EULEROVA ŠACHOVÁ PROCHÁZKA

Karel PASTOR[1]
[1] Palacký University, Faculty of Education (Czech Republic)
karel.pastor@upol.cz

Abstrakt

Jezdcovu procházku na šachovnici 8×8 lze provést mnoha způsoby. V našem článku bychom se rádi zaměřili na Eulerovu jezdcovu procházku. Pro žáky od 6 do 11 let může být atraktivní tím, že pole šachovnice při její přípravě podle jednoduchého pravidla vybarvíme čtyřmi barvami a následně celkem snadno jezdcovu procházku provedeme. Článek také zmiňuje zajímavou Schwenkovu větu o uzavřených jezdcových procházkách na obecné obdélníkové šachovnici.

Klíčová slova: kombinatorické myšlení, šachy, deskové hry, matematické šachové problémy.

THE EULER KNIGHT'S TOUR

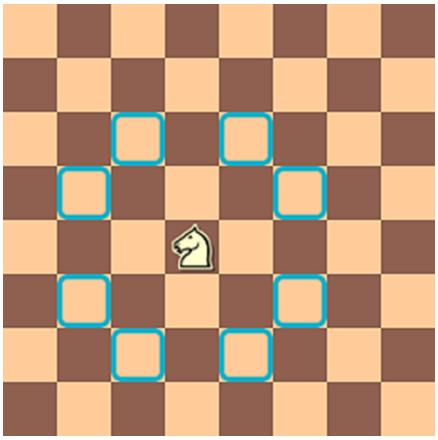
Abstract

The knight's tour on an 8×8 chessboard can be done in a number of ways. In our article, we would like to focus on the Euler kniht's tour. This can be attractive for pupils aged 6 to 11 by coloring the squares of the chessboard with four colors during its preparation, following a simple rule, and then implementing the kniht's tour quite easily. The article also mentions Schwenk's interesting theorem about kniht's closed tours on a generally rectangular chessboard.

Keywords: combinatorial thinking, chess, board games, mathematical chess problems.

1. Úvod

Naplňování cílů tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace mohou pomoci deskové hry, mezi nimiž mají významné postavení šachy. Není však potřeba, aby se žáci naučili kompletní pravidla šachu, jejichž osvojení nemusí být pro každého žáka 1. stupně základní školy záživné.



Obrázek 1. Tah jezdce

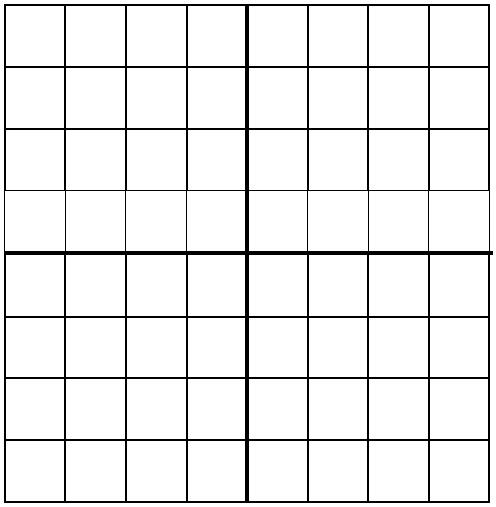
Stačí porozumět chodu některých šachových figur a hned poté je možné řešit matematické šachové úlohy. S matematickými šachovými úlohami je možné se seznámit na (Wikipedia, 2023a), popřípadě s jejich jednotlivými variantami přizpůsobenými žákům 1. stupně (Pastor, 2019, 2020a, 2020b). V tomto článku se budeme zabývat jezdcovými procházkami po šachovnici.

Připomeňme, že šachový jezdec se na šachovnici pohybuje skoky ve tvaru písmene L, tj. dvě pole rovně a jedno do strany nebo jedno pole rovně a dvě do strany (Wikipedia, 2023b), jak je ukázáno na obrázku 1.

