ISSN 2694-8133

MODELOVÁNÍ ZLOMKŮ V PŘEDMATEMATICKÉ PŘÍPRAVĚ

Renáta ZEMANOVÁ[1]
[1]Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
renata.zemanova@osu.cz

Abstrakt

Ve většině učebnicových řad matematiky pro 1. stupeň ZŠ je téma zlomků zařazeno až do 4. ročníku, a to v kompletním pojetí modelování, čtení modelů, formálního zápisu a operací se zlomky se stejným jmenovatelem ve formálním zápisu. Jedná se o kritické místo ve výuce matematiky (Rendl, Vondrová, 2013), kdy žák velmi rychle přechází k formálnímu zápisu a jeho vizualizace se ztrácí. Zlomek pak po celou dobu chápe jako symbolický zápis, nikoli část reálného celku a operace provádí podle naučených algoritmů. Když tyto algoritmy zapomene, není schopen zlomky s různým jmenovatelem ani sečíst. Přitom se ukazuje, že téma kmenového zlomku je snadno uchopitelné už pro předškolní děti a že jejich zkušenosti jim umožňují s modely kmenových zlomků pracovat. Dlouhodobou přípravou založenou na manipulativních činnostech a vizualizaci pak tyto ve školním vzdělávání téma zlomků uchopují s velmi dobrým porozuměním. Analyzujeme porozumění zlomkům polovina a třetina u dětí ve věku 4–7 let. V sérii návazných činností identifikujeme způsoby vizualizace zlomků, schopnost různého vyjádření stejného zlomku, vazbu mezi uchopením izomorfních úloh na různých modelech zlomku a s ohledem na výsledky diskutujeme další možnosti budování porozumění zlomkům u dětí předškolního věku.

Klíčová slova: zlomek, modely zlomku, didaktické prostředí, genetický konstruktivismus, genetická metoda výuky matematiky, izomorfismus úloh

MODELING OF FRACTIONS IN PRE-MATHEMATICS PREPARATION

Abstract

In most mathematics textbook series for the 1st grade of elementary school, the topic of fractions is included up to the 4th grade, namely in the complete concept of modeling, reading models, formal notation, and operations with fractions with the same denominator in formal notation. This is a critical point in the teaching of mathematics (Rendl, Vondrová, 2013) when the student very quickly moves to formal notation and his visualization is lost. It then understands the fraction all the time as a symbolic notation, not a part of a real whole, and performs operations according to learned algorithms. When he forgets these algorithms, he is unable to even add fractions with different denominators. At the same time, it is shown that the topic of stem fractions is already easy to grasp for preschool children and that their experience allows them to work with stem fraction models. Through long-term preparation based on manipulative activities and visualization, they grasp the topic of fractions in school education with a very good understanding. We analyze the understanding of the fractions half and third in children aged 4–7 years. In a series of follow-up activities, we identify ways of visualizing fractions, the ability to express the same fraction in different ways, the connection between grasping isomorphic tasks on different models of fractions, and with regard to the results, we discuss other possibilities for building understanding of fractions in preschool children.

Keywords: fraction, fraction models, didactic environment, genetic constructivism, genetic method of teaching mathematics, task isomorphism

ISSN 2694-8133

1. Úvod

Výuka zlomků na 1. stupni ZŠ prošla v České republice dynamickým vývojem. Aktuálně má žák v souladu s Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (RVP ZV) v očekávaných výstupech 5. ročníku modelovat a určit část celku (1), používat zápis ve formě zlomku (2), porovnat, sčítat a odčítat zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel (3). V očekávaných výstupech 3. ročníku zlomky nejsou zastoupeny v žádné podobě. Mnoho učitelů tak často zařadí celé téma zlomků až do 4.–5. ročníku, bez předchozích zkušeností žáků s dělením celku zavede formální zápis zlomků a současně sčítání a odčítání takto zapsaných zlomků. Znalosti žáků jsou pak formální, nedovedou si ve formálním zápisu zlomků představit reálný model a pracují jen podle algoritmů. Obtíže českých žáků dokumentuje Jirotková, Peclinovská (2015) v reálných úlohách TIMSS (2011, 2015), kdy více než 60 % žáků 4. ročníků ZŠ z nabídky $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ jako největší vybere $\frac{1}{5}$ a zdůvodňuje např. tak, že je „číslo 5 největší, celek rozdělen na největší počet dílů“.

