ISSN 2694-8133

ZÁSADA NÁZORNOSTI V MATEMATICE S VYUŽITÍM PROGRAMU GEOGEBRA

Jan WOSSALA[1]
[1]Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)
jan.wossala@upol.cz

Abstrakt

Didaktické zásady jsou jednou z klíčových oblastí vzdělávacího procesu. Bez jejich dodržování mohou nastat problémy při dosahování vymezených cílů vzdělávání. Ve výuce matematiky lze názornost podpořit mnoha způsoby – různými modely, schématy, ilustracemi, obrázky. Digitální technologie nám nabízí další úroveň rozvoje názornosti při hodinách matematiky. V tomto článku jsou prezentovány příklady dobré praxe využitelné ve výuce matematiky s využitím programu GeoGebra. Tyto náměty mohou být inspirací pro vyučující, kteří zakomponování programu GeoGebra do své pedagogické praxe teprve zvažují.

Klíčová slova: matematika, dynamická geometrie, GeoGebra, názornost, konstruktivismus, síť tělesa, rozšířená realita

THE PRINCIPLE OF VISUALIZATION IN MATHEMATICS USING GEOGEBRA

Abstract

Didactic principles are one of the key areas of the educational process. Without adherence to them, problems may arise in achieving the defined educational objectives. In mathematics education, visualisation can be supported in many ways - by various models, diagrams, illustrations, pictures. Digital technologies offer us another level of development of visualisation in mathematics lessons. This article presents examples of good practice used in mathematics teaching using GeoGebra. These ideas can be an inspiration for teachers who are still considering incorporating GeoGebra into their teaching practice.

Keywords: mathematics, dynamic geometry, GeoGebra, visualization, constructivism, solid net, augmented reality

1. Úvod

Odborníci v oblasti pedagogiky po staletí usilovali o formulaci základních pravidel pro zajištění maximální efektivnosti výuky. Postupně tedy vznikal systém pedagogických zásad (principů). Někteří z autorů, kteří formulovali pedagogické zásady, byli J. A. Komenský, J. H. Pestalozzi a další.

Např. Jan Amos Komenský ve svém díle Analytická didaktika formuluje zásady takto:

- *Učitel nechť neučí, kolik sám může učiti, nýbrž kolik může žák pochopiti.*
- *Vždy postupně, nikdy skokem.*

- *Všemu, čemu se musíme učiti, nechť se učíme vlastní prací.*
- *Vše vlastními smysly, vždy a rozmanitě.*
- *Všemu se vyučuje a učí příklady, ukázkami a cvičeními.*
- *Nechť se vyučuje a učí: Nečetným před četnými. Krátkým před obšírnými. Jednoduchým před složenými. Obecným před zvláštními. Blízkým před odlehlejšími. Pravidelným před nepravidelnými (čili normálním před nenormálními).* (Kalhous, Obst, 2002).

Didaktické zásady jsou tedy obecné požadavky určující charakter výuky. Jsou formulovány v souladu se základními zákonitostmi výuky a s výchovnými a vzdělávacími cíli.

Jak je vidět na formulaci zásad J. A. Komenského, učení se všemi smysly, ukázkami apod. je jedním z důležitých aspektů vzdělávacího procesu.

Obecně můžeme shrnout didaktické zásady do těchto bodů:

- zásada komplexního rozvoje osobnosti žáka,
- zásada vědeckosti,
- zásada individuálního přístupu k žákům,
- zásada spojení teorie s praxí,
- zásada uvědomělosti a aktivity,
- zásada názornosti,
- zásada soustavnosti a přiměřenosti. (Kalhous, Obst, 2002).

V rámci zásady názornosti by tedy vyučující měl žákům či studentům umožnit vnímat předkládaný obsah, je-li to alespoň trochu možné, všemi smysly. Takovýto prožitek usnadní jejich rozumové poznávání (Kantorová a kol., 2008).

2. Názornost v matematice

Ilustrace či vizualizace nějaké situace je v matematice velmi důležitá. Jak uvádí Coulon a kol. (2023), za ilustraci lze považovat jakýkoli způsob, jakým lze přenést matematickou myšlenku do fyzické podoby nebo zkušenosti, včetně ručně vytvořených diagramů nebo modelů, počítačové vizualizace, 3D tisku nebo virtuální reality a mnoha dalších. Ač se ve svém článku o důležitosti ilustrace/vizualizace pro matematiku věnují složitějším problémům, jako např. Poincarého domněnce a tzv. Thurstonově geometrii, vyzdvihují důležitost dobrých ilustrací pro rozvoj matematických znalostí. Současně však upozorňují na složitost vytváření takovýchto silných a důvěryhodných ilustrací.