Jezdcovou procházkou se označuje úloha navštívit jezdcem postupně všechna pole šachovnice. Historie tohoto problému je poměrně velmi dlouhá, první zmínky o něm pocházejí z 9. století (Wikipedia, 2023c). V našem článku se budeme věnovat jezdcové procházce představené Leonhardem Eulerem v roce 1759, která může být zajímavá pro žáky 1. stupně díky svému poměrně jednoduchému algoritmu.

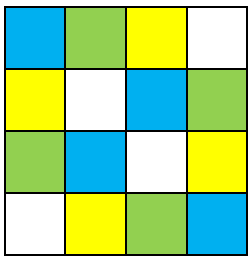
2. Eulerova procházka

Šachovnici 8 × 8 rozdělíme na 4 menší šachovnice 4 × 4 (obrázek 2).



Obrázek 2. Rozdělení šachovnice

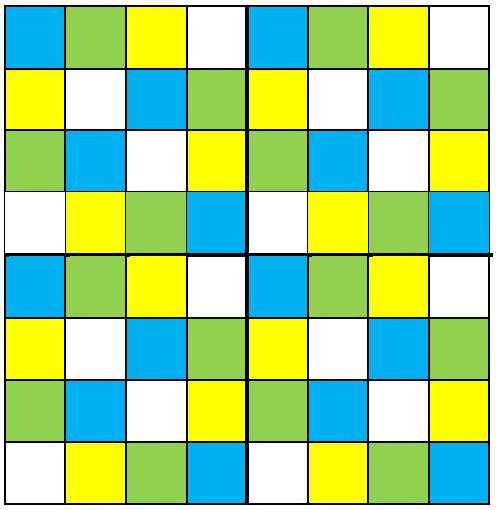
Vezmeme nyní každý z menších čtverců 4 × 4 a jeho pole vybarvíme 3 barvami způsobem uvedeným na obrázku 3 a 4 pole necháme bílá. Všimněme si, že pole stejné barvy je možné spojit čtyř krokovou jezdcovou procházkou.



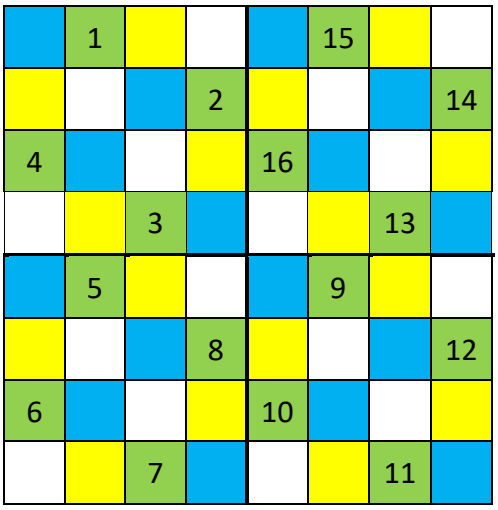
Obrázek 3. Vybarvení šachovnice 4 × 4

Po příslušném vybarvení polí na obrázku 2 má šachovnice 8 × 8 podobu znázorněnou obrázkem 4.

Nyní již můžeme přistoupit k jezdcově procházce po šachovnici 8×8. Zvolíme si jednu barvu, například zelenou a jezdcovou procházkou nejprve navštívíme všechna zelená pole levé horní šachovnice 4×4, potom levé dolní šachovnice, následně pravé dolní šachovnice a nakonec pravé horní šachovnice 4×4 (obrázek 5).