Praxe ukazuje, že téma zlomku, a to zejména kmenového, je v didakticky příznivém prostředí snadno uchopitelné již pro dítě předškolního věku. Rozdělování celku na stejné části prostřednictvím výzvy ke spravedlivému dělení je dětem blízké a mají s ním reálné zkušenosti. Pokud učitel téma buduje kontinuálně prostřednictvím vhodných modelů, dokáže žák na výstupu z 5. ročníku nejen splnit očekávané výstupy RVP, ale jít hlouběji – např. s porozuměním sčítat a odčítat zlomky s různým jmenovatelem a později poznatky zobecnit do standardního „převodu na společného dělitele“.

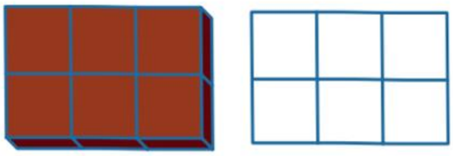
Stavíme na genetickém konstruktivismu (Kvasz, 2016), principech genetické metody výuky matematiky (Hejný, 2014) a didaktických prostředích (Hejný, 2012). Využíváme Vygotského teorie zóny nejbližšího vývoje (Vygotskij, 1970), přičemž výzvy k modelování zlomků směřujeme do individuální zóny každého žáka. Ve výzkumné části pracujeme pouze s kmenovými zlomky v souladu s principem genetické paralely, když nekmenové zlomky jsou ve vývoji lidstva využívány mnohem později a velmi krátce v porovnání se zlomky kmenovými.

2. Metodologie šetření

Připravili jsme gradovanou sérií činností, kdy zlomek modelujeme na obdélníku (čokoláda), kruhu (pizza), úsečce (tyč) a počtu (bonbóny). Používáme pojmy polovina a třetina. Vždy začínáme činností, kterou má dítě propojenou na mimoškolní prostředí (rozděl čokoládu, pizzu, bonbóny…), následuje grafický záznam (vybarvi, odděl čárou…).

Čokoláda

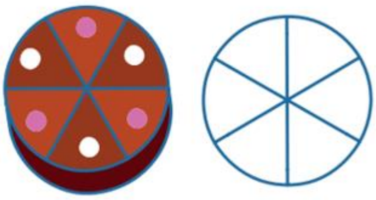
- Spravedlivě rozděl (reálnou) čokoládu mezi Adama a Blažeje a urči, kolik čtverečků dostane Adam, kolik Blažej. Použili jsme čokoládu Kámoši (výrobce Orion), která má 3×6 čtverečků. Důvodem volby byla dostupnost pro experiment, snadné rozdělení a malý počet čtverečků pro činnost s předškolními dětmi.
- Spravedlivě rozděl mezi Adama a Blažeje, vybarvi Adamovu část modře, Blažejovu část červeně (urči, kolik čtverečků dostane Adam, kolik Blažej), Obrázek 1.
- Spravedlivě rozděl (reálnou) čokoládu mezi Adama, Blažeje a Cyrila a urči, kolik čtverečků dostane Adam, kolik Blažej, kolik Cyril.
- Spravedlivě rozděl mezi Adama, Blažeje a Cyrila, vybarvi Adamovu část modře, Blažejovu část červeně, Cyrilovu část žlutě (urči, kolik čtverečků dostane Adam, kolik Blažej, kolik Cyril), Obrázek 1.



Obrázek 1. čokoláda

Pizza

- Spravedlivě rozděl (reálnou kruhovou) pizzu mezi Adama a Blažeje a ukaž, jakou část dostane Adam, jakou Blažej.
- Spravedlivě rozděl mezi Adama a Blažeje, vybarvi Adamovu část modře, Blažejovu část červeně (urči, kolik dílků dostane Adam, kolik Blažej), Obrázek 2.
- Spravedlivě rozděl (reálnou kruhovou) pizzu mezi Adama, Blažeje a Cyrila a ukaž, jakou část dostane Adam, jakou Blažej, jakou Cyril.
- Spravedlivě rozděl mezi Adama, Blažeje a Cyrila, vybarvi Adamovu část modře, Blažejovu část červeně a Cyrilovu část žlutě (urči, kolik dílků dostane Adam, kolik Blažej, kolik Cyril), Obrázek 2.



