

RIEŠENIE ROVNÍC V PRÍPRAVE UČITEĽOV ELEMENTARISTOV

Marek MOKRIŠ¹, Edita ŠIMČÍKOVÁ¹, Blanka TOMKOVÁ¹

¹Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovensko)

marek.mokris@unipo.sk, edita.simcikova@unipo.sk, blanka.tomkova@unipo.sk

Abstrakt

Jednou z oblastí v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov je aj problematika výrokových foriem a jej súčasťou je riešenie lineárnych rovníc s jednou neznámou. Tieto koncepty majú svoj odraz aj vo vyučovaní matematiky na primárnom stupni vzdelávania. V príspevku charakterizujeme metodiku riešenia lineárnych rovníc a predstavujeme stratégie uplatniteľné v primárnom vzdelávaní. V rámci pregraduálnej prípravy učiteľov elementaristov je uvedená problematika zaradená do dvoch vyučovacích predmetov. Pri analýze preferovaných metód riešenia lineárnych rovníc boli skúmanou vzorkou študenti PF PU v Prešove. V rámci profesijnej prípravy mali možnosť uplatniť technológiu rozšírenej reality ako prostriedok riešenia lineárnych rovníc. Výsledky meraní sú súčasťou príspevku.

Kľúčové slová: výroková forma, lineárna rovnica, primárne vzdelávanie, stratégie riešenia rovníc, rozšírená realita

SOLVING EQUATIONS IN THE TRAINING OF ELEMENTARY TEACHERS

Abstract

One of the areas of professional mathematical training of future teachers is the issue of predicate logic and solving linear equations with one unknown. These concepts are included in the teaching of mathematics at the primary level of education. In the paper, we characterize the methodology of solving linear equations in primary education. As part of the undergraduate training of elementary school teachers, this issue is included in two teaching subjects. In the analysis of preferred methods of solving linear equations, the studied sample was the students of PF PU in Prešov. As part of their professional training, they had the opportunity to apply augmented reality technology in solving linear equations. The results of the observations are included in the paper.

Keywords: predicate logic, linear equation, primary education, strategies for solving equations, augmented reality

1. Úvod

Pojem rovnica je počas matematickej prípravy žiakov a študentov prezentovaný ako rovnosť dvoch funkcií, zápis vyjadrujúci rovnosť dvoch algebrických výrazov s premennou, alebo ako typ výrokovvej formy. Formálna definícia pojmu rovnica je totožná s predstavou uplatňovanou od matematickej prípravy na strednej škole. Vychádza z pojmu funkcia a tvrdí, že ak máme dve lineárne funkcie $f(x)$ a $g(x)$ definované na množine D , potom rovnosť $f(x) = g(x)$, ktorá vyžaduje nájdenie všetkých takých $x \in D$ vyhovujúcich tejto rovnosti, sa nazýva lineárnou rovnicou s neznámou x .

Funkciu $f(x)$ nazývame ľavá strana rovnice a funkciu $g(x)$ pravá strana rovnice. Množinu D označujeme ako definičný obor rovnice a x je premenná – neznáma, ktorej hodnotu je potrebné určiť. Predstava rovnice ako rovnosti dvoch algebrických výrazov s danou premennou je zaradená do matematického učiva na druhom stupni základnej školy.

Rovnica ako výroková forma s istou premennou – neznámou je súčasťou matematickej prípravy žiakov na prvom stupni základnej školy. Úlohou je nájsť konštantu – číslo, ktoré danú výrokovú formu $V(x)$, vyjadrenú v podobe rovnosti, zmení na pravdivý výrok. Metóda riešenia rovnice pre žiakov v primárnom vzdelávaní nie je určená. Kurikulárny dokument (*Inovovaný štátny vzdelávací program: Matematika – primárne vzdelávanie*, 2015) uvádza len požiadavku, aby žiak daného ročníka (v danom číselnom obore v množine prirodzených čísel) vedel na propedeutickej úrovni vyriešiť jednoduché rovnice na sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie.

