permutací víme, že existují pouze dvě permutace tříprvkové množiny, které neobsahují pevný bod), měl kouzelník pouze dvě možnosti, jak víka vyměnit. Ukážeme je na obrázku (v horním řádku jsou nápisy na víkách, ve spodním obsah krabic (uvádíme pouze zkratky):

J J	H H	J H
H H	**J H**	**J J**

J H	J J	H H
H H	**J H**	**J J**

Obrázek 4. Ukázka možné výměny vík na krabicích

Pokud vytáhneme jakýkoliv druh ovoce z krabice s víkem J J nebo H H, zjistíme po chvíli přemýšlení nad obrázky (podrobnosti neuvádíme), že existuje více možností, tj. nelze jednoznačně odpovědět. Zajímavý je případ, kdy vytáhneme ovoce z krabice označené J H. V této krabici jsou buďto jen dvě jablka nebo jen dvě hrušky. Vytáhneme-li tedy jablko, lze jednoznačně usoudit na případ podle levé tabulky, při vytažení hrušky jde o tabulku pravou. Na této úloze je důležitá úvaha o permutacích, zjištění dvou uvedených možností a nakreslení obrázku. Děti musí vytáhnout ovoce z krabice s víkem J H.

Úloha 5: [Beránek, 2008b, s. 41] Král zavřel princeznu do jedné ze tří komnat hradní věže, ve druhých dvou byli umístěni lvi. Honza přišel princeznu vysvobodit. Na dveřích první komnaty našel nápis: „*Tady princezna není*.“ Na druhých dveřích stálo: „*V této komnatě je lev*.“

ISSN 2694-8133

Na třetích dveřích byl nápis: „*Princezna je ve druhé komnatě.*“ Jen jediný z těchto nápisů byl pravdivý, ostatní dva byly nepravdivé. Když Honza princeznu najde, dostane ji za manželku. Otevře-li však dveře nesprávné, sežere ho lev. Pomozte Honzovi určit, ve které komnatě je princezna.

Řešení: Budeme zkoumat tři možnosti podle toho, který z nápisů budeme považovat za pravdivý. Nechť je pravdivý první nápis, princezna je tedy ve 2. nebo 3. komnatě. Podle třetího nápisu ale princezna není ani ve druhé, což je ve sporu s nepravdivostí tvrzení na druhých dveřích, za nimiž je skutečně lev. Předpokládejme, že druhý nápis je pravdivý, první a třetí nepravdivé; z nepravdivého prvního nápisu pak plyne, že je princezna v první komnatě. Další nápisy tuto skutečnost jen potvrdí (ve druhé je opravdu lev a princezna není ve druhé komnatě). Musíme ale zkoumat i třetí možnost, zda nemá problém více řešení (častá chyba studentů, kteří na toto často zapomínají; najdou-li jedno řešení, nezkoumají již další možnosti). Je-li ale pravdivý třetí nápis, musí být princezna ve druhé komnatě. Podle nepravdivého prvního nápisu musí ale být i v první, což je spor. Bezesporná je tedy pouze druhá z možností; pravdivý byl druhý nápis a princezna je v první komnatě.

Úloha 6*:* [Beránek, 2007, s. 20] Ořech a dvě třešně stojí tolik jako jedno jablko. Jablko a ořech stojí tolik jako jedna hruška. Dvě hrušky stojí tolik jako šest třešní. Za kolik ořechů je jablko?

Řešení: Tato slovní úloha je již poměrně složitá a vyžaduje kromě vhodného označení „zručnost“ při úpravě rovnic. Ze zadání plyne: $O + 2T = J$, $J + O = H$, $2H = 6T$ (tzn. $H = 3T$). Do druhé rovnice dosadíme vztah v závorce, máme $J + O = 3T$, odtud $2J + 2O = 6T$. První z rovnic vynásobíme třemi ($3O + 6T = 3J$) a za $6T$ do ní dosadíme z posledního vztahu: $3O + (2J + 2O) = 3J$, odkud $J = 5O$. Jablko je tedy za 5 ořechů. Otázkou ovšem je, jak si s uvedenými rovnicemi poradí žáci. Nejspíše zřejmě zvolí experiment (tvorba tabulek), případně úsudek. Ze prvních dvou podmínek zadání po úvaze plyne že $H = 2O + 2T$, ze třetí podmínky plyne $2H = 6T$, proto $2H = 4O + 4T$. Dohromady platí $4O + 4T = 6T$, tedy $4O = 2T$, tzn. $T = 2O$. Podle zadání $J = O + 2T$, po dosazení $J = 5O$. I nyní dostáváme řešení, že jablko je za 5 ořechů.

3. Matematické hříčky a kouzla

S různými matematickými hříčkami a kouzly se setkáváme poměrně často. Zejména mezi nematematiky působí taková kouzla velmi efektně. Problémem však je, že u lidí, kteří matematiku nemají v oblibě a nezajímají se o ni, mohou navozovat dojem, že matematika je jako věda něco nadpřirozeného, že se jí nelze naučit a podobně. Proto je úkolem, zejména pro učitele matematiky, tyto jevy vysvětlovat a objasňovat jejich matematickou podstatu, která bývá většinou velmi jednoduchá a snadno ji zvládnou nejen studenti oboru učitelství pro 1. stupeň ZŠ, ale i jejich žáci. V tomto příspěvku několik takových hříček a kouzel ukážeme.

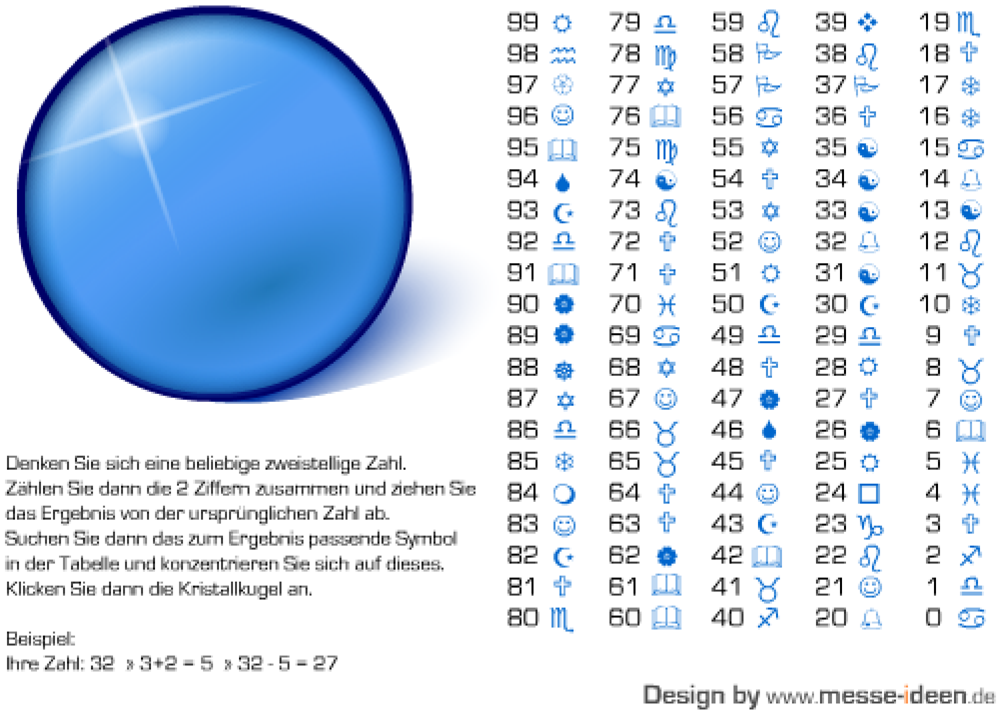
1. Magická koule [Magická koule - triky, kouzla a magie, 2023]

Po zadání webové adresy (http://www.ultrapc.cz/magicka-koule) se vygeneruje magická koule (viz obrázek na následující straně). Úkol pro řešitele je následující:

Myslete si libovolné dvojciferné číslo, sečtěte jeho cifry a výsledek odečtěte od původního čísla. V tabulce vyhledejte výsledné číslo a koncentrujte mysl na symbol vedle něho. Poté klikněte na magickou kouli.

Na magické kouli se vždy objeví symbol, na který jste se koncentrovali a který je uveden u výsledného čísla. Jaké je zdůvodnění?

Ať je myšlené číslo jakékoliv, výsledek je vždy číslo dělitelné devíti. Označíme-li myšlené číslo *xy*, pak platí $(10x + y) - (x + y) = 9x$, $x = 1, 2, ..., 9$ (čísla *90* a *99* výsledným rozdílem být nemohou). U všech čísel 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 se vždy při spuštění koule vygeneruje týž symbol (při každém novém vygenerování samozřejmě jiný).



Obrázek 5. Magická koule

2. Hledání ideálního partnera (partnerky) [Kuncová, 2008]

Občas se můžeme setkat s následujícím úkolem (původní autor není dohledatelný):

1. Zvol si libovolné přirozené číslo od 1 do 9
2. Toto číslo vynásob třemi
3. K součinu přičti číslo tři
4. Získané číslo znovu vynásob třemi
5. Urči ciferný součet vzniklého čísla

Podle čísla, které Ti vyšlo, najdeš svůj skutečný idol:
1. Albert Einstein
2. Ondřej Vetchý
3. Bill Gates
4. Mel Gibson
5. Michael Jackson
6. Brad Pitt
7. Arnold Schwarznegger
8. Boleslav Polívka
9. Hurvínek

ISSN 2694-8133

Jaké je matematické řešení této hříčky? Při jakékoliv volbě původního čísla vždy vychází jako výsledek číslo devět. V seznamu ideálních osob je proto vždy prvních osm sestaveno z některých populárních herců, sportovců a jiných významných osob, na devátém místě je pak osoba, která má vyjít jako výsledek (nějaká žertovná postavička nebo sám odesílatel dopisu). Nyní následuje vysvětlení:

Zvolené číslo označme x. Jednotlivé kroky podle zadání lze pak zapsat takto:
$x, 3x, 3x + 3, 9x + 9 = (10x + 9) - x = 10x + (9 - x)$, když jsme v posledním kroku využili jednoduchého umělého obratu. Ciferný součet je $x + (9 - x) = 9$.

3. Hádání čísla 1 [Kuncová, 2008, s. 41]

Zvolte si tři po sobě jdoucí trojciferná čísla. Sečtěte je. Určete ciferný součet vypočteného součtu, dále určete ciferný součet předchozího ciferného součtu atd. Pokračujte tak dlouho, až obdržíte jednociferné číslo. Číslo si zapamatujte. Při pohledu na původně zvolená tři čísla vám řeknu, k jakému výsledku jste došli. Jak je to možné?

Řešení: Záleží na postavení čísla dělitelného třemi mezi třemi zvolenými po sobě jdoucími čísly. Když bude v řadě jako první, dostaneme číslo 3, když bude v řadě jako druhé, dostaneme číslo 9. Bude-li jako třetí z nich, dostaneme výsledek 6.

Ilustrace (číslo dělitelné třemi je vytištěno tučně):

$\mathbf{612} + 613 + 614 = 1839$	$1 + 8 + 3 + 9 = 21$	$2 + 1 = 3$
$311 + \mathbf{312} + 313 = 936$	$9 + 3 + 6 = 18$	$1 + 8 = 9$
$910 + 911 + \mathbf{912} = 2733$	$2 + 7 + 3 + 3 = 15$	$1 + 5 = 6$

Důkaz: Číslo dělitelné třemi nechť je $a = 100x + 10y + z$. Platí $x + y + z = 3p$, kde číslo $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ podle předpokladu, že zvolená čísla jsou trojciferná. Odtud plyne $3p \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$.

a) Nechť a je na prvním místě. Platí:

$(100x + 10y + z) + (100x + 10y + z + 1) + (100x + 10y + z + 2) = 3(100x + 10y + z) + 3$. Ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z)$ je $3x + 3y + 3z = 9p$, $p \in \{1, 2, ..., 9\}$, odtud tedy $9p \in \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81\}$. Ciferný součet čísla $9p$ je vždy roven 9.
Nyní určíme ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z) + 3$. S ohledem na předchozí úvahy je roven $3x + 3y + (3z + 3) = 9p + 3$; $9p + 3 \in \{12, 21, 30, 39, 48, 57, 66, 75, 84\}$, ciferný součet všech těchto čísel je 3 nebo 12, výsledný ciferný součet je tedy 3.

b) Nechť a je na druhém místě. Platí:

$(100x + 10y + z - 1) + (100x + 10y + z) + (100x + 10y + z + 1) = 3(100x + 10y + z)$. Stejně jako v prvním případě, ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z)$ je $3x + 3y + 3z = 9p$, $p \in \{1, 2, ..., 9\}$, tedy $9p \in \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81\}$. Ciferný součet čísla $9p$ je vždy roven 9.

c) Nechť a je na třetím místě. Platí:

Analogicky jako v předchozích dvou případech, ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z)$ je vždy roven 9; Nyní určíme ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z) - 3$. Ten je roven $3x + 3y + (3z - 3) = 9p - 3$; $9p - 3 \in \{6, 15, 24, 33, 42, 51, 60, 69, 78\}$, ciferný součet všech těchto čísel je 6 nebo 15, výsledný ciferný součet je tedy 6.