Obrázek 2. pizza

Tyč

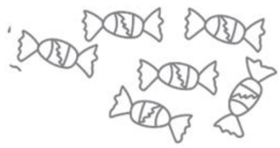
- Polovinu tyče vybarvi červeně, zbytek zeleně. Jakou částí tyče je zelená část? Obrázek 3.
- Třetinu tyče vybarvi červeně, zbytek zeleně. Jakou částí tyče je zelená část? Obrázek 3

Obrázek 3. tyč

Bonbóny

- Spravedlivě rozděl (reálné) bonbóny mezi Adama a Blažeje a urči, kolik bonbónů dostane Adam, kolik Blažej. Použili jsme postupně čtyři, osm a deset balených bonbónů.
- Spravedlivě rozděl šest bonbónů mezi Adama a Blažeje, vybarvi Adamovu část modře, Blažejovu část červeně (urči, kolik bonbónů dostane Adam, kolik Blažej), Obrázek 4
- Spravedlivě rozděl (reálné) bonbóny mezi Adama, Blažeje a Cyrila a urči, kolik bonbónů dostane Adam, kolik Blažej, kolik Cyril. Použili jsme postupně devět, dvanáct a patnáct balených bonbónů.

- Spravedlivě rozděl šest bonbónů mezi Adama, Blažeje a Cyrila, vybarvi Adamovu část modře, Blažejovu část červeně, Cyrilovu část žlutě (urči, kolik bonbónů dostane Adam, kolik Blažej, kolik Cyril), Obrázek 4.



Obrázek 4. bonbóny

Série úlohy na obdélníku a kruhu byly doplněny překládáním obdélníkového a kruhového papíru. Pro tyč a bonbóny tyto aktivity zadávány nebyly, ačkoli například k tyči jsme zvažovali aktivitu dělení provázku. Výzvy pro polovinu byly formulovány takto:

- přelož napůl,
- vybarvi polovinu,
- urči, jaká část zůstala nevybarvena,
- hledej jiné řešení, jak přeložit.

Výzvy pro třetinu byly formulovány takto:

- přelož na tři stejné části,
- vybarvi třetinu,
- urči, jaká část zůstala nevybarvena,
- hledej jiné řešení, jak přeložit.