2.1. GeoGebra v matematice

Využití GeoGebry se věnuje celá řada odborných článků a výzkumů. Jak prezentují ve své studii Gökce a Güner (2022), GeoGebra bývá často využívána pro matematické modelování, vizualizaci, řešení problémů atd. Za jedny z hlavních předností bývá uváděna její dynamičnost, tedy možnost pohybu vstupních objektů. Také upozorňují na snahu přechodu studia GeoGebry od vyšších stupňů škol k nižším. Témata zkoumaná s využitím GeoGebry byla podle jejich studie publikovaných článků skutečně široká, od algebry, euklidovské geometrie, přes modelování, funkce, až po dokazování tvrzení.

Některé výzkumy navíc propojují matematiku s informatickým myšlením, jako např. výzkum autorů Yunianto, Prodromou a Lavicza (2023). Ve svém výzkumu se věnovali schopnosti studentů odlaďovat chyby v programech či matematických zápisech. GeoGebru vyzdvihují jako jeden z nástrojů, který umožňuje studentům naučit se odhalovat chyby při vytváření objektů a vkládání správné syntaxe.

Přínos využití GeoGebry ve výuce matematiky dokumentují ve svém výzkumu i Rahadyan, Kurniawan a Halimatussa (2023), kteří připravili kurz využívání tohoto programu ve výuce pro učitele a sledovali zlepšení některých jejich kompetencí. Věnovali se mimo jiné i řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, případně řešení kvadratických rovnic v programu GeoGebra. Zúčastnění učitelé vnímali, že získali praktické a cenné poznatky a dovednosti uplatnitelné v jejich pedagogické praxi.

Autoři Nocar a Zdráhal (2016) také prezentovali výsledky výzkumného projektu realizovaného na vzorku více než 70 studentů zaměřeného na efektivitu využívání programu GeoGebra, ale po samostudiu tímto způsobem se u studentů neprokázaly vždy lepší výsledky. Jako efektivnější považují využívání těchto nástrojů v rámci řízené výuky, kdy je stále důležitá role vyučujícího, který daný proces usměrňuje a vede žáky či studenty k jejich vlastnímu objevování. Tento trend je označován jako badatelsky orientovaná výuka a právě dynamičnost a interaktivita programu GeoGebra představuje ve výuce matematiky velký potenciál k samostatnému bádání a objevování.

2.2. Ukázky využití GeoGebry v pedagogické praxi

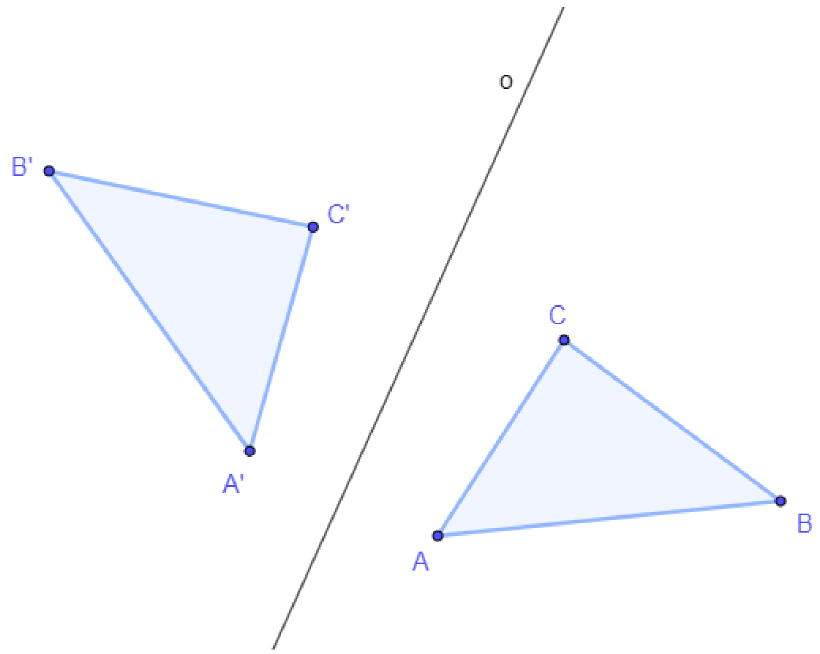
Ač mnoho lidí vnímá GeoGebru stále jako program „pouze pro rýsování“, opak je pravdou. GeoGebra je dynamicky se rozvíjející program umožňující kromě řešení úloh z oblasti konstrukční geometrie i např. vykreslování grafů, využívání rozšířené reality apod.