4. Hádání čísla 2 [Kuncová, 2008, s. 41]

Zvolte si libovolné přirozené číslo od 1 do 9. Vynásobte toto číslo nejprve číslem 9 a součin potom ještě číslem 12 345 679 a sdělte mi výsledek; podle něj poznám číslo, které jste si mysleli.

Řešení: Je velmi jednoduché, uvedeme jej bez komentáře:

$$1 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 111\,111\,111$$
$$2 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 222\,222\,222$$
$$3 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 333\,333\,333$$
$$4 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 444\,444\,444$$
$$5 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 555\,555\,555$$
$$6 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 666\,666\,666$$
$$7 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 777\,777\,777$$
$$8 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 888\,888\,888$$
$$9 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 999\,999\,999$$

5. Určení zašifrovaného data [Pereľman, 1985, s. 95]

Zvolte si libovolné datum v roce (den, měsíc). Toto datum zašifrujte takto: Číslo označující den v měsíci vynásobte číslem 12, číslo označující měsíc v roce vynásobte číslem 31. Oba součiny sečtěte. Sdělíte-li mi součet, vypočítám z něho myšlené datum.

Řešení: Tato úloha je již složitější a její řešení vyžaduje znalost neurčitých rovnic v oboru celých čísel. Označíme-li číslo dne v měsíci jako x, číslo měsíce v roce jako y a vypočtený součet jako c, vede úloha k řešení neurčité rovnice

$$12x + 31y = c,$$

kde $x, y \in \mathbb{N}$, $x \leq 31$, $y \leq 12$, $c \in \mathbb{N}$, $43 \leq c \leq 744$. Tato rovnice je vždy řešitelná, neboť čísla 12 a 31 jsou nesoudělná. V oboru přirozených čísel vždy existuje jediné řešení $[x, y]$. Jako příklad zvolme datum 24. 4., tedy $x = 24, y = 4, c = 288 + 124 = 412$. Jediným řešením neurčité rovnice $12x + 31y = 412$ v oboru $\mathbb{N}$ je $x = 24, y = 4$.

Důležité je nyní dokázat výše uvedené tvrzení, že v oboru přirozených čísel existuje pro každé přípustné číslo c vždy jediné řešení. Postupujeme sporem. Nechť pro dané číslo c existují dvě různá řešení $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $x_1, x_2 \leq 31$, $y_1, y_2 \leq 12$. Platí tedy

$$12x_1 + 31y_1 = c,$$
$$12x_2 + 31y_2 = c.$$

Odečteme druhou rovnici od první, dostaneme $12(x_1 - x_2) + 31(y_1 - y_2) = 0$. Číslo $12(x_1 - x_2)$ musí být dělitelné číslem 31. Protože $1 \leq x_1, x_2 \leq 31$, platí $x_1 - x_2 < 31$. Číslo $12(x_1 - x_2)$ může být tedy dělitelné číslem 31 pouze pro $x_1 - x_2 = 0$, tedy $x_1 = x_2$. Pak ale musí platit vztah $31(y_1 - y_2) = 0$, tedy $y_1 = y_2$. Dohromady tedy platí $[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$.

Poslední poznámka se týká možné snahy „publika“ zmást předkladatele úlohy zašifrováním neexistujícího data. V tom případě ale rovnice buďto nemá žádné řešení nebo jich má více. Jako příklad uveďme, že nám bylo oznámeno číslo $c = 561$. Obecným řešením sestavené neurčité rovnice $12x + 31y = 561$ je $x = 39 - 31t, y = 3 + 12t$. Rovnice má dvě kladná řešení $[39, 3]$, $[8, 15]$, která ale označují nemožná data.

4. Závěr

Je nepochybné, že motivace má ve výuce matematiky významné a nezastupitelné místo, a tedy je nutné hovořit o ní i s budoucími učiteli matematiky, a to i na 1. stupni základní školy. Motivovaní studenti projevují větší zájem o učení se matematice a většinou dosahují i lepších studijních výsledků. Motivovat žáky a studenty lze různými způsoby; může to být využití konstruktivistického učení, dnes zdůrazňované zejména metodou VOBS (Výuka orientovaná na budování schémat), kdy žáci sami vyvozují některé poznatky, může to být využití historických témat ve výuce (např. historické numerace, jednotky délky, obsahu a objemu užívané v historii apod.). Další možností pro získávání zájmu o matematiku je zařazování zajímavých úloh a problémů do výuky. Některé náměty poskytnul i tento příspěvek.

Literatura

Beránek, J. (2007). Práce s talentovanými žáky v matematice vede k úspěchu u talentových přijímacích zkoušek. In: *Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního vzdělávání.* (s. 17–19). Plzeň : Západočeská univerzita.

Beránek, J. (2008a). Catalanova čísla a jejich užití. In: *Sborník příspěvků ze XXVI. vědeckého kolokvia*. (s. 43–51). Brno : Univerzita Obrany.

Beránek, J. (2008b). Logické úlohy na 1. stupni základní školy. In: *Matematické vzdělávání z pohledu žáka a učitele primární školy.* (s. 38–42). Olomouc : Univerzita Palackého.

Kuncová, V. (2008). *Historie matematiky ve vztahu k vyučování matematice na 1. stupni ZŠ*. [Diplomová práce, Masarykova univerzita]. https://is.muni.cz/th/mpwti/

Magická koule - triky, kouzla a magie. (2023, 19. listopadu). http://www.ultrapc.cz/magicka-koule.

Pereľman, J. I. (1985). *Zajímavá algebra*. (169 s.). Praha : SNTL.

Wikipedia. (2024, 13. února). *Catalan numbers*. http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number.

EDUKAČNÉ AKTIVITY VYUŽÍVAJÚCE ROZŠÍRENÚ REALITU PRI ROZLIŠOVANÍ ZÁKLADNÝCH TELIES A ICH VLASTNOSTÍ V PRIMÁRNEJ MATEMATICKEJ EDUKÁCII – PRÍPADOVÁ ŠTÚDIA

Jana HNATOVÁ[1]
[1]Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)
jana.hnatova@unipo.sk

Abstrakt (v jazyku článku)

V tomto článku sú konkretizované výskumné zistenia prípadovej štúdie viazané na využitie technológie rozšírenej reality (AR) v študentských edukačných návrhoch činností súvisiacich s identifikáciou geometrických telies a ich vlastností obsiahnutých v školskej geometrii na primárnom stupni vzdelávania na Slovensku. V úvode je predstavená použitá AR technológia a autorsky vyvíjaná mobilná aplikácia *Telesá 1*, ktorá umožňuje vizualizáciu 3D modelov základných geometrických telies v skutočnom prostredí s následnou nepriamou interakciou žiaka s nimi. V rámci prípadovej štúdie sú zodpovedané tri výskumné otázky s využitím deskripcie a analýzy ukážok študentmi metodicky spracovaných návrhov edukačných činností s integrovaným využitím mobilnej aplikácie pracujúcej s AR technológiou. Analýza návrhov vychádza z teoretického rámca daného maticou TIM, v analyzovaných prípadoch sleduje dosiahnutú úroveň vzdelávacieho prostredia a stupeň integrácie technológie AR.

Kľúčové slová: geometria, mobilná aplikácia, primárna edukácia, prípadová štúdia, rozšírená realita, študentské aktivity

EDUCATIONAL ACTIVITIES UTILIZING AUGMENTED REALITY FOR DISTINGUISHING BASIC SOLIDS AND THEIR PROPERTIES IN PRIMARY MATHEMATICAL EDUCATION – A CASE STUDY

Abstract

This paper presents the research findings of a case study investigating the use of Augmented Reality (AR) technology in student-designed educational activities for identifying geometric solids and their properties in primary school geometry education in Slovakia. The paper begins with an introduction to the AR technology used and the author-developed mobile application *Solids 1*, which enables the visualization of 3D models of basic geometric solids in the real environment with subsequent indirect interaction of the pupil with them. Within the framework of the case study, three research questions are addressed using the description and analysis of examples of student-methodically processed designs of educational activities with integrated use of the mobile application working with AR technology. The analysis of the designs is based on the theoretical framework given by the matrix TIM, and in the analyzed cases, it follows the achieved level of the educational environment and the degree of integration of AR technology.

Keywords: augmented reality, case study, geometry, mobile application, primary education, student-designed activities

1. Úvod

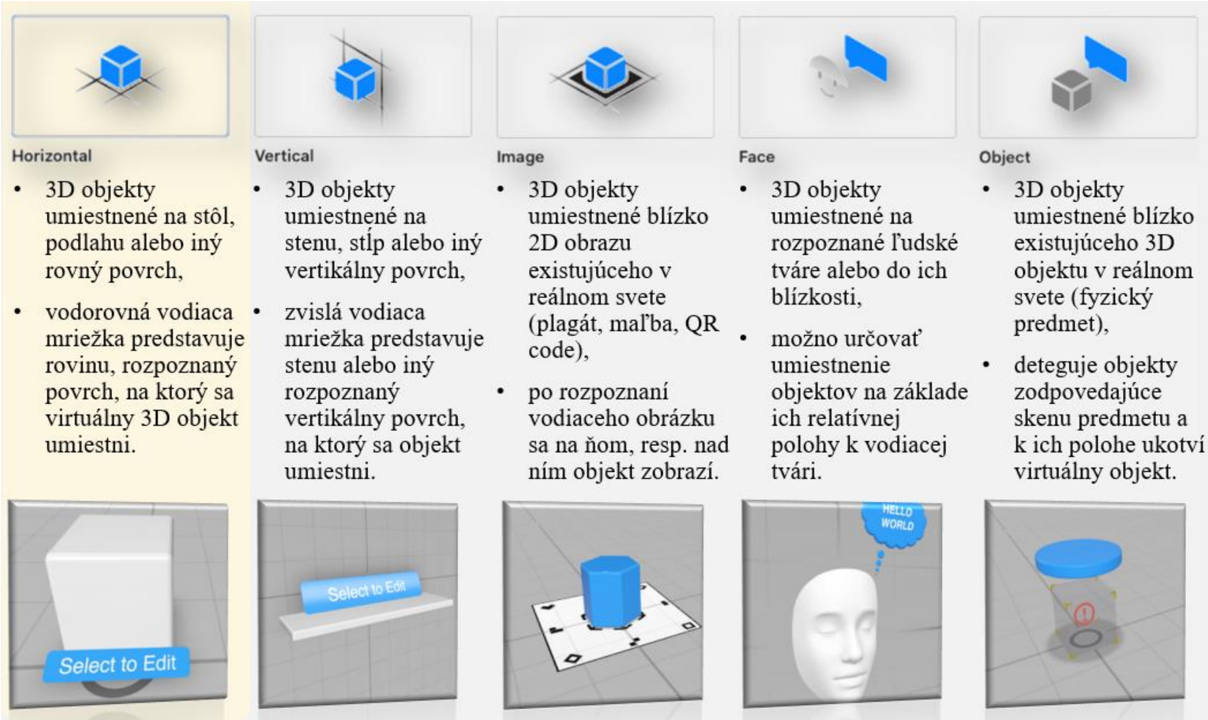
Vzhľadom na to, že deti sa s digitálnymi technológiami stretávajú od čoraz mladšieho veku, zohrávajú digitálne kompetentní učitelia v oblasti vzdelávania už v ich ranom detstve kľúčovú úlohu v pochopení rizík, ale aj možností digitálneho sveta (Chaudron et al., 2018). Viaceré legislatívne dokumenty Rady Európy odporúčajú koherentný a vekovo primeraný prístup k sprostredkovaniu digitálnych zručností a kompetencií, a to na všetkých stupňoch a vo všetkých typoch vzdelávania. Rovnako odporúčajú, aby členské štáty, a to od začiatku povinnej školskej dochádzky, podporovali sprostredkovanie vysokokvalitného vzdelávania prostredníctvom vedecky podložených pedagogických metód s cieľom ponúknuť všetkým učiacim sa možnosť rozvíjať svoje digitálne zručnosti a kompetencie integrované do rôznych oblastí, predovšetkým však do oblastí vedy, technológie, inžinierstva, umenia a matematiky. Aktuálnou sa javí podpora digitálnych zručností potrebných na rozpoznávanie použitia AI a na využívanie imerzívnych technológií, ako napr. virtuálnej reality, rozšírenej reality, simulácie a hier vo vzdelávaní (Council of the European Union, 2021, 2023).

Realizované výskumy naznačujú, že využitie uvedených technológií v matematickej edukácii prebiehajúcej už na základných školách môže podporovať aktívne učenie žiakov (Volioti et al., 2023) a zvyšovať záujem o matematické vzdelávanie (Demitriadou et al., 2020). Technológia rozšírenej reality (augmented reality, skr. AR) vykazuje veľký potenciál produkovať prospešnú metodickú zmenu vo vyučovaní matematiky a oprávňuje zainteresovaných k tvorbe matematických učebných materiálov v AR (Fernández-Enríquez & Delgado-Martín, 2020). K takýmto novovyvíjaným digitálnym učebným materiálom, ktoré môžu učitelia či vychovávatelia v rámci svojho pedagogického pôsobenia na školách a v školských zariadeniach vhodne integrovať do matematickej edukácie, patria aj mobilné aplikácie pracujúce s AR. Pertraktovanými požiadavkami sú odborná erudovanosť súčasných i budúcich pedagogických zamestnancov vo viacerých oblastiach, predovšetkým však v matematickej a digitálnej (Laitochová et al., 2020; Lipták, 2023; Mokriš et al., 2023; Prídavková, 2023) ako aj aktuálna dostupnosť kvalitných a vo výučbe školskej matematiky použiteľných zdrojov (Dofková et al., 2020).