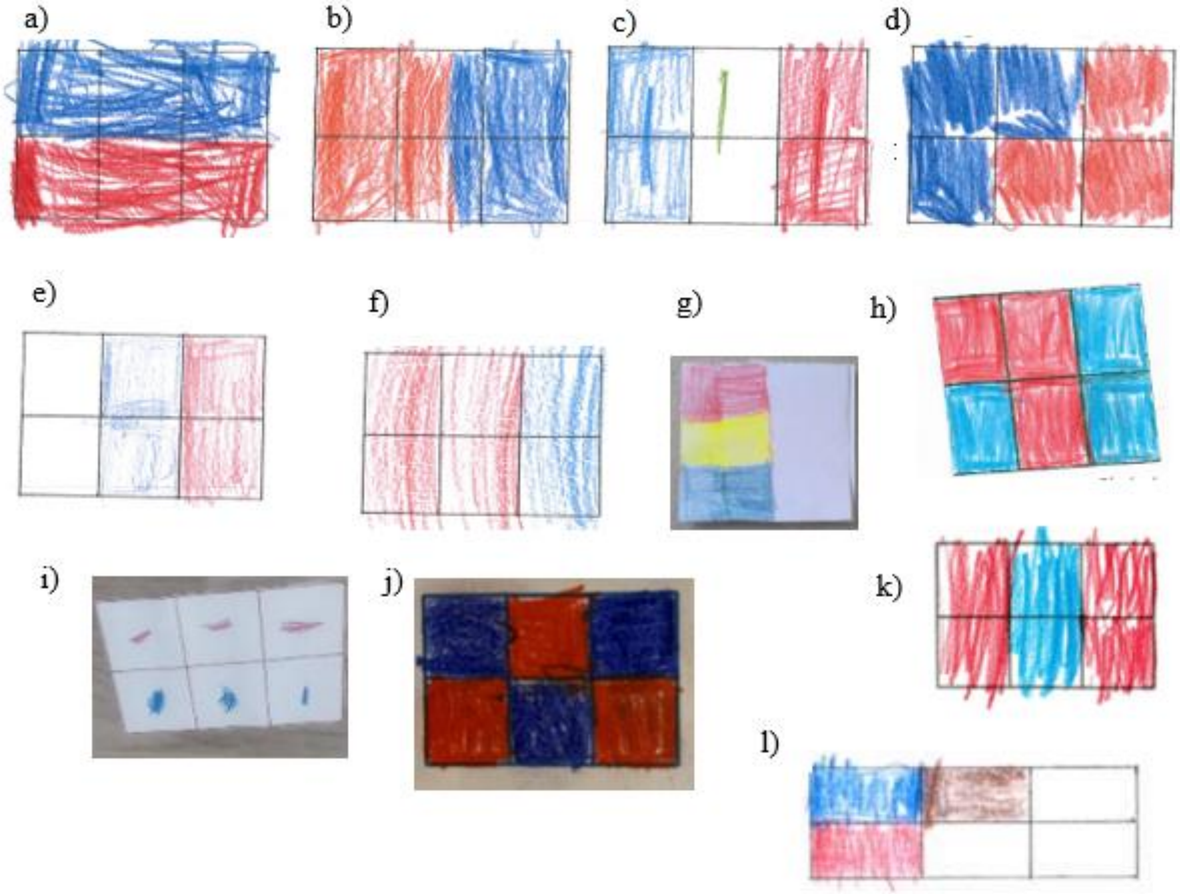
V roli proškolených experimentátorů vystoupilo 24 studentů programu Předškolní pedagogika Pedagogické fakulty Ostravské univerzity, experiment provedli v březnu 2023. Nejprve činnosti sami vyzkoušeli, poté připravili predikci výsledků dětí. Experiment realizovali s dětmi v předškolním vzdělávání, ve věku 4–7 let. Výběr dětí byl dán možnostmi experimentátorů, od dětských skupin v mateřských školách po jednotlivé děti z rodiny experimentátora. Výsledky manipulativních činností s reálnými předměty popisovali a komentovali experimentátoři slovně, grafické zpracování vyfotili a komentovali. Zaměřili jsme se na výsledky s ohledem na uchopení úlohy a strategie řešení, tyto jsme analyzovali.

Kvalita některých obrázků není dobrá, ale jedná se o autentické fotografie dětských řešení. Děti často vybarvovaly velmi slabě, což způsobilo tuto obtíž. Strategie na prezentovaných méně kvalitních obrázcích jsou však natolik důležité pro naši analýzu (často jediný typ strategie), že tyto fotografie prezentujeme.

3. Analýza řešení

V dělení čokolády na poloviny se vyskytlo dvanáct různých řešení, Obrázek 5 a–l. Zajímavé by bylo sledovat, v jakém pořadí děti čtverce vybarvovaly, ale tyto záznamy nemáme kompletní. Např. v případě videozáznamu dítěte 11-1, které postupuje způsobem h) víme, že dítě vybarvovalo po jednotlivých čtvercích se slovy „jeden, jeden, jeden – jeden, jeden, jeden – jeden, jeden, jeden“. Řešení i odpovídá řešení a, změnila se jen konvence záznamu. Řešení a, b, d, h, i, j byly ochotny přijmout ostatní děti a některá z nich později napodobovat. Řešení c, e, g, l byla odmítnuta s argumentem, že část obrázku zůstala nevybarvena. V řešení g zůstala nevybarvena polovina, v řešeních c, e, třetina obrázku. Nevíme, proč autor použil třetí barvu (c – zelenou, g – žlutou, l – hnědou).