Z oblasti geometrie bylo publikováno mnoho prací prezentujících efektivitu dynamických geometrií ještě i před vznikem programu GeoGebra, jako je např. Cabri, s ukázkami samostatného objevování žáky 1. stupně ZŠ na příkladech množin bodů dané vlastnosti (Nocar & Novák, 2015) nebo na příkladu konstrukce ortocentra u trojúhelníku a jeho polohových vlastností v závislosti na typu trojúhelníku (Nocar & Zdráhal, 2015).

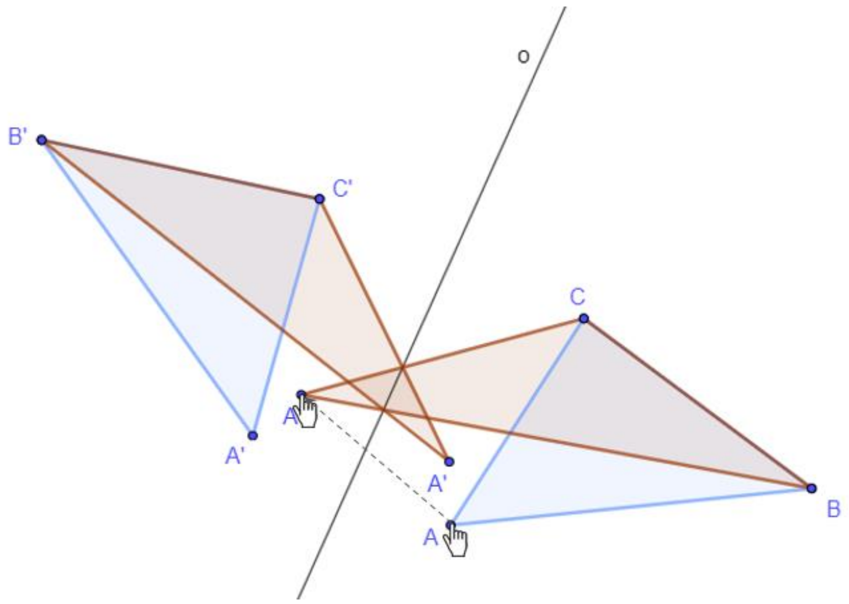
Pojďme se nyní podívat na několik příkladů využití programu GeoGebra pro řešení úloh z matematiky pro 2. stupeň ZŠ. Všechny uvedené úlohy byly vyzkoušeny v praxi se žáky základních škol v rámci projektových dnů s matematikou, případně se studenty učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

Jedním z témat, vhodných pro využití softwaru pro dynamické zobrazení geometrie, jsou osová a středová souměrnost. Po tom, co si žáci osvojí základní princip konstrukce úloh zaměřených na tato témata, potřebuje někdy vyučující rychle zobrazit různé situace, na jejichž konstrukci již není dostatek času v hodině. Může tedy sestrojit např. trojúhelník prostřednictvím funkce *mnohoúhelník*, pomocí tlačítka *přímka* pak osu souměrnosti a volbou funkce *osová souměrnost* v kategorii *zobrazení* pak sestrojí obraz trojúhelníka v osové souměrnosti.

Celý tento proces nezabere více jak půl minuty a pomocí tlačítka *ukazovátko* pak lze pohybovat vstupními objekty (tedy např. vrcholy trojúhelníka). Lze tak během pár kliknutí, které nezaberou více než několik sekund, zobrazit různé situace, které mohou nastat (např. osa souměrnosti leží vně trojúhelníka, osa souměrnosti prochází zadaným trojúhelníkem, některý z vrcholů trojúhelníka leží na ose souměrnosti, některá ze stran trojúhelníka leží na ose souměrnosti apod.) a při samostatných konstrukcích by bylo třeba jim věnovat velkou část vyučovací hodiny.