Na Pedagogickej fakulte Prešovskej univerzity v Prešove sú poskytované možnosti aktívne sa zapojiť do činností využívajúcich prácu s AR zdrojmi už študentom bakalárskeho stupňa štúdia v akreditovanom študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika, a to v rámci absolvovania povinných i povinne voliteľných predmetov z korpusu ich pregraduálneho matematického vzdelávania. V tomto článku svoj záujem upriamime na oblasť metodického spracovania edukačných aktivít samotnými študentmi. Našim výskumným zámerom bolo zistiť, či a do akej miery dokáže študent samostatne spracovať autorský návrh vzdelávacej aktivity s integrovanou AR technológiou do matematickej edukácie na primárnom stupni vzdelávania.

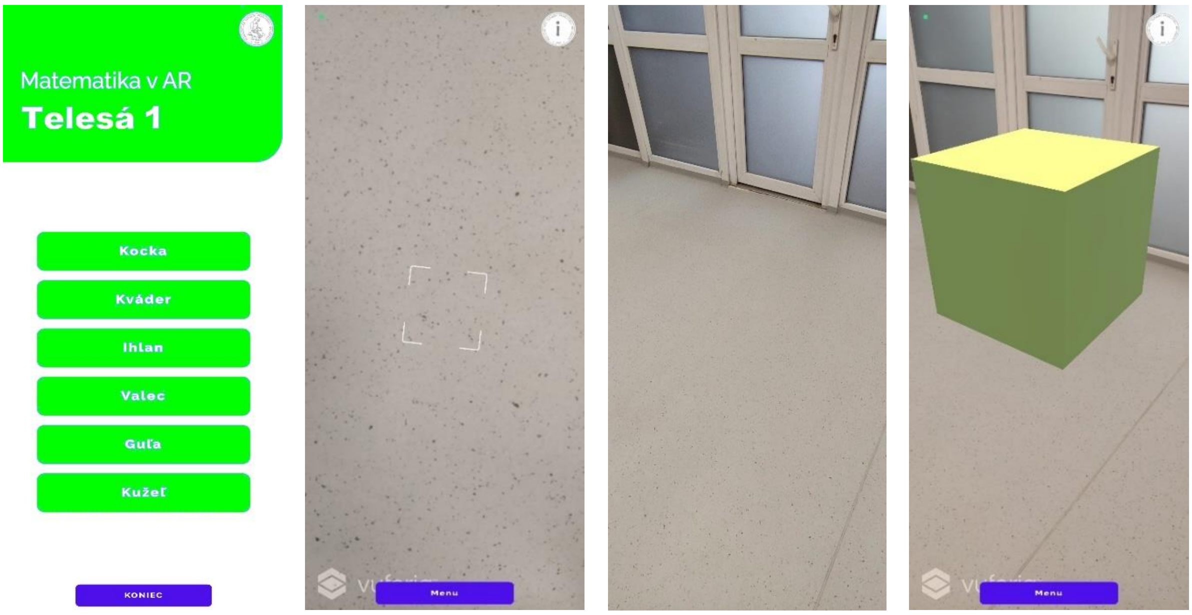
2. AR technológia

Študentom dostupné mobilné aplikácie pracujúce s AR využívajú technológiu spadajúcu do kategórie anchore-based AR. Ako naznačuje jej názov, koncept tejto technológie využíva prácu s kotvami (*anchore*). Existencia kotiev je jedným z najvýznamnejších rozdielov medzi virtuálnou a rozšírenou realitou a pomáha riešiť kľúčový problém AR aplikácií: integráciu skutočného a virtuálneho sveta. Nutnosťou je schopnosť aplikácie za pomoci senzorov prítomných v inteligentnom mobilnom zariadení (smartfón, tablet) detegovať a sledovať objekty reálneho sveta. Kotvy sú v tomto prípade chápané ako objekty, ktoré AR aplikácia dokáže rozpoznať. V praxi teda možno, v závislosti od aktivátorov, rozlišovať rôzny typy kotiev (obr. 1).



Obrázok 1. Typy kotiev v anchore-based AR

Napríklad v prípade horizontálnej kotvy, inteligentné mobilné zariadenie s integrovaným fotoaparátom zobrazí na displeji zariadenia obraz reálneho sveta a v ňom hľadá a identifikuje rovnú textúrovanú plochu: podlahu, dosku pracovného stola alebo lavice. Po označení miesta výskytu kliknutím na displej zariadenia na ňom zobrazí aplikáciou preddefinovaný virtuálny 3D model. S týmto modelom môže používateľ následne cielene interagovať – priblížiť sa k nemu, obísť ho, odísť od neho a opätovne sa k nemu vrátiť či skúmať ho napríklad z vtáčej perspektívy. Nutnosťou je však kontinuálne snímanie plochy, ktorá bola na používanom zariadení kliknutím označená (obr. 2).



Obrázok 2. Práca s mobilnou aplikáciou využívajúcou podporu anchore-based AR

3. Prípadová štúdia

Našim výskumným cieľom bolo zistiť, či a do akej miery dokáže študent študijného odboru Predškolská a elementárna pedagogika samostatne spracovať autorský návrh vzdelávacej aktivity s integrovanou AR technológiou pre potreby matematickej edukácie na primárnom stupni vzdelávania. V rámci realizácie výskumu sme sa zamerali na zodpovedanie nasledujúcich výskumných otázok:

1. V akej miere budú študenti cieľovej skupiny ochotní spracovať návrh vzdelávacej aktivity s integrovanou AR technológiou pre potreby matematickej edukácie realizovanej na primárnom stupni vzdelávania?
2. Aký typ vzdelávania budú pri integrácii preferovať?
3. Akú úroveň integrácie budú v didaktickom návrhu uprednostňovať?

3.1. Cieľová skupina, metódy

Cieľová skupina bola kreovaná z dostupného zámerného výberu 43 študentov 3. ročníka bakalárskeho stupňa externej formy štúdia v akreditovanom študijnom programe predškolská a elementárna pedagogika. Títo študenti si v rámci svojho štúdia vybrali povinne voliteľný predmet Matematika a počítač. Z nich sa aktívne zúčastnilo vzdelávania realizovaného v dvoch päťhodinových blokoch 39 študentov. Vzdelávanie bolo podporené multimediálnym spracovaním študijných materiálov v e-kurze predmetu, online komunikáciou s využitím MS Teams a offline komunikáciou s využitím diskusných fór a komentárov. Komentáre boli v e-kurze dostupné len vyučujúcemu a konkrétnemu študentovi s väzbou na predmetný obsah návrhu, ktorý študent chcel, resp. potreboval odkonzultovať.

Návrhy aktivít, spracované elektronicky do podoby zadaní, ktoré bolo možné do tejto štúdie zaradiť, vzhľadom na výber mobilnej aplikácie odovzdalo 20 študentov.

V predkladanej štúdii sú spracované zistenia podmienené faktorom použitia integračného nástroja v podobe mobilnej aplikácie *Telesá 1*. Vychádzajúc z požiadavky triangulácie metód zberu údajov v kvalitatívne orientovanom výskumnom šetrení, boli do prípadovej štúdie zahrnuté:

- písomné artefakty v podobe spracovaných zadaní študentov,
- obrazový materiál v podobe fotodokumentácie vytvorenej študentmi,
- zdokumentovaná komunikácia v podobe komentárov priebežného hodnotenia didaktického návrhu, reakcií naň a príspevkov študentov v diskusnom fóre.

3.2. Výskumný nástroj

Pre potreby spracovania návrhu boli študentom poskytnuté dve autorsky vyvíjané mobilné aplikácie, ktoré si mohli stiahnuť, nainštalovať a ich funkčnosť odskúšať. Z nich jednu, nimi vybranú aplikáciu, mali následne zapracovať do svojho návrhu matematickej aktivity.

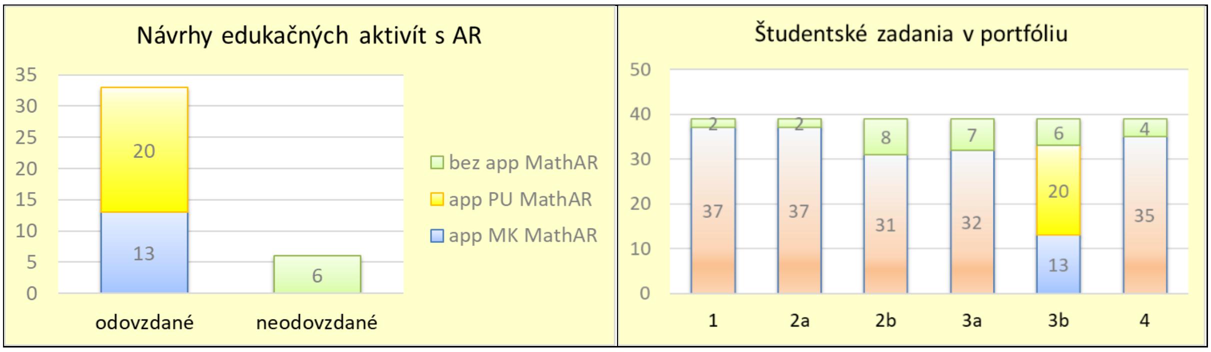
Mobilná aplikácia *Telesá 1,* ktorá bola použitá ako integračný nástroj a spôsob jej integrácie je v štúdii sledovaný, zaberá v zariadení 80 MB pamäte a pracuje pod operačným systémom Android. Pri výbere bola zohľadnená dominancia tohto operačného systému v európskom priestore. Podľa informácií Statcounter (2024) na trhu mobilných operačných systémov až 7 z 10 smartfónov pracuje pod operačným systémom Android, zatiaľ čo dva zo zvyšných troch majú s najväčšou pravdepodobnosťou systém iOS. Celosvetovo sa predpokladá, že miera penetrácie používateľov AR bude v roku 2024 52,8 % a do roku 2028 narastie na 55,9 %. To znamená, že každý druhý používateľ smartfónu bude taktiež používateľom aplikácie pracujúcej s AR technológiou (Statista, 2023).

Vychádzajúc z prehľadovej analýzy relevantných bibliografických zdrojov (Hnatová, 2023) bola pre obsahové matematické zameranie prípadovej štúdie zvolená oblasť geometrie. V našej snahe vytvoriť obsahovo i užívateľsky prívetivú aplikáciu zameranú na potreby primárnej matematickej edukácie bolo z formálneho hľadiska v nej zvolené jednoduché jednoúrovňové ovládanie. Používateľ aplikácie má v hlavnom menu možnosť vybrať si konkrétne teleso kliknutím na tlačidlo s jeho názvom. To sa následne, s využitím anchore-based AR s horizontálnou kotvou, nepriamo zobrazí v jeho reálnom svete, t. j. zobrazí sa na displeji ním používaného mobilného zariadenia (obr. 2).

4. Výskumné zistenia

Dôležitým činiteľom ovplyvňujúcim ochotu študentov metodicky spracovať návrh matematickej aktivity s použitím zvolenej technológie je fakt, že jeho odovzdanie nebolo nutnou podmienkou úspešného absolvovania predmetu. Avšak, v prípade jeho spracovania a odovzdania, bolo hodnotenou súčasťou portfólia študenta.

Pri zisťovaní odpovede na prvú výskumnú otázku: „V akej miere budú študenti cieľovej skupiny ochotní spracovať návrh vzdelávacej aktivity s integrovanou AR technológiou pre potreby matematickej edukácie na primárnom stupni vzdelávania?“ vychádzame z deskripcie aktuálneho stavu a jeho porovnania so stavom ochoty študentov spracovávať a odovzdávať výstupy ďalších zadaní zaradených do portfólia, ktoré nemali žiaden súvis s integráciou AR technológie do primárnej matematickej edukácie (obr. 3).