ISSN 2694-8133



Obrázek 5. Ukázka strategie – poloviny čokolády

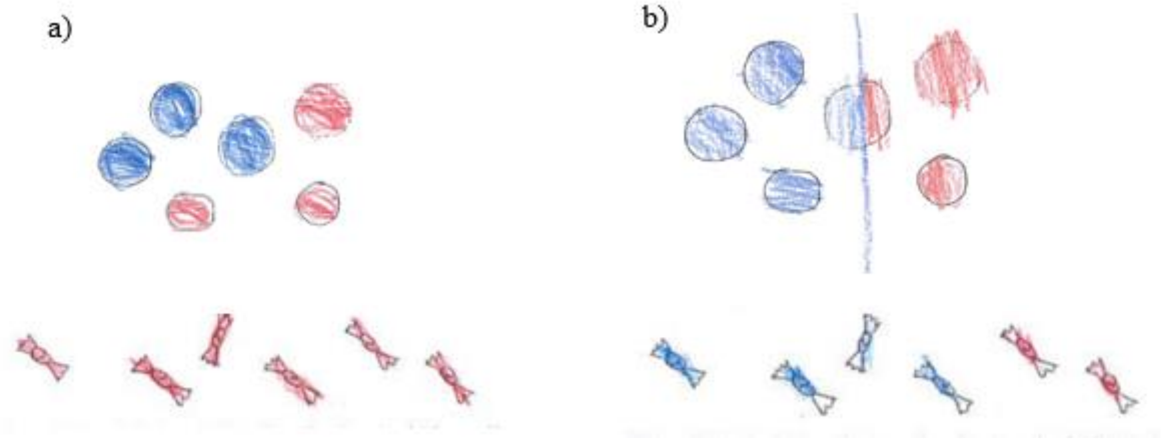
V dělení kruhu na poloviny se vyskytlo pět různých řešení, Obrázek 6 a–e. Řešení a, e byly ochotny přijmout ostatní děti a některá z nich později napodobovat. Řešení 6e korespondovalo s řešením 5j, h. Řešení b, c, d byla odmítnuta s argumentem, že část obrázku zůstala nevybarvena. Zajímavé je, že děti, které pracovaly postupem 5e (namísto poloviny vybarvily $\frac{2}{6}$), pokračovaly postupem 6d (namísto poloviny vybarvily jen $\frac{1}{6}$).

Obrázek 6. Ukázka strategie – poloviny kruhu

V dělení tyče na poloviny se vyskytla dvě různá řešení, Obrázek 7 a–b. Většina dětí použila řešení 7a, úlohu považovaly za nejjednodušší.

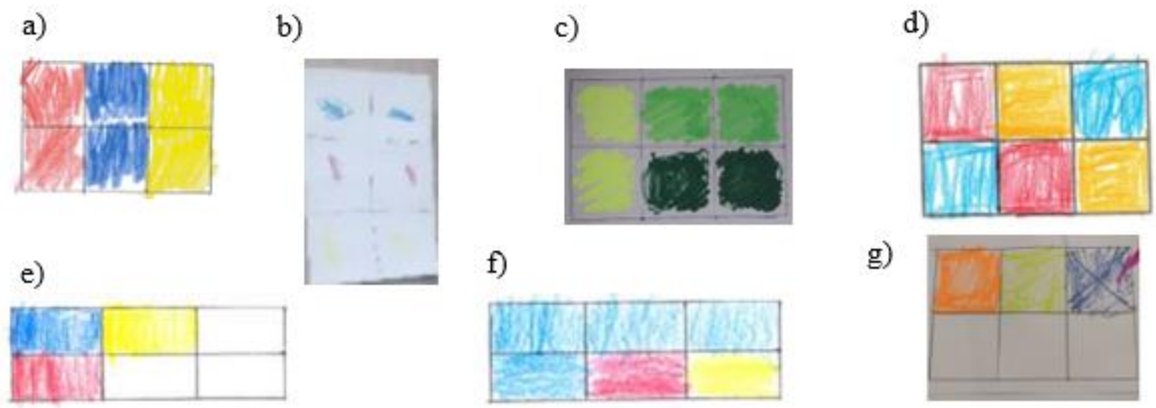
Obrázek 7. Ukázka strategie – poloviny tyče

V dělení bonbónů na poloviny se vyskytla čtyři různá řešení, Obrázek 8 a–d. Některá řešení děti nezaznamenávaly do předtištěného obrázku, Obrázek 4, ale nakreslily si samy symboly bonbónů, Obrázek 8 c, d. Proč tomu tak bylo, nevíme.