2. Rovnice v primárnej edukácii

Úlohy na riešenie rovníc sú v učebných zdrojoch súčasťou tém zameraných na operácie sčítania a odčítania prirodzených čísel v danom obore (od 1. ročníka ZŠ) a násobenia a delenia prirodzených čísel v obore do 100 (od 3. ročníka ZŠ). Pojem rovnica a neznáma sa v pojmovom aparáte žiaka nevyskytuje a nepoužíva ho v matematickej komunikácii so žiakom ani učiteľ. Reprezentantmi premennej (neznámej) v rovnici na prvom stupni základnej školy sú rôzne symboly, ktoré sú primerané danej vekovej kategórii, alebo rovnice predstavujú iné typy úloh. Ukážky uvádzame z aktuálne dostupných učebných zdrojov¹ pre prvý ročník základnej školy:

Rovnice s jednou neznámou, kde neznámu predstavuje prázdny štvorček (Obrázok 1), gumovanec (Obrázok 2), hviezdička (Obrázok 3):

Doplň.

$$4 + \square = 7$$

$$\square + 3 = 4$$

$$5 + \square = 6$$

Obrázok 1. (Zdroj: Belic & Striežovská, 2015, s. 50)

1. Ktoré čísla vygumoval Gumkát?

$$14 - \square = 10$$

$$\square + 3 = 10$$

$$18 - \square = 8$$

Obrázok 2. (Zdroj: Repáš & Jančiarová, 2020, s. 15)

2. Aké číslo sa skrýva pod hviezdičkou?

$$13 = \star + 3$$

$$13 = 11 + \star$$

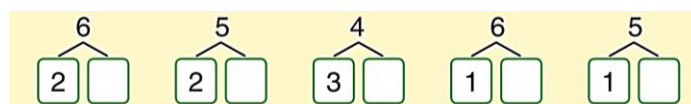
$$12 = \star + 2$$

$$12 = 11 + \star$$

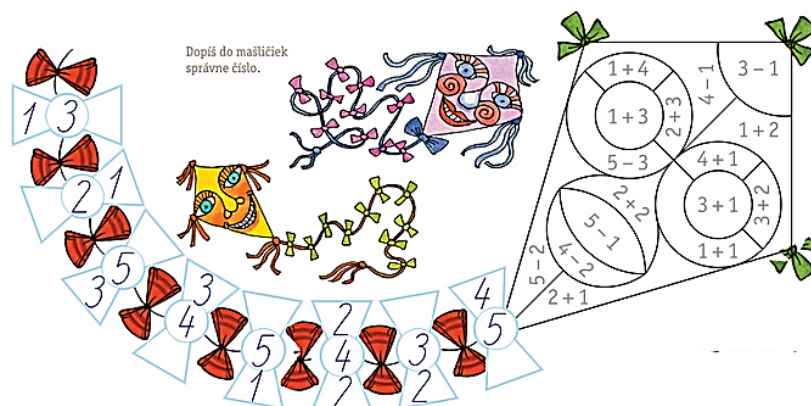
Obrázok 3. (Zdroj: Berová et al., 2017a, s. 34)

Ukážky úloh zameraných na riešenie rovníc, kde žiak nevidí matematickú operáciu, ale pri riešení je aplikovaný rozklad čísel (Obrázok 4 - Obrázok 6):

¹ Skúmanými boli učebné texty schválené pre vyučovanie matematiky na primárnom stupni vzdelávania na Slovensku.



Obrázok 4. (Zdroj: Berová et al., 2017a, s. 34)

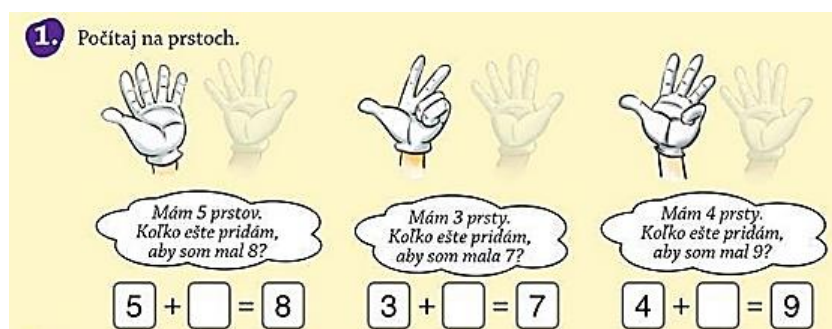


Obrázok 5. (Zdroj: Repáš & Jančiarová, 2020, s. 15)