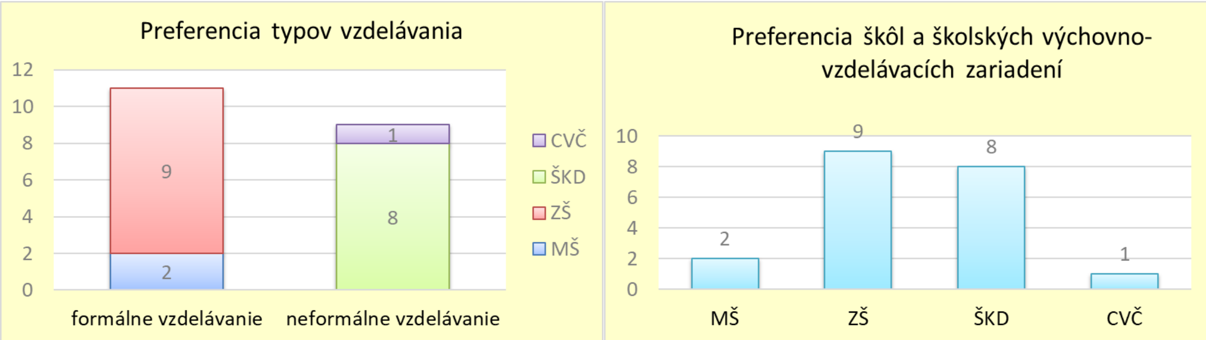


Obrázok 3. Aktuálny stav ochoty študentov spracovať návrh edukačnej aktivity s integrovanou AR technológiou (vľavo) v porovnaní s ochotou študentov spracovať ostatné zadania z portfólia predmetu (vpravo)

V rámci deskripcie aktuálneho stavu sme zistili, že 6 z 39 študentov (t.j. 15,38 %) predmetný návrh aktivity neodovzdalo. Počet odovzdaných zadaní (33 zadaní; 84,62 %) sa v porovnaní s početnosťou celého portfólia nachádza pod jeho priemerom ($M_{all} = 34{,}167 > 33$) avšak v 95% intervale spoľahlivosti ($32{,}12 < 33 < 36{,}22$). V absolútnom aj relatívnom vyjadrení 33 odovzdaných zadaní presahuje zistené minimum (31 odovzdaných zadaní; 79,49 %). Počet odovzdaných zadaní s integrovaným využitím AR teda nie je možné považovať za odľahlú hodnotu. Možno predpokladať, že študenti svojou ochotou spracovať návrh edukačných aktivít s integrovanou AR nijak významne nevybočili z priemeru ochoty spracovať akékoľvek iné zadania, t. j. zadania bez požiadavky integrovať AR do daného vzdelávacieho prostredia.

Rovnako bola deskriptívne zisťovaná odpoveď na druhú výskumnú otázku: „Aký typ vzdelávania budú študenti pri integrácii preferovať?“ Pri zisťovaní odpovede vychádzame z predpokladu, že absolventi študijného programu predškolská a elementárna pedagogika môžu pôsobiť v školách alebo školských výchovno-vzdelávacích zariadeniach v pozíciách učiteľ materskej školy a vychovávateľ v zariadeniach pre deti predškolského a mladšieho školského veku (t. j. v školských kluboch detí – ďalej len ŠKD, v školských strediskách záujmovej činnosti – ďalej len ŠSZČ a v centrách voľného času – ďalej len CVČ).

Taktiež však patria do skupiny študentov, ktorý sú potencionálnymi záujemcami o nadväzujúce štúdium na magisterskom stupni štúdia v akreditovanom programe učiteľstvo pre primárne vzdelávanie. Toto ich profesionálne smerovanie sa odráža v dominantnom zastúpení dvoch kategórií, pre ktoré boli študentmi návrhy edukačných aktivít vytvárané (škola a ŠKD, obrázok 4 – vpravo). Možno predpokladať, že rozloženie ich záujmu medzi formálne a neformálne vzdelávanie (obrázok 4 – vľavo) korešponduje s pozitívnou orientáciou študentov na tie pedagogické prostredia, ktoré sú im známe a v ktorých už majú, vzhľadom na nimi zvolenú externú formu štúdia, prípadne aj nadobudnuté konkrétne pedagogické skúsenosti.



Obrázok 4. Preferencie študentov pri výbere typu vzdelávania (vľavo), školy, resp. školského výchovno-vzdelávacieho zariadenia (vpravo)

Analýza úrovne integrácie AR technológie v návrhu je východiskom pre hľadanie odpovede na tretiu výskumnú otázku, pričom vychádza z pedagogicky zameraného modelu, ktorý zohľadňuje plánovanie, popis a hodnotenie integrácie technológií – TIM. Tento model poskytuje rámec pre umiestnenie technológie do konkrétneho vyučovacieho prostredia. Je usporiadaný do piatich charakteristík zmysluplného vzdelávacieho prostredia a využíva päť úrovní integrácie (Harmes et al., 2016). Ich vzájomné prieniky vytvárajú integračnú maticu rozmerov 5×5, ktorá dovoľuje výskumníkovi pracovať s horizontálnou i vertikálnou líniou členenia integrácie.

V horizontálnej línii možno identifikovať (FCIT, 2019):

- úroveň vstupu (*level entry*); v ktorej učiteľ používa technológiu na poskytovanie vzdelávacieho obsahu v danom rozsahu učebných osnov, úroveň zahŕňa počúvanie alebo sledovanie obsahu prostredníctvom vybranej technológie, žiaci môžu ale nemusia mať k tejto technológii priamy prístup;
- úroveň prijatia (*level adoption)*; kde učiteľ rozhoduje o tom, ktorý technologický nástroj použije, kedy a ako ho použije, pričom žiaci pracujú s technológiou obmedzene len v rámci konkrétnych typov úloh zahŕňajúcich procesné pochopenie;
- úroveň rozšírenia (*level adaptation*); v ktorej učiteľ vedie žiakov k nezávislému používaniu technologických nástrojov, žiaci sú schopní pracovať bez priamych procedurálnych pokynov od učiteľa a začínajú skúmať rôzne spôsoby využitia technologických nástrojov;
- úroveň infúzie (*level infusion*); učiteľ integruje do výučby rôzne technologické nástroje, žiaci sú schopní robiť informované rozhodnutia o tom, kedy a ako tieto rôzne nástroje používať;
- úroveň transformácie (*level transformation*); kde učiteľ slúži ako sprievodca, mentor a model pri používaní technológie, žiaci koncepčne chápu použitie technologických nástrojov, sami riadia ich používanie, resp. sú povzbudzovaní k nekonvenčnému spôsobu ich využívania.

ISSN 2694-8133

Vertikálna línia modelu TIM rozlišuje nasledujúce charakteristiky vzdelávacieho prostredia (FCIT, 2019):

- aktívne (*activite learning*); v ktorom je angažovanosť študentov kľúčovou zložkou zaradenia, výskumníkovi dovoľuje detailnejšie rozlišovať medzi prostrediami, v ktorých žiaci pasívne prijímajú informácie, a prostrediami, v ktorých žiaci uplatňujú svoj aktívny prístup k získavaniu, upevňovaniu, resp. hodnoteniu získaných vedomostí, zručností a schopností;
- kolaboratívne (*collaborative learning*); popisuje mieru, do akej sa technológia používa na umožnenie, uľahčenie, prípadne na zlepšenie príležitostí žiakov pracovať so svojimi rovesníkmi alebo aj s inými externými odborníkmi. Táto charakteristika zohľadňuje použitie konvenčných nástrojov kolaboratívnej technológie ako aj iných druhov technologických nástrojov podporujúcich spoluprácu žiakov medzi sebou i s ostatnými aktérmi vzdelávania;
- konštruktívne (*constructive learning*); opisuje výučbu zameranú na žiaka, ktorá mu umožňuje používať technologické nástroje na prepojenie nových informácií s ich predchádzajúcimi znalosťami. Táto charakteristika sa týka flexibilného využívania technológie na budovanie vedomostí spôsobom, ktorý je pre každého žiaka najvhodnejší;
- autentické (*authentic learning*); zahŕňa používanie technológie na prepojenie vzdelávacích aktivít so svetom mimo vyučovacieho prostredia. Táto charakteristika sa zameriava na rozsah, v akom sa technológia používa na umiestnenie učenia do zmysluplného kontextu, zvýšenie jeho relevantnosti pre učiaceho sa a využitie vnútornej motivácie žiakov;
- na cieľ zamerané (*goal-distrected learning*); popisuje spôsoby, akými sa technológia používa na stanovovanie cieľov, plánovanie aktivít, sledovanie pokroku a vyhodnocovanie výsledkov. Táto charakteristika sa zameriava na to, do akej miery technológia umožňuje, uľahčuje alebo podporuje zmysluplnú reflexiu a metakogníciu.

Uvedené charakteristiky tvoria východisko nasledujúcich analýz troch prípadov – výstupov študentiek, ktoré boli spracované v podobe návrhov edukačných aktivít využívajúcich integračný nástroj - mobilnú aplikáciu *Telesá 1*. Z jednotlivých prípadov v tomto príspevku vyberáme, citujeme a analyzujeme realizačnú časť návrhu.

4.1. Prípad Lucia

„Deti sedia v kruhu na koberci a ja im dávam hádanky zamerané na priestorové útvary. Keď deti všetky hádanky uhádnu, ukážem im na interaktívnej tabuli obrázky, na ktorých je guľa, valec a kocka. Následne si tieto útvary pomenujeme a diskutujeme o tom, čo nám jednotlivé útvary pripomínajú a aké majú vlastnosti. Aby lepšie pochopili, o čom sa rozprávame, a aby mali aj reálnu predstavu o útvaroch, ktoré sú na obrázkoch, využijem mobilnú aplikáciu. Najprv deťom ukážem, ako sa s aplikáciou pracuje a následne dám deťom možnosť, aby sa pozreli na tieto útvary z rôznych uhlov. Pýtam sa detí, čo ich zaujalo alebo možno prekvapilo, keď vidia priestorové útvary v takejto aplikácii."

ISSN 2694-8133

Obrázok 5. Fotodokumentácia použitia AR z návrhu Lucie

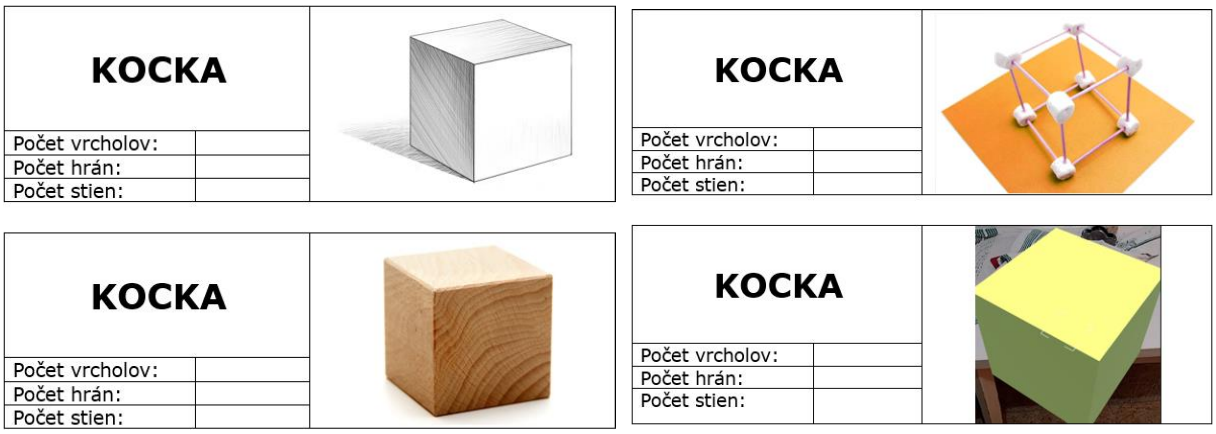
Analýza návrhu:

Lucia vo svojom popise návrhu realizácie používa AR technológiu na poskytovanie matematického obsahu v rozsahu danom štátnym vzdelávacím programom predmetu s cieľom identifikovať, rozlíšiť a pomenovať základné priestorové útvary – kocku, guľu a valec. Technológia je v jej návrhu využívaná ako doplňujúci vizualizačný prostriedok upevnenia poznatkov o týchto elementárnych telesách. Podľa ňou kladených otázok uvedených v návrhu možno usúdiť, že AR slúži skôr ako motivačný činiteľ na vyvolanie záujmu žiakov o prezentovaný matematický obsah. Pri integrovaní technológie do vzdelávacieho prostredia je dominujúcim aktívnym používateľom technológie Lucia ako učiteľka, žiaci môžu, ale tiež nemusia mať priamy kontakt s uvedenou technológiou. Analýzu uzatvárame konštatovaním, že Lucia aktivizovala deti možnosťou vyskúšať si prácu s mobilnou aplikáciou a následnou diskusiou o jej výstupoch, čím pre nich vytvorila aktívne vzdelávacie prostredie. V popisovanom prípade bola dosiahnutá prvá, t. j. vstupná úroveň integrácie AR do aktívneho vzdelávacieho prostredia.

4.2. Prípad Eva

Stanovište AR

„Stiahnutú aplikáciu v tablete dáme k dispozícii deťom, nech si ju otvoria pomocou návodu z ilustrovaných obrázkov. Po vybratí požadovaného útvaru, v našom prípade sa jedná o kocku, ju deti môžu zobraziť a pozorovať zo všetkých strán a uhlov. Nabádame ich zapísať si, čo pri svojom pozorovaní zistili (počet vrcholov, hrán a stien). … Výsledky z jednotlivých stanovíšť si žiaci porovnajú. … Deti za prácu pochválime.“



Obrázok 6. Pripravené pozorovacie hárky pre jednotlivé stanovištia z Evinho návrhu matematickej aktivity

Je potrebné doplniť, že Eva v uvedenom didaktickom návrhu pripravila celkovo štyri stanovištia, medzi ktorými sa vytvorené skupinky detí majú cyklicky presúvať. Pre každé stanovište je pripravený podporný materiál (pozorovací hárok, štvorcová sieť, stavebnica z kociek, špáradlá, plastelína, obrázkový návod pre prácu s mobilnou aplikáciou). V nasledujúcej analýze sa primárne zameriame na stanovište AR.

Analýza návrhu:

Zvolenou organizačnou formou práce v spracovaní svojho návrhu vytvára Eva pri stanovišti s AR nielen aktívne, ale predovšetkým kolaboratívne vzdelávacie prostredie. Ponúka pre každú skupinu pripravený pozorovací hárok a pokynmi nabáda deti k spoločnému zaznamenaniu a overovaniu si získaných vedomostí s využitím nainštalovanej mobilnej aplikácie.