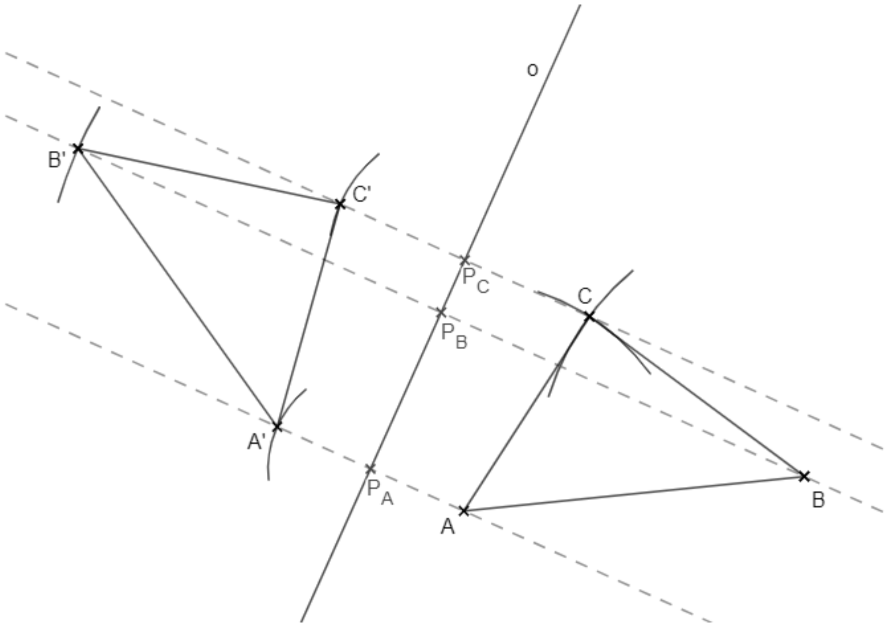
Obrázek 1. Ukázka konstrukce v programu GeoGebra
(vzor a obraz trojúhelníka v osové souměrnosti)



Obrázek 2. Ukázka dynamické úpravy konstrukce v programu GeoGebra
(změna pozice vrcholu A)

Současně však lze GeoGebru v rámci stejných úloh využít i jako „rýsovací papír“, přičemž žáci veškeré kroky konstrukce sestrojí jako na papíře s využitím kružítka a pravítka. Hlavním rozdílem je to, že využívají digitální technologii a zlepšují tak nejen své kompetence v oblasti matematiky, tak i své digitální kompetence.

Při takovémto řešení obdobné úlohy by se tak využila např. funkce *úsečka s pevnou délkou*, *kružnice daná středem a poloměrem*, *průsečík dvou objektů*, *kolmice*, *kružnice daná středem a bodem* apod. Dynamické prvky tak jsou v tuto chvíli pouze body *A* a *B*, resp. body určující přímku *o* (na obrázku deaktivována viditelnost těchto objektů).



Obrázek 3. Ukázka konstrukce v programu GeoGebra stejným postupem jako při konstrukci „na papíře“

Další výhoda konstrukcí v GeoGebře je pak to, že vyučující (resp. i žáci) mohou sestrojené úlohy exportovat jako obrázek a vložit si je do „digitálního sešitu“, resp. jakéhosi portfolia, případně vytisknout a zařadit do tradičního sešitu.

Dalším zajímavým způsobem využití GeoGebry je pomoc při řešení některých úloh, které využívají konstruktivistický přístup. Uveďme si jeden z mnoha případů – budeme-li s žáky probírat téma pravidelných *n*-úhelníků, zkusíme si určitě i konstrukce některých z nich. Po tom, co si žáci zkusí sestrojit pravidelný (rovnostranný) trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník a šestiúhelník, můžeme jim zadat k řešení úlohu „Určete způsob, jak bychom mohli určit součet velikosti vnitřních úhlů pro libovolný pravidelný *n*-úhelník, aniž bychom jej museli sestrojit.“

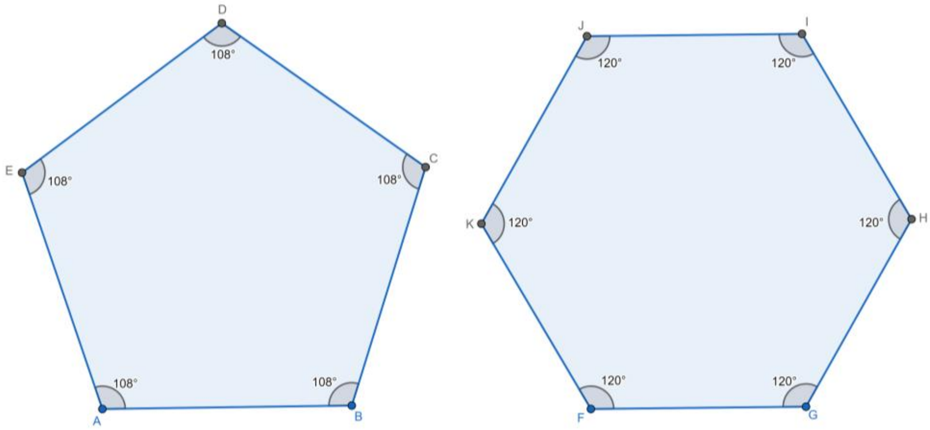
Při řešení takovéto úlohy mohou žáci postupovat různě, zkusme se podívat na jednu možnou úvahu. Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku a ve čtverci žáci znají již z hodin matematiky na 1. stupni ZŠ. Tyto údaje si mohou zapsat např. do tabulky (viz Tabulka 1). Do té si mohou vepsat počet vrcholů pravidelného *n*-úhelníku, pak velikost jednotlivých vnitřních úhlů, a nakonec součet velikosti vnitřních úhlů v uvedeném geometrickém útvaru.