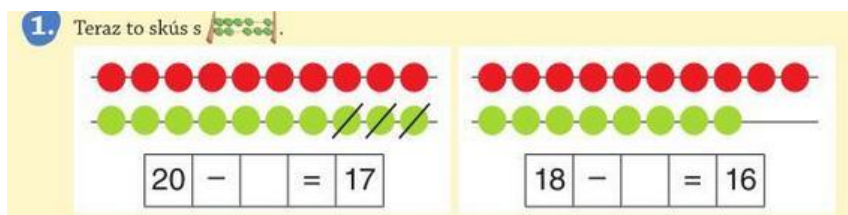


Obrázok 6. (Zdroj: Belic & Striežovská, 2015b, s. 3)

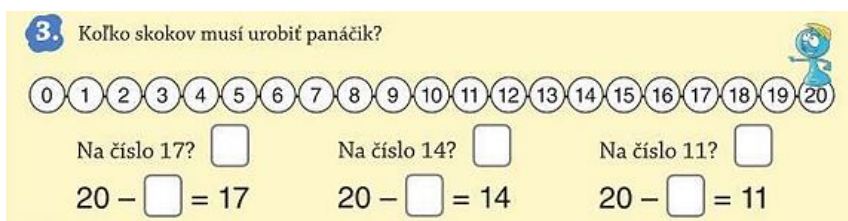
Žiaci tieto typy úloh (Obrázok 1- Obrázok 3) riešia dopočítavaním (Obrázok 1, Obrázok 3) alebo postupným odčítaním čísla (Obrázok 2). Stratégia pokus – omyl je využívaná zväčša na podnet učiteľa. Rovnice zadané cez rozklad čísel žiaci riešia buď dopočítaním alebo využitím automatického spoja v číselnom obore do 6, prípadne do 10 (Obrázok 4, Obrázok 5). Využitie inverznej operácie v procese riešenia rovníc žiakom primárnej edukácie nie je prirodzené. Učiteľ by mal žiakom ponechať priestor na samostatné objavovanie vhodnej stratégie, ale mal by im vedieť ponúknuť aj ďalšie postupy umožňujúce nájsť neznáme číslo, aby si mohli zvoliť ten, ktorý im pri riešení úlohy najviac vyhovuje. Učebné zdroje žiakom zväčša priamo neponúkajú metódy riešenia rovníc. Výnimkou sú učebné texty pre 2. ročník autorov Černek & Bednářová (2018) a pracovné zošity pre 1. ročník autorov Berová et al. (2017).



Obrázok 7. (Zdroj: Berová et al., 2017a, s. 15)

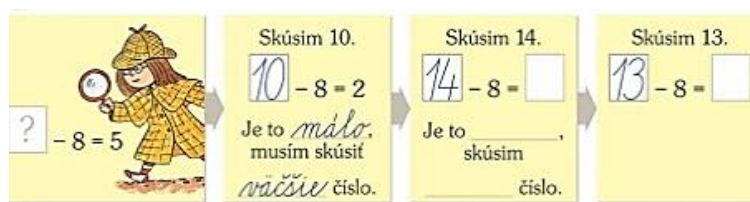


Obrázok 8. (Zdroj: Berová et al., 2017b, s. 25)



Obrázok 9. (Zdroj: Berová et al., 2017b, s. 24)

So stratégiou pokus – omyl (Obrázok 10) sa stretne len v pracovnom zošite pre 2. ročník (Černek & Bednářová, 2018), ktorý ale nie je súčasťou žiadneho uceleného setu učebných materiálov pre 1. stupeň ZŠ a nemá nadväznosť na ďalšie ročníky.