V popise realizácie aktivity používa vybranú mobilnú aplikáciu s AR technológiou konvenčným spôsobom, t. j. ona ako učiteľka rozhoduje o tom, ktorý technologický nástroj bude použitý, kedy a akým spôsobom bude použitý. Expozícia žiakov je daná obsahom pozorovacieho hárku. V ňom je požadované doplnenie konkrétnych, jednoznačne daných údajov zahŕňajúcich procesné pochopenie matematického obsahu. Technológia AR je použitá ako jeden z výskumných nástrojov umožňujúci alternatívny spôsob vizualizácie kocky v trojrozmernom priestore. Deťom dovoľuje zistiť, resp. overiť si získané poznatky z iných stanovíšť. V tomto návrhu možno integráciu technológie zhodnotiť dosiahnutím adopčnej úrovne integrácie AR v kolaboratívnom vzdelávacom prostredí.

4.3. Prípad Monika

„Chodím hľadám, čo mám znať,
poďte mi deti pomáhať.
*Po *vonku sa prejdime*
a takýto útvar nájdime.“

** triede, škole, dvore, atď.*

„Každá dvojica si v aplikácii z ponuky vyberie niektorú možnosť, nasníma vodorovný textúrovaný povrch a klikne na zobrazený biely štvorček. Aplikácia zobrazí 3D model vybraného telesa v rozšírenej realite, pričom deti môžu skúmať jeho vlastnosti pohybom v skutočnom prostredí. Následne sa snažia nájsť a vyfotiť predmety podobného tvaru vo svojom okolí mobilom pomocou printscreenu obrazovky. Obrázky zozbierame a spoločne v počítači roztriedime. Doplníme k nim popisky… Výsledkom bude plagát o nájdených telesách okolo nás.“

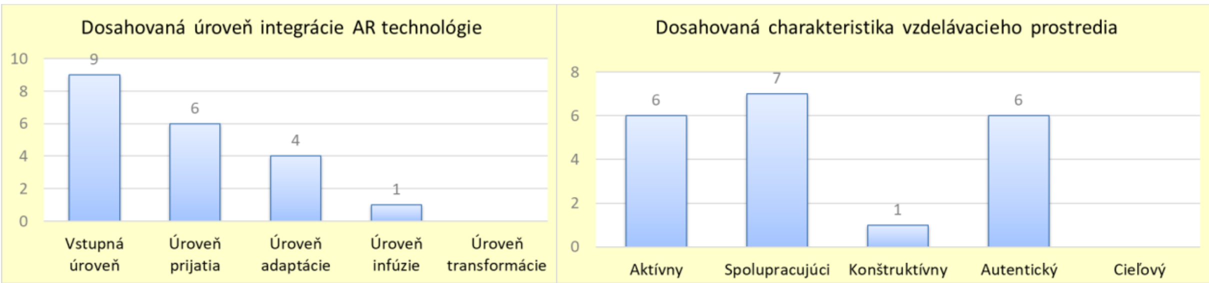
Obrázok 7. Fotodokumentácia výstupov z didaktického návrhu Moniky

Analýza:

Monika pripravila návrh outdoorovej aktivity realizovanej v školskom klube detí (ŠKD). Do činnosti detí je flexibilne integrované využitie mobilnej aplikácie v celom svojom rozsahu a Monika ho dopĺňa použitím ďalších technologických nástrojov (printscreen displeja mobilného zariadenia, posielanie resp. zdieľanie súborov, práca s grafickým alebo textovým editorom). Deti sú v tomto návrhu schopné robiť informované rozhodnutia o tom, kedy a ako budú tieto nástroje používať. Použitie mobilnej aplikácie Monika prenáša do autentického prostredia detí a poskytuje im pri práci s AR technológiou úplnú autonómiu. Deti si, pravdepodobne pod jej dozorom, vyberajú vhodné technologické nástroje na dokončenie výstupov majúcich zmysluplný kontext nadväzujúci na stanovený rámec výučby. V tomto návrhu je výstupom skupinovej práce dielo prezentujúce schopnosť detí i v mladšom školskom veku vytvárať účelné a s matematickým kontextom súvisiace produkty.

Predpokladom realizácie Monikinho návrhu je však dosiahnutie istej úrovne digitálnej gramotnosti detí pri práci s konkrétnym mobilným zariadením. Vychádzame pritom z faktu, že okrem návodu k práci s mobilnou aplikáciou, sa inštruktážne pokyny k zvládnutiu ďalších technologických nástrojov v návrhu už nenachádzajú. Analýzu možno uzavrieť s výsledkom dosiahnutia úrovne infúzie AR do autentického vzdelávacieho prostredia.

Odpoveď na ostatnú výskumnú otázku dopytujúcu sa na úroveň integrácie AR, ktorú uprednostňujú študenti v spracovaní návrhu matematickej aktivity, bola opätovne vyhodnotená deskriptívne s využitím modelu TIM. V horizontálnej línii (obrázok 8 vľavo) možno pozorovať vo vyšších úrovniach znižujúcu sa početnosť návrhov. Dôvody tohto trendu, resp. dôvody výberu konkrétnej úrovne nebolo možné vo všetkých prípadoch identifikovať. Pri sumarizácii charakteristiky vzdelávacieho prostredia sa vyššie hodnoty početnosti objavili pri vytváraní aktívneho, spolupracujúceho a autentického prostredia. Konštruktívne a na cieľ zamerané vzdelávacie prostredie sa návrhoch študentov vyskytovalo naozaj len ojedinele alebo vôbec (obrázok 8 vpravo).



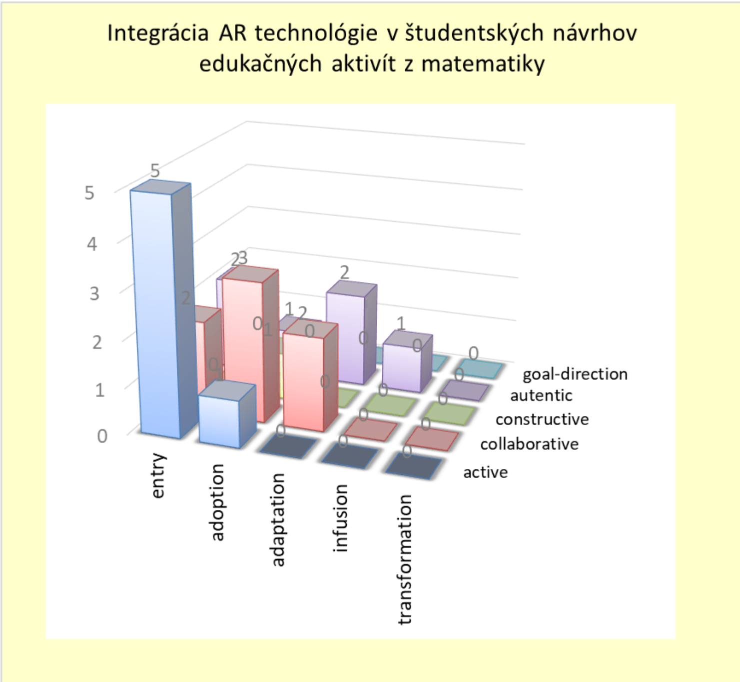
Obrázok 8. Deskriptívny prehľad početností charakteristík sledovaných v TIM

5. Diskusia

Plastickejší obraz rozloženia oboch sledovaných línií matice integrácie ponúka jeho 3D zobrazenie (obrázok 9). V ňom je badateľná vyššia koncentrovanosť výskytu študentských návrhov v ľavom dolnom kvadrante sledovaných charakteristík matice. Tie možno považovať za menej náročné pozície integrácie technológie vo vzdelávacom prostredí. Diskusia o takejto preferencii študentov odkrýva subjektívne i objektívne dôvody ich výberu.

K objektívnym dôvodom možno priradiť novosť technológie a chýbajúcu skúsenosť s ňou. Pre niektorých študentov to bola dokonca prvá skúsenosť s AR technológiou vo výučbe i v praktickom živote. Traja študenti signalizovali problémy pri inštalácii mobilnej aplikácie. Dôvodom ich nezdaru bol nevhodný operačný systém v nimi používanom mobilnom zariadení. K ďalším objektívnym dôvodom patria limity samotnej technológie. Tá, v prípade horizontálneho kotvenia, kladie okrem už spomínaných požiadaviek na povrchovú úpravu snímanej roviny i požiadavky na dostatočné osvetlenie prostredia, v ktorom je technológia používaná. Ostatným dôvodom absencie výberu konkrétnych charakteristík vzdelávacích prostredí môže byť i samotná mobilná aplikácia, ktorá v rámci predom stanoveného matematického obsahu a spôsobu jeho vizualizácie podporovala prácu vo vybraných, nie však vo všetkých prostrediach rovnako podnetne.

V rámci subjektívnych dôvodov výberu jednoduchších spôsobov integrácie sa v diskusii a komentároch konkrétnych študentov vyskytli zdôvodnenia výberu v podobe „bolo to jednoduchšie", „toto ma prvé napadlo", „určite by sa dalo aktivitu ešte viac rozpracovať, no nepovažovala som to za potrebné", „spracovanie bolo rýchle, neodhadol som čas".



Obrázok 9. Grafické znázornenie dosiahnutej integrácie AR technológie v študentských návrhoch sledované charakteristikami matice MIT

6. Záver

Integráciu AR do matematických aktivít považujeme za dynamický proces, ktorý vyžaduje flexibilitu, tvorivosť a neustálu snahu o zlepšenie existujúcich pedagogických postupov, technologických nástrojov a výber vhodných vzdelávacích obsahov s cieľom efektívne podporiť nastavené edukačné procesy a vyžadovať aktívnu participáciu edukantov pri osvojovaní si nových poznatkov.

Prípadové štúdie predstavené v tomto článku nám poskytujú cenné informácie o možnom využití AR v edukačných aktivitách s matematickým kontextom. Použitie mobilnej aplikácie pracujúcej s AR v nich bolo primárne zacielené na identifikáciu jednoduchých telies a ich vlastností v školskej geometrii na primárnom stupni vzdelávania, sekundárne je však potenciál technológie využívaný aj v podobe motivačného činiteľa podpory záujmu žiakov, resp. detí o štúdium matematiky.

Pri analýze študentských návrhov edukačných aktivít integrujúcich AR do vzdelávacieho prostredia bol sledovaný výskyt jednotlivých charakteristík modelu MIT, ktorý umožnil následnú deskripciu aktuálne dosahovaného stavu. Ukazuje sa, že najvyššie hodnoty integrácie AR prezentované použitím mobilnej aplikácie boli spojené so vstupnou úrovňou a postupne so zvyšujúcou sa náročnosťou integrácie do vzdelávacích prostredí klesali. Z piatich, v matici sledovaných vzdelávacích prostredí, boli vo vyššej a navzájom porovnateľnej početnosti pokryté tri z nich, konkrétne aktívne, spolupracujúce a autentické prostredie. Diskusia preto zahŕňa analýzu objektívnych a subjektívnych dôvodov rozloženia početností charakteristík integrácie v sledovaných prípadoch.

V závere môžeme konštatovať, že AR technológia prináša mnoho príležitostí na podporu vzdelávacieho procesu. Zároveň však vyžaduje starostlivé plánovanie, prípravu a adaptáciu obsahu pre potreby žiakov, resp. detí v rámci formálneho i neformálneho matematického vzdelávania.

Acknowledgements

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 024PU-4/2024 Technológia rozšírenej reality a jej inkorporácia do matematickej prípravy študentov v študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika riešeného na PF PU v Prešove.

Literatúra

Council of the European Union. (2021). *Odporúčanie Rady z 29. novembra 2021 týkajúce sa metód zmiešaného učenia v záujme vysokokvalitného a inkluzívneho primárneho a sekundárneho vzdelávania*. 2021/C 504/03.

Council of the European Union. (2023). *Odporúčania Rady z 23. novembra 2023, na zlepšenie sprostredkovania digitálnych zručností a kompetencií vo vzdelávaní a odbornej príprave*. C/2024/1030.

Demitriadou, E., Stavroulia, K.-E., & Lanitis, A. (2020). Comparative evaluation of virtual and augmented reality for teaching mathematics in primary education. *Education and Information Technologies*, 25(1), 381–401. https://doi.org/10.1007/s10639-019-09973-5

Dofková, R., Laitochová, J., & Nocar, D. (2020). *Using open educational resources by primary teachers for mathematic teaching* (s. 1771). https://doi.org/10.21125/inted.2020.0564

FCIT. (2019). *Technology Integration Matrix*. https://fcit.usf.edu/matrix

Fernández-Enríquez, R., & Delgado-Martín, L. (2020). Augmented Reality as a Didactic Resource for Teaching Mathematics. *Applied Sciences*, *10*(7), Article 7. https://doi.org /10.3390/app10072560

Harmes, J. C., Welsh, J. L., & Winkelman, R. J. (2016). A Framework for Defining and Evaluating Technology Integration in the Instruction of Real-World Skills. In *Handbook of Research on Technology Tools for Real-World Skill Development* (s. 137–162). IGI Global. https://doi.org/10.4018/978-1-4666-9441-5.ch006

Hnatová, J. (2023). *Technológia rozšírenej reality v matematickej edukácii: SWOT analýza*. Prešovská univerzita v Prešove.