Obrázek 8. Ukázka strategie – poloviny bonbónů

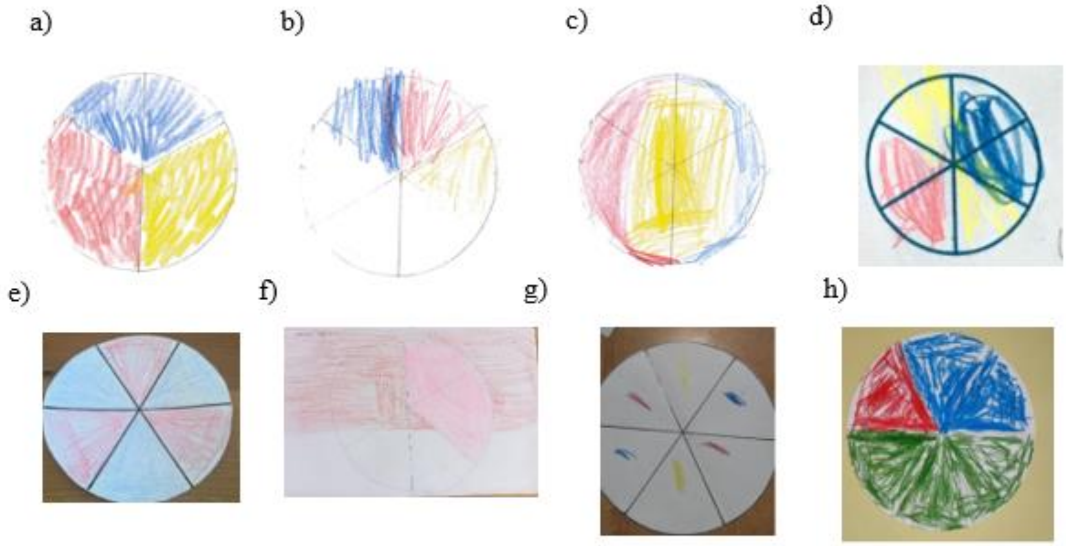
V dělení čokolády na třetiny se vyskytlo sedm různých řešení, Obrázek 9 a–g. V dělení tyče na jednu a dvě třetiny sedm různých řešení, Obrázek 11 a–g. Záznam dítěte 11–l ukazuje, že rozdělení způsobem e bylo dáno jeho zkušeností s dělením na poloviny po jednotlivých dílech „jeden, jeden, jeden – jeden, jeden, jeden – jeden, jeden, jeden“. V dělení bonbónů na třetiny pět různá řešení, Obrázek 12 a–e.



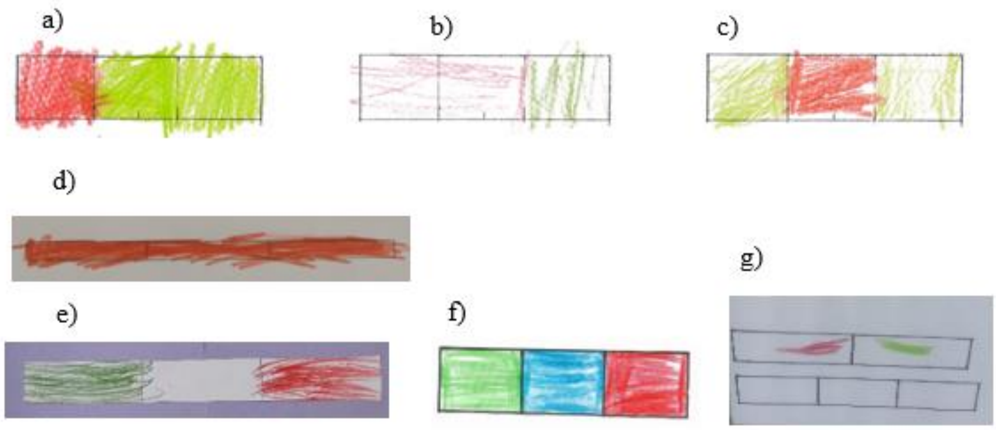
Obrázek 9. Ukázka strategie – třetiny čokolády