Obrázek 4. Vybarvení šachovnice 8×8



Obrázek 5. Zelená pole

Po navštívení všech 16 zelených polí se přesuneme na pole modrá a postupně je všechny vyplníme, jak je ukázáno na obrázku 6 s očíslovanými 32 poli. Následovat budou pole žlutá – obrázek 7 s 48 poli navštívenými šachovým jezdcem. Při vyplňování zbývajících bílých polí změníme směr vyplňování menších šachovnic, tj. nejprve necháme šachového jezdce navštívit bílá pole pravé dolní šachovnice 4×4. Na obrázku 8 je jezdcova procházka zdárně ukončena. Algoritmus je poměrně velmi jednoduchý a zapamatovatelný, tedy je vhodný i pro děti navštěvující 1. stupeň základní školy. Pořadí barev i směr vyplňování menších šachovnic se většinou samy nabídnou (někdy si můžeme vybrat).

18	1			32	15		
		17	2			31	14
4	19			16	29		
		3	20			13	30
22	5			28	9		
		21	8			27	12
6	23			10	25		
		7	24			11	26

Obrázek 6. Modrá pole

18	1	34		32	15	46	
35		17	2	47		31	14
4	19		33	16	29		45
	36	3	20		48	13	30
22	5	40		28	9	44	
37		21	8	41		27	12
6	23		39	10	25		43
	38	7	24		42	11	26

Obrázek 7. Žlutá pole

18	1	34	59	32	15	46	63
35	58	17	2	47	62	31	14
4	19	60	33	16	29	64	45
57	36	3	20	61	48	13	30
22	5	40	53	28	9	44	49
37	56	21	8	41	52	27	12
6	23	54	39	10	25	50	43
55	38	7	24	51	42	11	26

Obrázek 8. Bílá pole

3. Uzavřená jezdcova procházka

Na obrázku 8 je tzv. otevřená jezdcova procházka, při které se šachový jezdec ze svého posledního navštíveného pole (64) nemůže svým tahem dostat na pole začátku své procházky (1). V opačném případě hovoříme o uzavřené jezdcově procházce. Docílit uzavřené jezdcovy procházky pomocí Eulerovy metody je již o něco náročnější než otevřené jezdcovy procházky, ale nadanější žáci 1. stupně ji podle mého názoru mohou také úspěšně zvládnout. Příklad uzavřené jezdcovy procházky s využitím metody Leonharda Eulera je uveden na obrázku 9.

30	1	46	61	18	15	34	59
47	62	31	2	33	60	17	14
4	29	64	45	16	19	58	35
63	48	3	32	57	36	13	20
28	5	44	49	24	9	38	55
43	50	25	8	37	56	21	12
6	27	52	41	10	23	54	39
51	42	7	26	53	40	11	22

Obrázek 9. Uzavřená jezdcova procházka

Každou uzavřenou jezdcovu procházku je možné provést ve dvou směrech – v případě uzavřené jezdcovy procházky na obrázku 9 bychom mohli začít na poli označené číslem 64 a skončit na poli 1 (šachový jezdec tak navštěvuje pole v opačném pořadí). Pokud budeme tyto dvě procházky lišící se pouze směrem považovat za jedinou procházku, pak celkový počet možných uzavřených procházek po šachovnici 8×8 je 13 267 364 410 532 (Wikipedia, 2023c).

4. Schwenkova věta

Děti může zajímat, zda šachovým jezdec můžeme realizovat uzavřenou procházku i na šachovnicích jiných rozměrů. Odpověď na tuto otázku dává Schwenkova věta (Schwenk, 1991; Chybová 2017).

Věta (Schwenkova). *Pro všechna přirozená* $\boldsymbol{m \leq n}$ *existuje na šachovnici* $\boldsymbol{m \times n}$ *uzavřená jezdcova procházka právě tehdy, když není splněna žádná z následujících podmínek:*

i. *m a n jsou obě lichá čísla,*

ii. *m = 1, 2 nebo 4,*

iii. *m = 3 a n = 4, 6 nebo 8.*

Předchozí věta tak například říká, že na šachovnici 5×7 nebo 4×5 uzavřená jezdcova procházka neexistuje, kdežto na šachovnici 5×6 ano, jak je ukázáno na obrázku 10.