Chaudron, S., Di, G. R., & Gemo, M. (2018). Young Children (0–8) and Digital Technology – A qualitative study across Europe. *Joint Research Centre EU*. https://doi.org/10.2760 /294383

Laitochová, J., Nocar, D., & Dofková, R. (2020). *Teachers' perception of the introduction of digital technology in teaching mathematics* (s. 1222). https://doi.org/10.21125/inted.2020.0418

Lipták, J. (2023). Rozšírená realita vo voľnočasovej matematickej edukácii očami študentov predprimárnej a primárnej pedagogiky. *Elementary Mathematics Education Journal*, *5*(2), 17–24.

Mobile Operating System Market Share Worldwide. (2024). StatCounter Global Stats. https://gs.statcounter.com/os-market-share/mobile/worldwide

Mokriš, M., Šimčíková, E., & Tomková, B. (2023). Riešenie rovníc v príprave učiteľov elementaristov. *Elementary Mathematics Education Journal*, *5*(2), 25–33.

Prídavková, A. (2023). Modelling of elementary mathematical concepts using augmented reality technology in primary education. *EDULEARN23 Proceedings*, 7249–7254. https://doi.org/10.21125/edulearn.2023.1893

Statista. (2023). *AR & VR Worldwide Statista Market Forecast*. https://www.statista.com/outlook/amo/ar-vr/worldwide

Volioti, C., Orovas, C., Sapounidis, T., Trachanas, G., & Keramopoulos, E. (2023). Augmented Reality in Primary Education: An Active Learning Approach in Mathematics. *Computers, 12*(10), Article 10. https://doi.org/10.3390/computers12100207

VYUŽITIE MATEMATICKÝCH ÚLOH V KONTEXTE REŠPEKTOVANIA PREFERENCIE UČEBNÝCH ŠTÝLOV ŽIAKOV

Lenka MATEJČIKOVÁ[1], Zdenka ZASTKOVÁ[1]
[1] Katolícka univerzita v Ružomberku, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)
lenka.matejcikova@ku.sk, zdenka.zastkova@ku.sk

Abstrakt

Príspevok charakterizuje rôzne učebné štýly žiakov, ktoré determinujú druhy inteligencie podľa H. Gardnera. Jedná sa o žiakov s inteligenciou logicko-matematickou, lingvistickou, priestorovou, telesno-pohybovou, hudobnou, prírodnou, intrapersonálnou a interpersonálnou. S ohľadom na akceptáciu potrieb žiakov vyplývajúcich z ich učebných štýlov, navrhujeme modelové matematické úlohy pre žiakov primárneho vzdelávania.

Kľúčové slová: učebný štýl, matematická úloha, potreby žiaka, diferenciácia

USE OF MATHEMATICAL PROBLEMS IN THE CONTEXT OF RESPECTING STUDENTS' LEARNING STYLE PREFERENCES

Abstract

The paper characterizes the different learning styles of students, which determine the types of intelligence according to H. Gardner. These are students with logical-mathematical, linguistic, visual-spatial, bodily-kinesthetic, musical, natural, intrapersonal and interpersonal intelligence. Regarding the acceptance of students' needs resulting from their learning styles, we propose model mathematical tasks for primary education students.

Keywords: teaching style, mathematical task, student needs, differentiation

1. Úvod

Analýza súčasnej školy, napriek pretrvávajúcim snahám spoločnosti o jej obrodu, sa vyznačuje neustálym tlakom na výkon žiakov, prítomnosťou prevahy transmisívneho vyučovacieho štýlu, zvýšeným výskytom nežiaducich foriem správania a iných závažných problémov, ktoré sa podpisujú na efektívnosti vzdelávania. V pedagogických odborných diskurzoch sa opakovane stretávame s myšlienkou, že škola nezachytila dynamiku meniaceho sa života a stále si vystačí so zaužívanými metódami a formami práce. Tie, žiaľ, vyplývajúc zo značnej diverzity žiakov v triedach, nie sú dostačujúce, aby vyhoveli potrebám a možnostiam všetkých žiakov. Nejde pritom o ich absenciu, ale skôr o nízku ochotu učiteľov experimentovať s nimi a uplatňovať ich. Z tohto dôvodu sme sa rozhodli v príspevku objasniť, prečo a ako sa dá vyučovanie matematiky prispôsobiť individuálnym potrebám žiakov, prostredníctvom variability zadania matematických úloh. Prvotným krokom k zaisteniu úspechu vo vyučovaní matematiky je poznanie žiaka, ktoré pramení z diverzity úrovne jeho kognitívnych funkcií, učebných štýlov, schopností, záujmov, biologických, psychických a sociálnych predpokladov.

2. Teória multidimenzionálnej inteligencie v kontexte vyučovania matematiky

V roku 1983 H. Gardner spochybnil klasické poňatie všeobecnej inteligencie, ktorá podľa Vágnerovej (2020) označuje celkovú úroveň poznávacích procesov, relatívne stabilný komplex schopností, ktoré sa v priebehu života zásadným spôsobom nemenia. Gardner (1999) chápe inteligenciu ako biopsychologický potenciál spracovávať informácie, ktorý môže byť aktivovaný v kultúrnom prostredí na riešenie problémov a tvorbu produktov, užitočných v rôznych kultúrach. Podľa jeho teórie (Gardner, Hatch, 1989) je každý človek schopný siedmich, relatívne nezávislých foriem spracovania informácie.

V našej kultúre, nevynímajúc vyučovanie, sa za najhodnotnejšie považujú výkony vo verbálnej a logicko-matematickej oblasti, preto aj vyučovanie ostatných predmetov orientujeme na saturáciu predmetných schopností. Teória viacnásobnej inteligencie hovorí o tom, že každý žiak má všetky druhy inteligencie rozvinuté v rôznej miere a intenzite, vytvára preto jedinečný profil každého žiaka. Sám Gardner uznáva, že komplex mnohodimenzionálnej inteligencie je dynamický a prevažujúci druh inteligencie sa môže meniť počas rozvoja žiaka, pričom inteligencia sa môže rozvíjať aj na základe skúsenosti prostredníctvom rôznych činností (Petlák, 2020). Gardner (1989) identifikoval nasledovné druhy inteligencie:

1. Logicko-matematická inteligencia – ovplyvňuje induktívne a deduktívne myslenie, číselné operácie a abstraktné vzorce, súvisí s logikou, abstrakciami, uvažovaním, výpočtami, strategickým a kritickým myslením. Žiak s preferenciou tohto druhu inteligencie rád počíta, hľadá vzťahy medzi predmetmi a javmi, píše si prehľadné poznámky, experimentuje, obľubuje matematické hry.
2. Verbálno-lingvistická inteligencia – vzťahuje sa citlivosť slova a jeho významu, ovládanie reči a jazyka v hovorenej a písanej forme. Lingvistická inteligencia môže byť vyjadrená tromi hlavnými spôsobmi: analyticko-akademicky (čítanie, písanie, definície), prakticky (slovné alebo písomné pokyny, vysvetlenia, rozprávanie) a kreatívne (rozprávanie príbehov, písanie poézie, tvorba a interpretácia textov piesní, nápadité slovné hračky, použitie humoru). Žiak s preferenciou tohto druhu inteligencie rád číta, počúva, tvorí rôzne texty, obľubuje slovné hry a ľahko si pamätá počuté a čítané informácie.
3. Vizuálno-priestorová inteligencia – táto oblasť sa zaoberá priestorovým uvedomením, úsudkom a schopnosťou dobrej predstavivosti. Ide o spôsobilosť predstavovať si rôzne obrazy alebo situácie v mysli bez priameho vnímania týchto podnetov očami. Žiak s prevahou tohto druhu inteligencie rád kreslí a graficky znázorňuje počuté a videné, rád pracuje s mapami, do činnosti zapája viac zmyslov. Často však nie je pohotový verbálne vyjadriť svoje predstavy.
4. Intrapersonálna inteligencia – viaže sa na schopnosť hlbokého a presného vnímania samého seba, k metakognícii (vnímanie spôsobu akým poznávam), k vedomiu vlastného bytia, t. j. poznaniu svojich silných a slabých stránok, riadeniu svojich vlastných reakcií, emócií a správania. Činnosti spojené s touto inteligenciou zahŕňajú introspekciu a sebareflexiu. Intrapersonálne zručnosti možno kategorizovať najmenej do štyroch oblastí: metakognícia, uvedomenie si myšlienok, riadenie pocitov a emócií, správanie, sebariadenie, rozhodovanie a úsudok. Žiak s prevahou tohto druhu inteligencie je zameraný „sám na seba“, obľubuje individuálne činnosti, v argumentácii sa opiera o svoju skúsenosť.
5. Interpersonálna inteligencia – prejavuje sa v citlivosti na nálady, pocity, motiváciu a zámery iných, vo vnímaní a chápaní medziľudských vzťahov, v schopnosti efektívne komunikovať, spolupracovať alebo viesť skupinu. Žiak s prevahou tohto druhu inteligencie rád komunikuje (verbálne aj neverbálne), obľubuje skupinové aktivity, efektívne rieši konflikty, vytvára pozitívne vzťahy s ostatnými.

6. Telesno-kinestetická inteligencia – vzťahuje sa k telesnému pohybu a uvedomovaniu si vlastného tela a pohybov, zahŕňa aj zmysel pre načasovanie, jasný zmysel pre cieľ fyzickej akcie spolu so schopnosťou trénovať reakcie. Využíva motorický mozgový kortex, ktorý kontroluje telesný pohyb – koordináciu, rovnováhu, obratnosť a motorickú kontrolu. Žiak s prevahou tohto druhu inteligencie potrebuje manipulovať s predmetmi, rád sa zapája do pohybových aktivít, sleduje dianie okolo seba.
7. Hudobno-rytmická inteligencia – zaoberá sa tónovými radmi, zvukmi, rytmom a hlukom. Žiak s prevahou tohto druhu inteligencie má zmysel pre rytmus, intonáciu, hudbu, emocionálne vnímanie, je citlivý na zvuky.
8. Neskôr bola pridaná aj prírodná inteligencia – schopnosť poznávať, diskriminovať a hľadať vzťahy medzi prírodnými podnetmi, konkrétne živočíšnymi a rastlinnými druhmi. Medzi základné kognitívne schopnosti v rámci prírodnej inteligencie zaraďujeme rozpoznávanie druhov, empatiu pre živé bytosti.

Aktivizácia jednotlivých druhov inteligencie, ich variabilná kombinácia a miera rozvinutia, evokuje dôležitosť uplatňovania aj flexibilných vyučovacích postupov v praxi. Odozva predmetnej teórie sa v pedagogike prejavila najmä v etablovaní učebných štýlov, ktoré s didaktickým presahom výstižne spracoval Petlák (2020):

1. Žiak s prevahou logicko-matematickej inteligencie:
   - dáva prednosť práci s číslami, hádankám, šachu, hľadaniu logických riešení, kategorizácii vecí a javov;
   - je preňho typické riešenie problémových situácií, robenie si prehľadných poznámok;
   - vyhovuje mu učivo, ktoré má logické súvislosti, práca s číslami a tabuľkami, abstraktné myslenie;
   - vhodné aktivity sú zisťovanie vzťahov medzi javmi, riešenie tvorivých úloh, hlavolamy, dokazovanie a vysvetľovanie vzťahov a súvislostí v učive, matematické a počítačové hry.
2. Žiak s prevahou lingvistickej (verbálnej) inteligencie:
   - dáva prednosť písaniu, čítaniu, hre so slovami, riešeniu krížoviek;
   - je preňho typické ľahké porozumenie inštrukciám, memorovanie;
   - vyhovuje mu komunikácia pri učení, počúvanie učiteľa a spolužiaka;
   - vhodné aktivity sú vysvetľovanie, vytváranie pojmových máp, písanie listov, riešenie slovných hádaniek, vyhľadávanie informácií, rozprávanie, rozhovory, čítanie, uplatnenie gramatických pravidiel.
3. Žiak s prevahou vizuálno-priestorovej inteligencie:
   - dáva prednosť kresleniu, modelovaniu, práci s mapou, náčrtmi a grafmi;
   - je preňho typická ľahká orientácia v rovine a priestore, predstavivosť, dobrá obrazotvornosť;
   - vyhovuje mu pohyb, manipulácia s materiálmi, porovnávanie;
   - vhodné aktivity sú čítanie z mapy a diagramov, návrh modelov, vizualizácia učiva (napr. pojmové mapy), puzzle.
4. Žiak s prevahou intrapersonálnej inteligencie:
   - dáva prednosť samostatnosti, nezávislosti, svojim záujmom, zážitkom a skúsenostiam;
   - je preňho typické zameranie „do seba“, uvedomenie si svojho „ja“, seba-motivácia, seba-aktivizácia, duchovno;
   - vyhovuje mu osobné vlastné tempo pri činnosti, nezávislosť na iných;
   - vhodné aktivity sú individuálne projekty a samostatné úlohy, stanovenie cieľov činnosti, hodnotenie činnosti, spájanie informácií s osobnými zážitkami, úvahy.