Tabulka 1. Ukázka tabulky pro řešení úlohy na odvození součtu velikosti vnitřních úhlů

Počet vrcholů pravidelného *n*-úhelníku	**Velikost vnitřních úhlů**	**Součet velikostí vnitřních úhlů**
3		
4		
5		
6		

ISSN 2694-8133

První dva řádky, pro výše uvedené útvary, by měli žáci tedy určit bez větších problémů i bez konstrukcí. Pro vypozorování zákonitosti (odvození vzorce) by bylo vhodné si určit ještě uvedené vlastnosti u několika následujících n-úhelníků. Zde již pravděpodobně žáci narazí na to, že si velikost vnitřních úhlů u pravidelného pětiúhelníku a šestiúhelníku již neurčovali. A zde přichází ke slovu opět možnost využití programu GeoGebra. Zde si mohou během několika kliknutí sestrojit oba uvedené geometrické útvary za pomoci funkce *pravidelný mnohoúhelník*. Funkce *úhel* pak okamžitě zobrazí velikosti vnitřních úhlů v obou útvarech.



Obrázek 4. Zobrazení velikosti vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku a šestiúhelníku v programu GeoGebra

Zjištěné údaje pak mohou žáci zapsat do připravené tabulky (viz Tabulka 2).

Tabulka 2. Ukázka tabulky pro řešení úlohy na odvození součtu velikosti vnitřních úhlů

Počet vrcholů pravidelného n-úhelníku	**Velikost vnitřních úhlů**	**Součet velikostí vnitřních úhlů**
3	60°	180°
4	90°	360°
5	108°	540°
6	120°	720°

Pro žáky by pak již mělo být snadné odvození, že obecně mohou součet vnitřních úhlů v pravidelném n-úhelníku určit pomocí vztahu:

$$s_u = (n-2) \cdot 180°$$

V takovémto typu úlohy tak žáci mohou využít mnoho oblastí matematiky od témat geometrie v rovině (žáci by si mohli uvědomit souvislost vnitřních úhlů zadaného n-úhelníku a jeho rozdělením na $n-2$ trojúhelníků), dále přes práci s daty, až po využití digitálních technologií v podobě „usnadnění si práce“ programem GeoGebra. Možných postupů řešení této úlohy je samozřejmě více, pro ilustraci zde uvádím pouze tento.

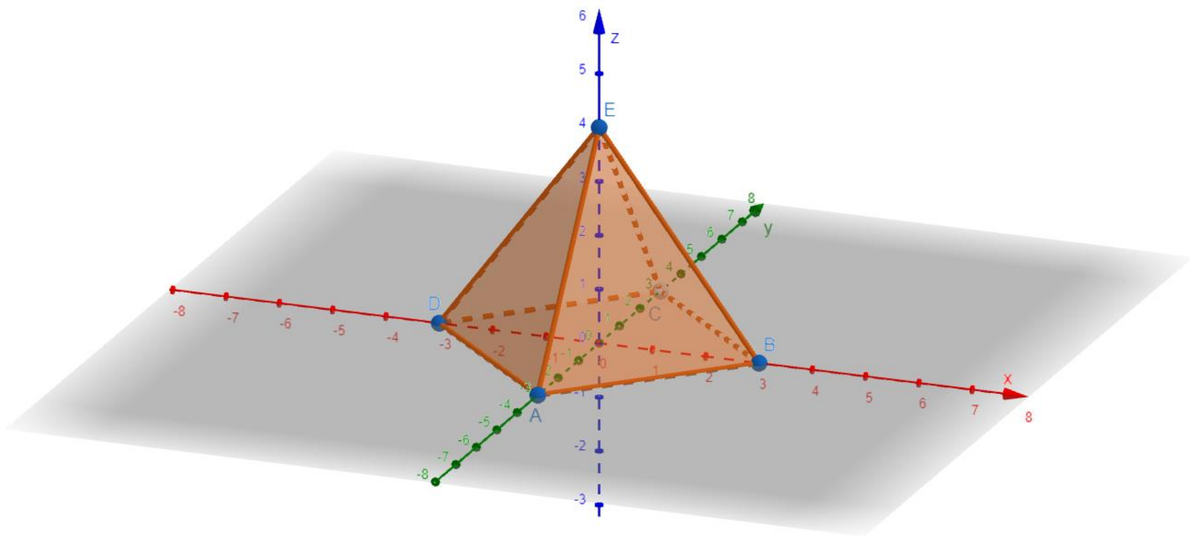
Další zajímavou oblastí, kde může GeoGebra zaujmout žáky a zvýšit názornost v hodinách matematiky, jsou např. sítě těles. Ve výuce lze často narazit na problémy žáků či studentů v této oblasti. Jejich hlavním argumentem často bývá, že nemají dobrou prostorovou představivost nebo že se této problematice nedostatečně věnovali při dřívějším vzdělávání. Navíc žáci i studenti si často pletou pojmy „obsah“ a „povrch“ a při řešení stereometrických úloh je zaměňují. Často pak nesprávně používají termín „obsah“ při výpočtu povrchu, přičemž pojem „obsah“ je pouze rovinný. Představa sítě tělesa je důležitá při výpočtu povrchu tělesa, neboť povrch tělesa lze ztotožnit s obsahem jeho sítě.