ISSN 2694-8133

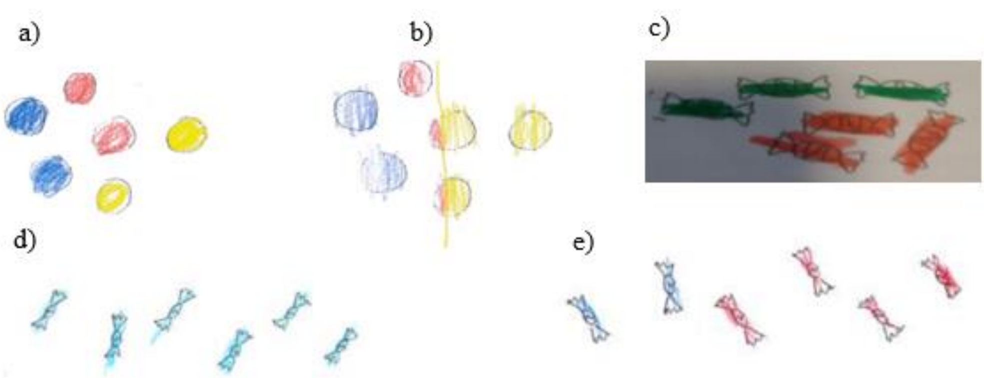
V dělení kruhu na třetiny se vyskytlo osm různých řešení, Obrázek 10 a–h, v dělení tyče na třetiny sedm různých řešení, Obrázek 11 a–g, a v dělení bonbónů na třetiny pět různých řešení, Obrázek 12 a–e.



Obrázek 10. Ukázka strategie – třetiny kruhu



Obrázek 11. Ukázka strategie – třetina a dvě třetiny tyče



Obrázek 12. Ukázka strategie – třetiny bonbónů

ISSN 2694-8133

Strategie řešení jsme zpracovali tabelárně, ukázka (14 dětí ze stejné mateřské školy). Ve sloupci „dítě“ identifikujeme dítě číslem x–y, kde x popisuje zařízení (mateřskou školu) a y dítě. Identifikátor x–y znamená, že se jedná o dítě y z mateřské školy x. Ve sloupci „zlomek“ uvádíme, jakou část mělo dítě modelovat. Ve sloupcích „čokoláda, kruh, tyč, počet“ uvádíme pro konkrétní typ modelu, který mělo dítě použít, jeho řešení z přehledu na obrázcích 9–12.

Tabulka 1: Záznam způsobu zakreslení v jednotlivých modelech zlomku

dítě	**zlomek**	**čokoláda**	**kruh**	**tyč**	**počet**
1-1	polovina	d	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-2	polovina	c	b	a	a
	třetina	a	a	x	x
1-3	polovina	a	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-4	polovina	c	c	a	a
	třetina	a	e	a	a
1-5	polovina	a	a	b	a
	třetina	g	e	d	c
1-6	polovina	a	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-7	polovina	b	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-8	polovina	c	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-9	polovina	c	a	a	a
	třetina	a	a	f	a
1-10	polovina	d	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-11	polovina	f	a	a	a
	třetina	a	h	a	a
1-12	polovina	e	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-13	polovina	a	a	a	b
	třetina	c	a	x	a
1-14	polovina	a	a	a	a
	třetina	a	a	a	a

Takto jsme zpracovali výsledky všech dětí.

Problematická je pro děti formulace odpovědi na otázku „Jakou částí celku je vybarvená/nevybarvená část?“ Většinou odpovídají barvou: „zelenou/nevybarvenou částí“, tvarem „půlkruh“, pozicí „pravá/levá část“ nebo „většina“ namísto vyjádření zlomkem (částí celku) „polovina, třetina, dvě třetiny“. Toto však z našich zkušeností činí potíže i žákům 1. stupně ZŠ.

Téměř všechny děti nezvládly složit obdélník ani kruh na třetiny. Objevovala se řešení složení napůl a znovu napůl, tedy na čtvrtiny, obrázky 13–14, na tři nestejně velké části, Obrázek 15.