5. Žiak s prevahou interpersonálnej inteligencie:
   - dáva prednosť samostatnosti, nezávislosti, svojim záujmom, zážitkom a skúsenostiam;
   - je preňho typická všímavosť k iným, spolupráca s ostatnými, pomoc druhým, empatia, dobré komunikačné zručnosti;
   - vyhovuje mu učenie spoluprácou a rozhovormi;
   - vhodné aktivity sú interpretovanie rozprávania iných, organizácia činnosti v skupine, vysvetľovanie, riešenie kooperatívnych úloh, spoločenské hry.
6. Žiak s prevahou telesno-pohybovej inteligencie:
   - dáva prednosť pohybovým aktivitám;
   - je preňho typická zručnosť pri manipulovaní s predmetmi;
   - vyhovuje mu učenie, pri ktorom môže využívať pohyb, napodobňovanie, dramatizáciu;
   - vhodné aktivity sú manipulačné činnosti, uplatnenie jemnej a hrubej motoriky pri učení.
7. Žiak s prevahou hudobnej inteligencie:
   - dáva prednosť akustickým stimulom – spievaniu, počúvaniu hudby, hre na hudobný nástroj;
   - je preňho typický zmysel pre rytmus a intonáciu;
   - vyhovuje mu zaujímavý výklad učiva, učenie pri hudbe;
   - vhodné aktivity sú improvizácia s hudobným sprievodom, rytmizovanie, písanie poézie.
8. Žiak s prevahou prírodnej inteligencie:
   - dáva prednosť prírode, zvieratám a je citlivý na problémy týkajúce sa ochrany prírody a ekologických vzťahov;
   - je preňho typická turistika a prechádzky, starostlivosť o zvieratá, rád trávi čas v prírode;
   - vyhovuje mu riešenie ekologických problémov, ochrana zvierat a prírody, hľadanie súvislostí medzi učivom a okolitým svetom;
   - vhodné aktivity sú kategorizovanie a hierarchizovanie javov, rozprávanie, pestovanie, chovateľstvo, prírodné objekty, učenie v exteriéri.

Na základe klasifikácie rôznych učebných štýlov žiakov následne uvádzame možnosti ich rešpektovania v kontexte vyučovania matematiky v podobe ukážok diferencovania matematických úloh.

3. Návrh matematických úloh v kontexte rešpektovania preferencie učebných štýlov žiakov

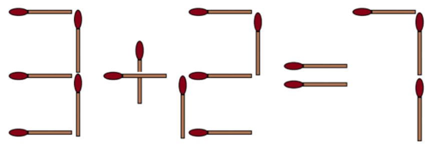
Vo vyučovaní matematiky môže učiteľ reflektovať diferenciáciu matematických úloh tak, že do procesu zaradí také úlohy, v ktorých je rešpektovaná preferencia učebných štýlov žiakov. V príspevku ponúkame návrhy diferencovaných matematických úloh pre každý typ učebného štýlu.

Pre žiakov s prevahou **logicko-matematickej inteligencie** je zaujímavá každá matematická úloha, pretože majú radi riešenie matematických problémov. Vhodnými úlohami pre takýchto žiakov sú rôzne hlavolamy, ako napríklad magický štvorec, či zápalkové hlavolamy (Obrázok 1).

a) Doplňte do tabuľky chýbajúce čísla tak, aby súčet políčok v každom riadku, stĺpci a na uhlopriečkach bol rovnaký.

16	3		13
		7	12
	10		8
4	15		1

b) Premiestnite jednu zápalku tak, aby platila rovnosť.



Obrázok 1. Návrh úloh pre žiakov s prevahou logicko-matematickej inteligencie
(zdroj: autorské spracovanie)

Žiaci s prevahou **lingvistickej inteligencie** preferujú hru so slovami. Z toho dôvodu je vhodné počas hodín matematiky využiť úlohy, v ktorých sa pracuje s písmenami, hľadajú sa vhodné kombinácie písmen, ale aj šifry (Obrázok 2).

a) Koľko rôznych zmysluplných slov viete vytvoriť z písmen J E P Ž A K I L , ak sa písmená v slove nesmú opakovať?

b) Nájdi slovo skryté vo výsledkoch úloh:

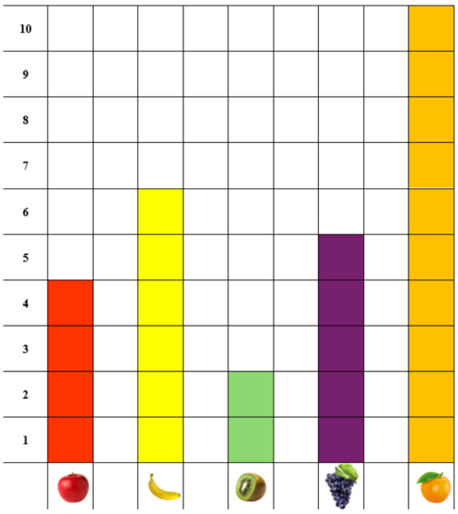
a) 2 + 3 = _
b) 9 – 1 = _
c) 4 + 6 = _
d) 8 – 2 = _
e) 0 – 0 = _
f) 4 + 1 + 2 = _
g) 10 – 7 = _

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
T	E	S	O	M	R	I	K	A	J	Z

Obrázok 2. Návrh úloh pre žiakov s prevahou lingvistickej inteligencie
(zdroj: autorské spracovanie)

Žiaci s prevahou **priestorovej inteligencie** vynikajú v geometrii a je pre nich jednoduché orientovať sa v rovine a v priestore. Vhodnými úlohami môžu byť bludiská, či práca s grafom alebo tabuľkou. Účelom modelovej aktivity ilustrovanej na Obrázku 3 je s vizuálnou oporou uvedeného grafu zorientovať sa v grafe a vedieť odpovedať na otázky predložené učiteľom.

ISSN 2694-8133



Koľko je pomarančov?

Je menej hrozna alebo kivi?

Koľko jabĺk by sme museli pridať, aby ich bolo rovnako ako pomarančov?

O koľko viac je banánov ako jabĺk?

Koľko je spolu kivi a banánov?

Je nejakého ovocia rovnako?

Ktorého ovocia je najviac?

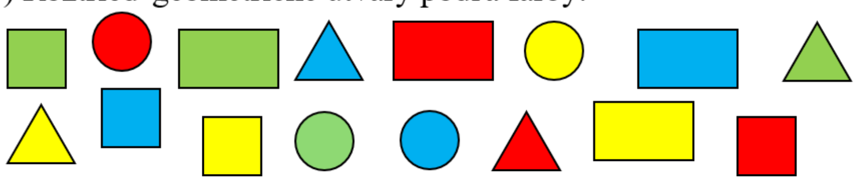
Obrázok 3. Návrh úlohy pre žiakov s prevahou priestorovej inteligencie
(zdroj: autorské spracovanie)

Pre žiakov s prevahou **telesno-pohybovej inteligencie** je prirodzeným prostriedkom učenia sa pohyb. Preto je vhodné zaradiť úlohy zamerané na uplatnenie jemnej a hrubej motoriky v činnosti, manipuláciu s predmetmi (napr. triedenie s využitím Dienesovho logického bloku), či využiť pri vyučovaní matematiky aktivity, v ktorých sa môžu žiaci pohybovať (v tomto prípade považujeme za vhodnú pomôcku napr. krokovací pás využívaný vo vyučovaní Hejného metódou). Na Obrázku 4a) je ilustrovaný krokovací pás, na ktorom sa žiaci v priestore triedy pohybujú v kontexte numerácie, sčítania a odčítania čísel. Obrázok 4b) reprezentuje rozmiestnenie 2D vystrihnutých geometrických útvarov Dienesovho logického bloku, ktoré žiaci podľa inštrukcií učiteľa triedia.

a) Krokovací pás

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

b) Roztrieď geometrické útvary podľa farby.

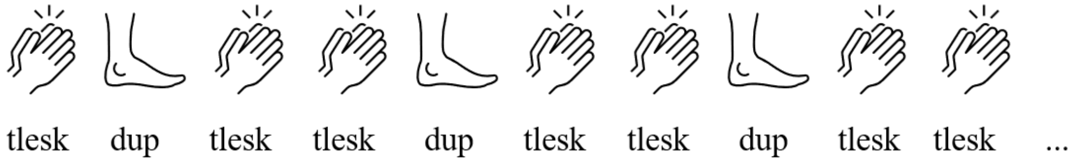


Obrázok 4. Návrh úlohy pre žiakov s prevahou telesno-pohybovej inteligencie
(zdroj: autorské spracovanie)

ISSN 2694-8133

Pre žiakov s prevahou **hudobnej inteligencie** je v rámci matematiky vhodné využiť prácu s rytmom (napr. využitie lineárnych vzorov) (Obrázok 5).

Predveď vzor a pokračuj vo vzore aspoň 5-krát.



Obrázok 5. Návrh úlohy pre žiakov s prevahou hudobnej inteligencie
(zdroj: autorské spracovanie)

Žiaci s prevahou **prírodnej inteligencie** obľubujú prácu s prírodninami, prípadne preferujú, ak je úloha postavená do prírodného kontextu (Obrázok 6).

a) Tereza na gazdovskom dvore pozorovala zajace a sliepky. Celkovo narátala 14 zvieracích hláv a 20 zvieracích nôh. Koľko bolo zajacov? Koľko bolo sliepok?

b) Chlapci si v lese vytvorili súťaž – kto nájde viac šišiek. Karol našiel 13 šišiek, Martin našiel o 5 šišiek viac ako Karol a Lukáš našiel trikrát menej šišiek ako Martin. Koľko šišiek našli všetci chlapci spolu? Kto našiel najviac šišiek?

Obrázok 6. Návrh úlohy pre žiakov s prevahou prírodnej inteligencie
(zdroj: autorské spracovanie)

Žiaci s prevahou **interpersonálnej inteligencie** preferujú prácu v skupinách, pri ktorej môžu o úlohe komunikovať, diskutovať, deliť si úlohy. Úspešnosť v skupinových úlohách závisí od rozvinutia sociálnych zručností žiakov (aktívne počúvanie, argumentácia, vyjadrenie vlastného názoru, rešpektovanie názoru iných), preto odporúčame dôkladne premyslieť stavbu skupín a zadanie skupinovej úlohy (Zastková, 2022). Bližšie požiadavky na plánovanie, realizáciu a evalváciu skupinovej práce žiakov uvádza napr. Zastková (2022), Jablonský (2006), či Kasíková (2001).

Žiaci s prevahou **intrapersonálnej inteligencie** preferujú individuálnu prácu, kde môžu nachádzať, overovať a zdokonaľovať vlastný spôsob riešenia úloh, postupovať vlastným tempom.

Všetky typy nami navrhnutých matematických úloh možno flexibilne prispôsobovať s ohľadom na akceptovanie potrieb žiakov v zmysle ich interpersonálnej a intrapersonálnej inteligencie. Učitelia by mali pri príprave na vyučovaciu hodinu myslieť na to, akých žiakov v triede má a odporúčame tomu prispôsobovať aj vzdelávací proces. Príspevok mal snahu ukázať, ako sa dajú vo vyučovaní matematiky využiť diferencované úlohy, ktoré uplatňujú a facilitujú rôzne spôsoby učenia sa žiakov. Pre zistenie rôznych druhov inteligencie žiakov odporúčame učiteľom uplatniť dotazník MI na zistenie učebných štýlov žiakov podľa prevažujúcich druhov inteligencie (Turek, 2005).

ISSN 2694-8133

4. Záver

S ohľadom na limity a kritiku teórie viacnásobnej inteligencie, ktorú pripúšťame, môžeme vyzdvihnúť variabilitu možnej úspešnosti žiaka, za predpokladu posilňovania jeho učebného potenciálu. Účelom navrhnutých matematických úloh je saturovať potreby žiakov s ohľadom na preferujúci spôsob ich poznávania a pomáhať žiakom pri ich celkovom rozvoji. V súvislosti s aktivizovaním jednotlivých druhov inteligencie sú teda dôležité také vyučovacie postupy, ktoré zohľadňujú variabilitu dominantných druhov inteligencie u žiakov, resp. tých, ktoré sú lepšie rozvinuté ako ostatné.

Acknowledgements

Príspevok vznikol ako súčasť riešenia projektu KEGA 017KU-4/2022 Podpory a prekážky diferencovaného vyučovania s ohľadom na zabezpečenie rovností príležitostí vo vzdelávaní sociálne znevýhodnených žiakov.

Literatúra

Gardner, H. (1999). *Dimenze myšlení. Teorie rozmanitých inteligencí.* Praha: Portál.

Gardner, H. & Hatch, H. (1989). Multiple Intelligences to School: Educational Implications of the Theory of Multiple Intelligence: *Educational Researcher*, *1989*(18), 4–9.

Jablonský, T. (2006). *Kooperatívne učenie vo výchove*. Trnava: Trnavská univerzita v Trnave.

Kasíková, H. (2001). *Kooperativní učení a vyučování*. Praha: Karolinum.

Petlák, E. (2020). Učebné štýly žiakov (1.). *Manažment školy v praxi. 2020*(3). https://www.direktor.sk/sk/casopis/manazment-skoly-v-praxi/ucebne-styly-ziakov-1.m-691.html

Turek, I. (2005). *Inovácie v didaktike*. Bratislava: MPC.

Vágnerová, M. (2020). *Psychologie osobnosti*. Praha: Portál.