Pojďme se tedy podívat na další ukázku, jak GeoGebra může zvýšit názornost při probírání těchto témat.

Pro tento účel je třeba si zvolit 3D verzi programu GeoGebra. Tato aplikace nabízí kromě vykreslování grafů také konstrukci mnoha těles.

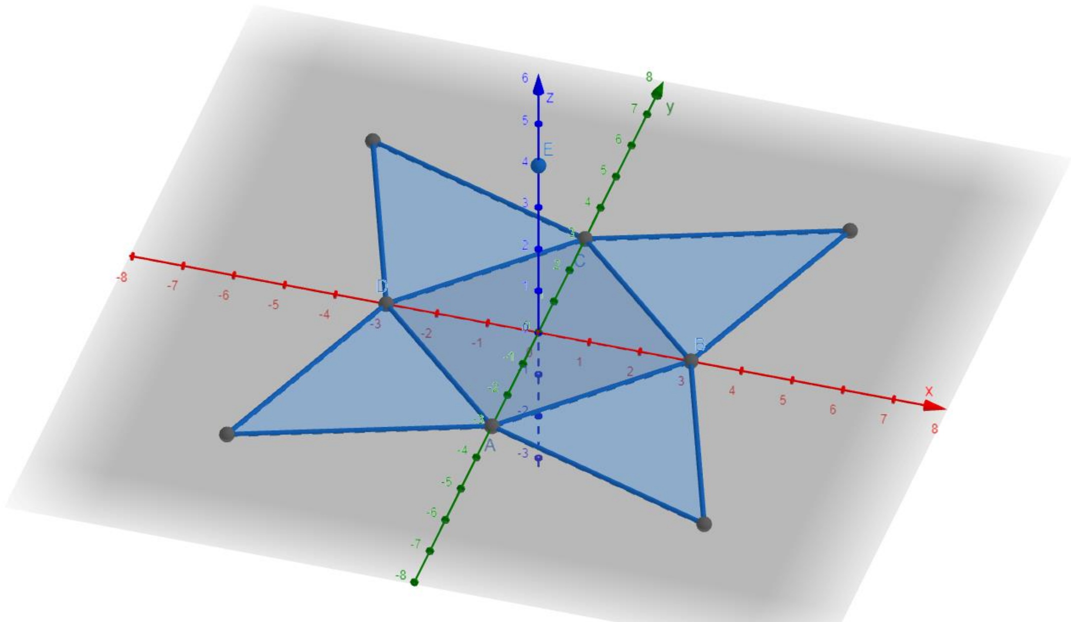
Obrázek 5. Nabídka těles v 3D verzi programu GeoGebra

Po volbě příslušného tělesa, které chceme prezentovat, ho během několika sekund sestrojíme. Zobrazené těleso pak můžeme pomocí ukazovátka zobrazovat ze všech možných úhlů a zlepšit tedy prostorovou představivost žáků.