Zajímavé výsledky jsme zaznamenali v zadání „*Přelož papír napůl, jednu polovinu vybarvi*." U některých dětí se objevila řešení, kdy přeložily papír napůl a vybarvily polovinu v tomto složení, tedy čtvrtinu celku. Jiné děti přeložily papír napůl, rozložily a vybarvily polovinu celku. Ze správného řešení jiné úlohy „vybarvi polovinu" vidíme, že děti z první skupiny nemají problém polovinu vidět správně. Důvodem neočekávaného je porozumění textu – děti této skupiny chápaly, že mají vybarvit polovinu složeného papíru, děti druhé skupiny, že mají vybarvit polovinu nesloženého papíru. Jistě by bylo vhodnější přeformulovat zadání tak, aby bylo jednoznačné, např. „*Přelož papír napůl, rozlož a jednu polovinu papíru vybarvi".*

Obrázek 13. Slož na třetiny – obdélník

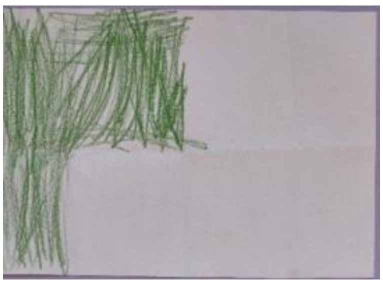
Obrázek 14. Slož na třetiny – kruh

Přikládáme zajímavé komentáře experimentátorů.

Dítě 12-3: „*U tyče zničehonic použil výraz, že zelené zůstaly 2/4. Když jsem se ho zeptala proč 2/4, tak mi řekl, že to se tak říká. Když jsem se ho pak zeptala, kolik je těch dílů celkem, tak řekl 3 a já na to, takže jsou to 2 ze tří, což bys řekl 2/3 a on – aha, já myslel, že to je vždy čtvrtina*."

Dítě 13-1: „*Na výzvu Přelož na tři stejné části přeložila obdélník pouze napůl. Následné zadání „Vybarvi jednu třetinu" nedokázala. Měla jsem pocit, že jí překáží ono přeložení papíru, a tak jsem zkusila předložit čistý papír. Anet následně vybarvila opravdu zhruba třetinu*." Následovalo vybarvení 1/3, Obrázek 15.

Dítě 1-5: „*Přelož na 3 stejné částí"- přeložila bez váhání obdélník nikoliv na 3 části, ale 3x – jednou napůl, vzniklou polovinu znovu napůl a tuto ještě do třetice znovu přehla*".



Obrázek 15. Slož na třetiny – obdélník

4. Shrnutí, závěr

V dalším výzkumu by bylo přínosem ověřit vazbu mezi výsledky jednotlivých dětí u dělení na poloviny a na třetiny (zda dítě používá stejnou strategii), a mezi výsledky dělení na poloviny a na třetiny v rámci jednotlivých modelů (zda dítě používá stejnou strategii na stejném modelu při dělení na poloviny a na třetiny). Dělení na poloviny je pro děti snazší, můžeme sledovat, zda se při dělení na třetiny využívá metakognice.

Další možností se stejným zadáním by bylo sledovat slovní vyjádření dětí výzvou „*pojmenuj vybarvené části*“, identifikovat způsoby vyjádření v případě dvou třetin (použijí děti dvě šestiny nebo jedna třetina), popsat skládání papíru na dvě/tři stejné části.

Výsledky výzkumu používáme pro výuku budoucích učitelů matematiky 1. stupně, kdy cílíme na analýzu strategií řešení úloh. Modely zlomku (obdélník, kruh, tyč, počet) jsou studentům zřejmé, ale rozmanitost způsobů modelování jejich částí je překvapí. Materiál je cenným podkladem pro diskuzi, jaké úvahy vedly dítě ke zvolené strategii a v případě chyby kde leží potenciál její reedukace.

V dalším zpracování žákovských záznamů zlomků bychom se rádi zaměřili na porovnání studentské predikce s reálným řešením žáků, na souvislosti mezi použitými strategiemi u různých modelů, na význam práce s reálnými modely pro práci s obrázky a na porovnání studentských predikcí se skutečnými výsledky žáků.

Literatura

Hejný, M. (2004). Zlomky. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. *1. díl.* Praha: UK v Praze, PedF, 343-356.

Hejný, M. (2012). Exploring the cognitive dimension of teaching mathematics through scheme-oriented approach to education. *Orbis Scholae, 2*(6), 41-55.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: UK v Praze, PedF.

Kvasz, L. (2016). Princípy genetického konštruktivizmu. *Orbis scholae 2016, 10*(2) 15-45.

Rendl, M., Vondrová, N. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: UK v Praze, PedF.

Vygotskij, L. S. (1970). *Myšlení a řeč*. Praha: SPN