Zastková, Z. (2022). *Kooperatívne aktivity v prírodovede pre žiakov 4. ročníka ZŠ*. Ružomberok: Verbum.

THE SHORTEST KNIGHT'S TOURS

Karel PASTOR[1]
[1] Palacký University Olomouc, Faculty of Education (Czech Republic)
karel.pastor@upol.cz

Abstract

The knight's tour on an 8×8 chessboard is one of the best-known mathematical chess problems, and it is attractive also for pupils aged 6 to 11. This problem has been resolved generally for the chessboard $m \times n$; thus, the question arises as to which knight's tours are the shortest. These knight's tours can be interesting even for younger students because they won't spend too much time trying to solve them. We will study both open and closed knight's tours.

Keywords: Mathematical chess problems, combinatorics, knight's tour.

1. Introduction

In our paper, we will deal with the shortest knight's tours. The knight's tour is a mathematical chess problem. We recall ("Mathematical chess problems", Wikipedia) that a mathematical chess problem is a mathematical problem that is formulated using a chessboard and chess pieces.

The knight's tour problem asks for a tour of a knight who visits all squares on a chess board ("Mathematical chess problems", Wikipedia) exactly once. If the knight's tour ends on a square from which we can get to the first square of the knight's tour by a knight's move, we speak of a closed knight's tour. Otherwise, we speak of an open knight's tour ("Knight's tours", Wikipedia).

A knight moves two squares horizontally, one square vertically, or one square horizontally, then two vertically. For example, in Figure 1, a white knight on the square h2 can move on the selected squares g4, f3, and f1. In Figure 2, a white knight on the square a5 can move on the selected squares b3, b7, c4, and c6.

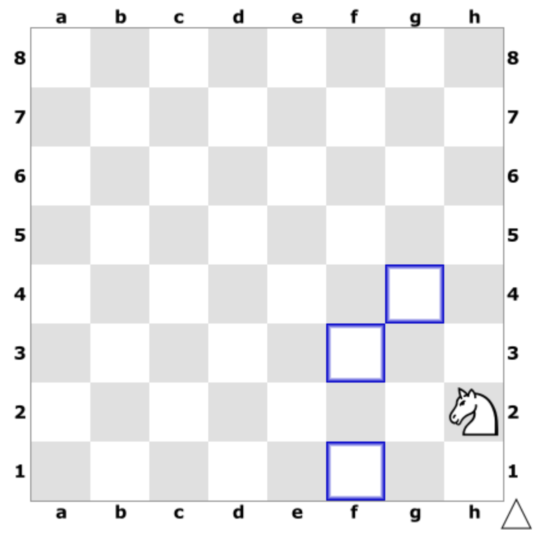


Figure 1. Moves of a knight on h2.

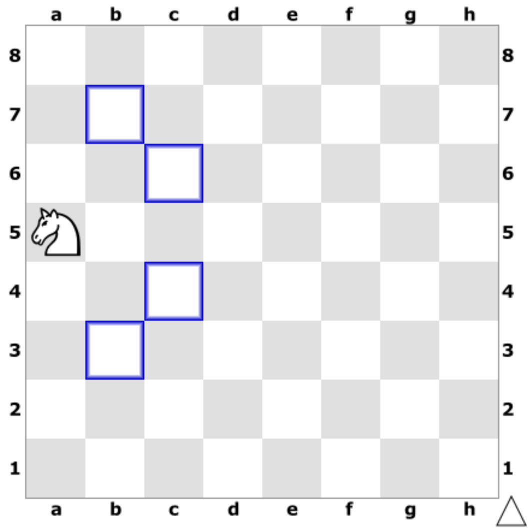


Figure 2. Moves of a knight on a5.

The first mentions of knight's tours date from the 9th century AD ("Knight's tours", Wikipedia). Each closed knight's tour can be done in two directions. If we consider these two walks differing only in direction as a single walk, then the total number of possible closed walks on the 8×8 board is 13 267 364 410 532 ("Knight's tours", Wikipedia). Among the most famous knight's tours is Euler's knight's tour from 1759, which seems to be attractive also for pupils aged 6 to 11 since her algorithm can use four colors (Pastor, 2023); see Figure 3 for an example of Euler's closed knight's tour and Figure 4 for an example of Euler's open knight's tour.

51	38	15	32	63	36	1	28
14	17	50	37	2	29	62	35
39	52	31	16	33	64	27	4
18	13	40	49	30	3	34	61
53	42	9	22	57	48	5	26
12	19	56	41	8	23	60	47
43	54	21	10	45	58	25	6
20	11	44	55	24	7	46	59

Figure 3. Euler's closed knight's tour.

The problem of a knight's tour on the classic 8×8 chessboard can be generalized to the knight's tour on any rectangular chessboard. It is well known for which chessboards the open and closed knight's tour, respectively, is feasible. The relevant theorems are recalled in Sections 2 and 3, respectively. Our article will focus on which chessboard the knight's tours are the shortest. These knight's tours can be interesting even for pupils aged 6 to 11 because they won't spend too much time trying to solve them. We will deal with both closed and open knight's tours.

ISSN 2694-8133

1	18	61	46	15	32	59	34
62	47	2	17	60	35	14	31
19	4	45	64	29	16	33	58
48	63	20	3	36	57	30	13
5	22	49	44	9	28	55	38
50	43	8	21	56	37	12	27
23	6	41	52	25	10	39	54
42	51	24	7	40	53	26	11

Figure 4. Euler's open knight's tour.

2. The shortest closed knight's tour

In his relatively short article, A.L. Schwenk showed (Schwenk, 1991) for which rectangular chessboards it is possible to realize a closed knight's tour.

Theorem 1. An $m \times n$ chessboard with $m \leq n$ has a closed knight's tour unless one or more of these three conditions holds:

i. m and n are both odd,
ii. $m = 1, 2,$ or 4,
iii. $m = 3$ and $n = 4, 6,$ or 8.

We say that a chessboard $m \times n$ has a measure $m \cdot n$, i.e., the measure of the chessboard equals to the number of its squares. The knight's tour on a chessboard A is shorter than the knight's tour on a chessboard B if the measure of A is less than that of B.

Table 1 shows on which chessboards $m \times n$, $3 \leq m \leq 6$, $m \leq n$, $3 \leq n \leq 15$, it is possible to realize a closed knight's tour. The green color of the corresponding square in Table 1 means that the corresponding closed knight's tour is possible. The red color means that the corresponding closed knight's tour is impossible. In the case of admissible closed knight's tours, the measure of the considered chessboard is given.

Table 1. The chessboards and the closed knight's tours.

	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
$n = 3$		x	x	x
$n = 4$			x	x
$n = 5$				x
$n = 6$			30	36
$n = 7$				42
$n = 8$			40	48
$n = 9$				54
$n = 10$	30		50	60
$n = 11$				66
$n = 12$	36		60	72
$n = 13$				78
$n = 14$	42		70	84
$n = 15$				90

Analyzing Table 1, we can easily find the order of chessboards according to their measure on which it is possible to realize a closed knight's tour, see Table 2.

Table 2. The shortest closed knight's tour.

order	chessboards	measure
1.–2.	3 × 10	30
1.–2.	5 × 6	30
3.–4.	3 × 12	36
3.–4.	6 × 6	36
5.	5 × 8	40

There are precisely six closed knight's tours on the chessboard 3 × 10 (Knight´s Tour Notes, 2023) if we again consider two walks differing only in direction as a single walk. Figure 5 shows one of them.

29	2	5	14	11	26	9	18	23	20
4	13	30	27	6	15	24	21	8	17
1	28	3	12	25	10	7	16	19	22

Figure 5. The closed knight's tour 3 × 10.

On the chessboard 5 × 6, there exist only three closed knight's tours. Figure 6 shows the tour found by Euler in 1759 (Knight´s Tour Notes, 2023).

1	14	25	6	29	16
24	5	30	15	20	7
13	2	11	26	17	28
10	23	4	19	8	21
3	12	9	22	27	18

Figure 6. The closed knight's tour 5 × 6.

The chessboard 3 × 12 offers 44 closed knight's tours; let us show one of them in Figure 7 (Knight´s Tour Notes, 2023).

35	2	33	8	5	28	17	14	11	26	23	20
32	7	36	3	30	15	10	27	18	21	12	25
1	34	31	6	9	4	29	16	13	24	19	22

Figure 7. The closed knight's tour 3 × 12.

There are 1245 closed knight's tours on the chessboard 6×6; Figure 8 shows one of them (Knight´s Tour Notes, 2023).

32	7	20	17	30	5
21	18	31	6	27	16
8	33	10	19	4	29
11	22	1	28	15	26
34	9	24	13	36	3
23	12	35	2	25	14

Figure 8. The closed knight's tour 6×6.

Finally, on the chessboard 5×8, there exist 11 closed knight's tours; see Figure 9 for one of them (Knight´s Tour Notes, 2023).

22	7	40	5	20	15	30	33
39	4	21	8	29	32	19	14
26	23	6	1	16	11	34	31
3	38	25	28	9	36	13	18
24	27	2	37	12	17	10	35

Figure 9. The closed knight's tour 5×8.

3. The shortest open knight's tour

Following (Conrad et al., 1994) and (Knight´s Tour Notes, 2023), we can get the answer to the question of which rectangular chessboards it is possible to realize an open knight's tour; see also (Wikipedia, 2024b).

Theorem 2. An $m \times n$ chessboard with $m \leq n$ has an open knight's tour unless one or more of these three conditions holds:

i. $m = 1$ or 2,
ii. $m = 3$ and $n = 3$, 5, or 6,
iii. $m = 4$ and $n = 4$.

Table 3 shows on which chessboards $m \times n$, $3 \leq m \leq 6$, $m \leq n$, $3 \leq n \leq 15$, it is possible to realize a closed knight's tour. The meaning of the colors is the same as in Table 1.

Table 3. The chessboards and the open knight's tours.

	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
$n = 3$		x	x	x
$n = 4$	12		x	x
$n = 5$		20	25	x
$n = 6$		24	30	36
$n = 7$	21	28	35	42
$n = 8$	24	32	40	48
$n = 9$	27	36	45	54
$n = 10$	30	40	50	60
$n = 11$	33	44	55	66
$n = 12$	36	48	60	72
$n = 13$	39	52	65	78
$n = 14$	42	56	70	84
$n = 15$	45	60	75	90

Analyzing Table 3, we can easily find the order of chessboards according to their measure on which it is possible to realize a closed knight's tour, see Table 4.

Table 4. The shortest open knight's tour.

order	**chessboards**	**measure**
1.	3×4	12
2.	4×5	20
3.	3×7	21
4.–5.	3×8	24
4.–5.	4×6	24

Figures 10–14 show examples of the shortest open knight's tours; for more details, see (Knight´s Tour Notes, 2023). Let us note only that there exist 8 open knight's tours on the chessboard 3×4 and 744 on the chessboard 4×6 if we again consider two walks differing only in direction as a single walk.

1	4	7	10
8	11	2	5
3	6	9	12

Figure 10. The open knight's tour 3×4.

1	20	7	16	3
6	15	2	11	8
19	10	13	4	17
14	5	18	9	12

Figure 11. The open knight's tour 4×5.

1	4	7	18	15	10	13
6	21	2	9	12	19	16
3	8	5	20	17	14	11

Figure 12. The open knight's tour 3×7.

3	6	9	12	15	18	23	20
8	11	2	5	24	21	14	17
1	4	7	10	13	16	19	22

Figure 13. The open knight's tour 3×8.

14	1	16	5	24	3
17	10	13	2	21	6
12	15	8	19	4	23
9	18	11	22	7	20

Figure 14. The open knight's tour 4×6.

4. Conclusion

An open knight's tour on smaller-sized chessboards can be interesting for children aged 6 to 11, as it usually takes little time to try to achieve it.

In addition to completely finding the open knight's tour, students can try to create the longest possible one on the given chessboard and compete in this way.

Closed knight's tours are the next step, and starting again with smaller chessboards is advisable.

References

Conrad, A., Hindrichs, T., Morsy, H. & Wegener, I. (1994). Solution of the Knight’s Hamiltonian Path Problem on Chessboards. *Discrete Applied Mathematics 50*(2). https://doi.org/10.1016/0166-218X(92)00170-Q

Knight´s Tour Notes. (2023). Compiled by George Jelliss. https://www.mayhematics.com/t/t.htm

Matematický Klokan. 2015 (in Czech). https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/sbornik2015.pdf

Pastor, K. (2023). Eulerova šachová procházka. *Elementary Mathematics Education Journal, 5*(2). https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No2/Vol5No2_Pastor.pdf

Schwenk, A. J. (1991). Which Rectangular Chessboard Have a Knight´s Tour?. *Mathematics Magazine 164*(5). https://www.ic.unicamp.br/~rezende/ensino/mc358/knighttour.pdf

Wikipedia. (2024a). Mathematical chess problem. https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_chess_problem

Wikipedia. (2024b). Knight’s tour. https://en.wikipedia.org/wiki/Knight%27s_tour

ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL

Editorial Office: Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

Address: Žižkovo nám. 5, 77900 Olomouc, Czech Republic

Phone: +420 58 563 5709

E-mail: emej@upol.cz

Electronic edition: http://emejournal.upol.cz/issues

2024

Vol. 6, No. 1

ISSN 2694-8133