8	17	12	27	2	23
11	28	9	24	13	26
18	7	16	1	22	3
29	10	5	20	25	14
6	19	30	15	4	21

Obrázek 10. Šachovnice 5×6

Realizovat uzavřenou jezdcovu procházku je samozřejmě náročnější než realizovat otevřenou jezdcovu procházku. Ale i v tomto případě může být náročné, zejména pro děti 1. stupně, vyplnit tahy šachového jezdce (zvolenou obdélníkovou) všechna pole šachovnice. Je však možné vyhlásit soutěž, kdo vyplní co nejvíce polí dané šachovnice tahy šachového jezdce. Na závěr ještě zmíníme větu, která udává podmínky existence otevřené jezdcovy procházky s ohledem na rozměry šachovnice.

Věta (Conrad a kol., 1994). *Pro všechna přirozená* $\boldsymbol{m \leq n}$ *existuje na šachovnici* $\boldsymbol{m \times n}$ *otevřená jezdcova procházka právě tehdy, když není splněna žádná z následujících podmínek:*

i. $m = 1$ *nebo* 2,

ii. $m = 3$ *a* $n = 3, 5$ *nebo* 6,

iii. $m = 4$ *a* $n = 4$.

Podle předchozí věty je možné (na rozdíl od uzavřené jezdcovy procházky) najít otevřenou jezdcovu procházku na šachovnici 5×7, jedna taková procházka je uvedena na obrázku 11.

1	20	9	30	3	22	11
8	29	2	21	10	31	4
19	16	27	32	35	12	23
28	7	18	25	14	5	34
17	26	15	6	33	24	13

Obrázek 11. Šachovnice 5×7

5. Závěr

V článku byla představena Eulerova jezdcova procházka. Její algoritmus je poměrně snadno zapamatovatelný. Jedná se do značné míry o hraní se 4 barvami, které může být zajímavé pro žáky 1. stupně. Dále byl vysvětlen rozdíl mezi uzavřenou a otevřenou jezdcovou procházkou a byly zmíněny podmínky jejich existence kladené na rozměry šachovnice. Pro žáky 1. stupně může být vhodnější, aby se snažili vyplnit tahy šachového jezdce menší šachovnici, např. $\mathbf{5 \times 7}$, místo klasické šachovnice 8×8.

Literatura

Conrad, A., Hindrichs, T., Morsy, H. & Wegener, I. (1994). Solution of the Knight's Hamiltonian Path Problem on Chessboards. *Discrete Applied Mathematics 50* (2). Dostupné z https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166218X9200170Q?via%3Dihub

Chybová, L. (2017). *Šachové úlohy v kombinatorice* (Diplomová práce). Univerzita Karlova, Praha. Dostupné z http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/lucie_chybova_dp/sachove-ulohy.pdf

Pastor, K. (2019). Chess Independence Problems. *Elementary Mathematics Education Journal 1* (2), 34-42. Dostupné z http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol1No2/Pastor_2019_Vol1No2.pdf

Pastor, K. (2020a). Chess Domination Problems. *Elementary Mathematics Education Journal 2* (1), 46-52. Dostupné z http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol2No1/Pastor_2020_Vol2No1.pdf

Pastor, K. (2020b). Chess Piece Tour Problems. *Elementary Mathematics Education Journal 2* (2), 38-45. Dostupné z http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol2No2/Vol2No2_Pastor2.pdf

Schwenk, A. J. (1991). Which Rectangular Chessboard Have a Knight´s Tour?. *Mathematics Magazine 64* (5), 325-332. https://doi.org/10.2307/2690649

Wikipedia. (2023a). *Mathematical chess problems*. Dostupné z https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_chess_problem

Wikipedia. (2023b). *Pravidla šachů*. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Pravidla_šachů

Wikipedia. (2023c). *Jezdcova procházka*. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Jezdcova_procházka