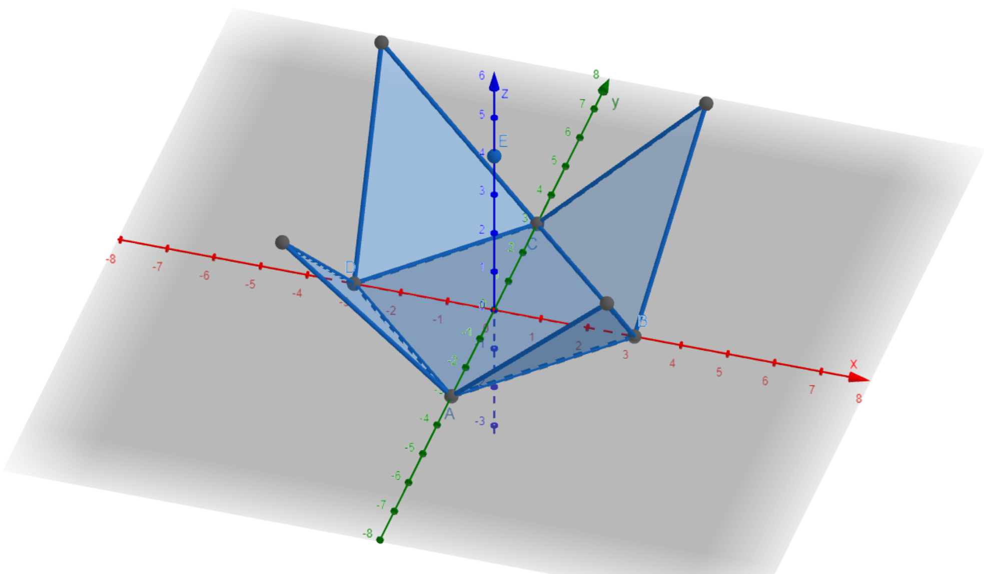
Obrázek 6. Jehlan v 3D verzi programu GeoGebra

Prostřednictvím funkce *síť* pak lze jednoduše zobrazit síť příslušného tělesa (mnohostěnu, GeoGebra prozatím neumí zobrazit síť tělesa, jako je např. válec či kužel). Síť tělesa si mohou žáci či studenti opět prohlédnout z libovolných úhlů, poslat do tisku či uložit si v podobě obrázku.



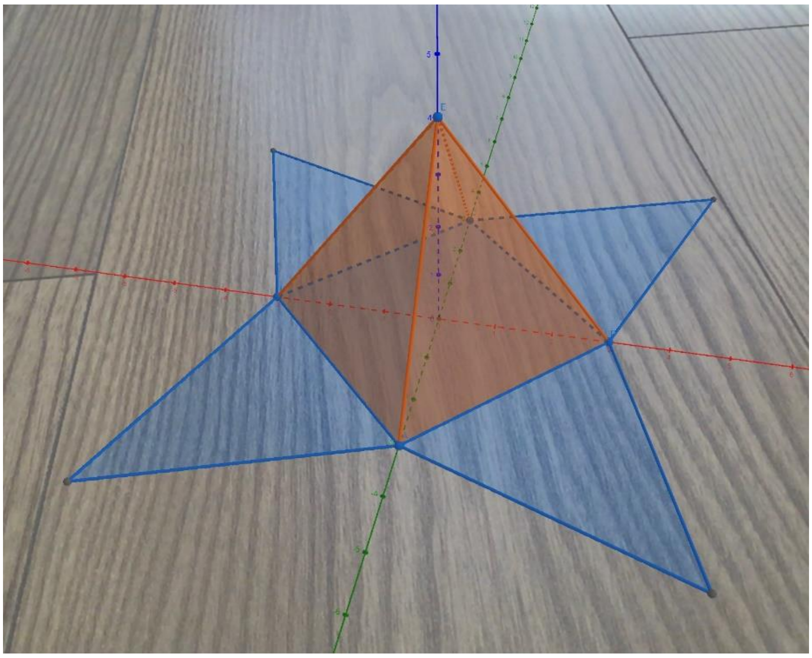
Obrázek 7. Pohled na síť jehlanu

Síť tělesa lze také jednoduše skládat, což opět přispívá k vyšší názornosti a rozvoji prostorové představivosti.

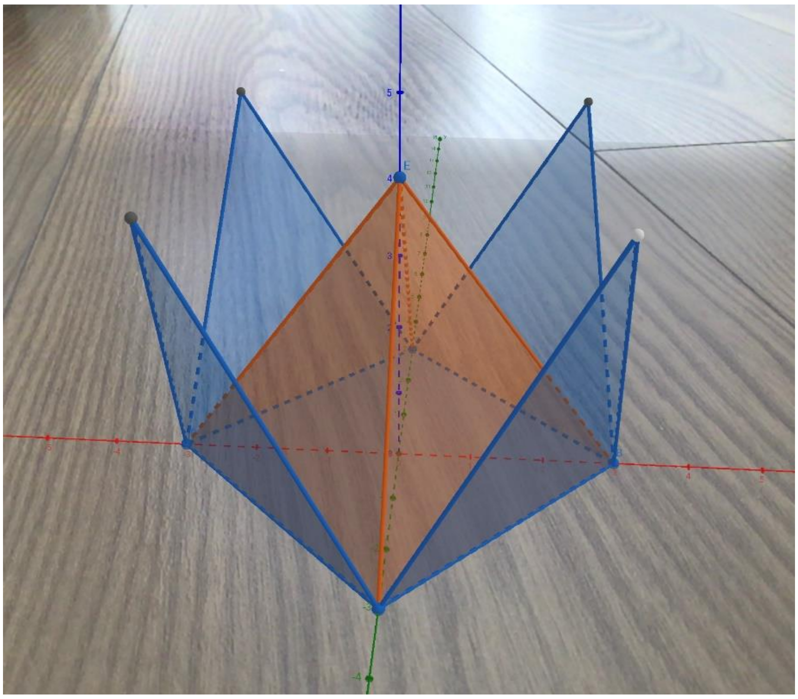


Obrázek 8. Skládání sítě tělesa

Pro zvýšení zájmu a názornosti pak je možné tyto funkce využívat i v rozšířené realitě. Je zapotřebí mít zařízení s kamerou, pak lze tlačítkem *AR* (augmented reality) aktivovat snímání obrazu kamerou, program si načte rovnou plochu, na kterou lze virtuálně umístit těleso. Pak už jen stačí na tuto plochu kliknout a těleso či síť tělesa se zobrazí v rozšířené realitě. Pohybem zařízení lze virtuálně prohlížet těleso či jeho síť ze všech možných úhlů, což může v některých žácích vzbudit větší zájem o tuto oblast matematiky.



Obrázek 9. Jehlan se sítí tělesa v rozšířené realitě



Obrázek 10. Skládání sítě tělesa v rozšířené realitě

3. Závěr

Využívání digitálních technologií je nejen užitečnou pomocí při řešení mnoha problémů běžného života, v kontextu současné společnosti a trhu práce se jedná také o jednu z klíčových dovedností, bez které se téměř nikdo neobejde. Tento faktor se čím dál častěji projevuje a taktéž požaduje ve vzdělávání. V hodinách matematiky je možnost využívat nepřeberné množství běžně dostupných programů, např. Microsoft Excel, Wolfram Cloud, PhotoMath, GeoGebra či další. Právě poslední zmíněná aplikace byla hlavním tématem tohoto článku a měla ilustrovat několik příkladů využití GeoGebry v pedagogické praxi. Tyto příklady mohou být inspirací pro ty vyučující, kteří zařazení GeoGebry či obecně digitálních technologií do hodin matematiky teprve zvažují.

Acknowledgements

Článek vznikl v rámci realizace projektu *Matematická gramotnost v kontextu digitálních kompetencí* (č. proj. IGA_PdF_2023_010) realizovaného na Katedře matematiky PdF UP v Olomouci.

Literatura

Coulon, R., Dorfsman-Hopkins, G., Harriss, E., Skrodzki, M., Stange, K., & Whitney, G. (2023). On the importance of illustration for mathematical research. *Notices of the American Mathematical Society, 71*(1). https://doi.org/10.1090/noti2839

Gökçe, S., & Güner, P. (2022). Dynamics of GeoGebra ecosystem in mathematics education. *Education and Information Technologies. 27*. https://doi.org/10.1007/s10639-021-10836-1.

Kalhous, Z., & Obst, O. (2002). *Školní didaktika*. Praha: Portál.

Kantorová, J. a kol. (2008). *Vybrané kapitoly z obecné didaktiky I.* Olomouc: Hanex.

Nocar, D. & Novák, B. (2015). Objevujeme s Cabri. *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Universitatis Catholica Ružomberok 2015, No 2*. Ružomberok: Verbum – vydavateľstvo Katolickej univerzity

Nocar, D., & Zdráhal, T. (2015) The potential of dynamic geometry for inquiry based education, *EDULEARN15 Proceedings*, pp. 4992-4998, Barcelona: IATED

Nocar, D., & Zdráhal, T. (2016). Efektivita softwaru dynamické geometrie při samostudiu na příkladě jednoho geometrického konceptu. *Trends in Education, 9*(1), 198-204. https://doi.org/10.5507/tvv.2016.027

Rahadyan, A., Kurniawan, I., & Halimatussa'diah. (2023). Implementation of Geogebra in Mathematics to Improve the Skills of Teachers. *Jurnal Masyarakat Mandiri, 7*, 530. https://doi.org/10.31764/jmm.v7i1.12352

Yunianto, W., Prodromou, T., & Lavicza, Z. (2023). Debugging on GeoGebra-based Mathematics+Computational Thinking lessons. In *The Electronic Proceedings of the 28th Asian Technology Conference in Mathematics*. Pattaya, Thailand.