Obrázok 10. (Zdroj: Černek & Bednářová, 2018, s. 45)

3. Postupy riešenia rovníc – výsledky meraní

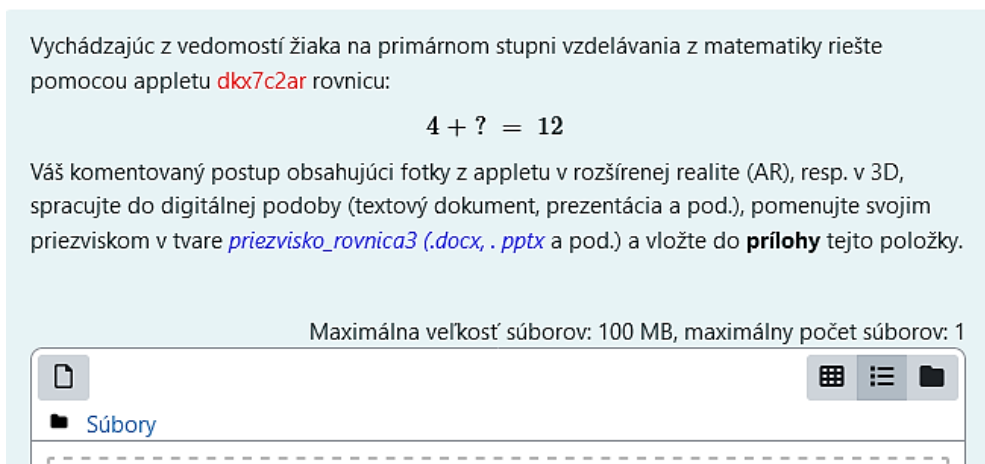
Problematika riešenia rovníc využitím rôznych stratégií je súčasťou vysokoškolskej pregraduálnej prípravy učiteľov pre primárne, resp. predprimárne vzdelávanie, ktoré je realizované v podmienkach Pedagogickej fakulty Prešovskej univerzity v Prešove v bakalárskom aj magisterskom stupni štúdia. V tomto kontexte bol realizovaný výskum, v ktorom bolo zisťované, ako si s problematikou riešenia rovníc poradia študenti 3. ročníka bakalárskeho stupňa vysokoškolského štúdia a aký vplyv na spôsob riešenia bude mať využitie technológie rozšírenej reality (AR). Meranie bolo realizované na vzorke osemdesiatich ôsmich študentov dennej formy bakalárskeho stupňa štúdia v študijnom programe predškolská a elementárna pedagogika. Na zber dát bol aplikovaný nástroj Test v prostredí LMS Moodle v e-kurze Matematika v primárnej edukácii. Realizované boli dve merania. V prvom meraní bolo úlohou študentov riešiť lineárne rovnice takým spôsobom, ktorý by mohli uplatniť žiaci na prvom stupni základnej školy. Riešenie bolo potrebné doplniť metodickým komentárom. V druhom meraní študenti museli pri riešení rovnice použiť nástroje technológie rozšírenej reality. Riešenie úloh však opäť muselo vychádzať z postupov použiteľných na primárnom stupni vzdelávania. Toto meranie bolo realizované až potom, keď študenti získali skúsenosti s prácou s technológiou rozšírenej reality, ktorá predstavuje kombináciu reálneho a virtuálneho prostredia. Technológia rozšírenej reality mala podobu appletu spracovaného v prostredí Geogebra 3D Calculator – kód appletu *dkx7c2ar* (Obrázok 11).

Vychádzajúc z vedomostí žiaka na primárnom stupni vzdelávania z matematiky riešte pomocou appletu [dkx7c2ar](#) rovnicu:

$$4 + ? = 12$$

Váš komentovaný postup obsahujúci fotky z appletu v rozšírenej realite (AR), resp. v 3D, spracujte do digitálnej podoby (textový dokument, prezentácia a pod.), pomenujte svojim priezviskom v tvare [priezvisko_rovnica3](#) (.docx, .pptx a pod.) a vložte do **prílohy** tejto položky.

Maximálna veľkosť súborov: 100 MB, maximálny počet súborov: 1

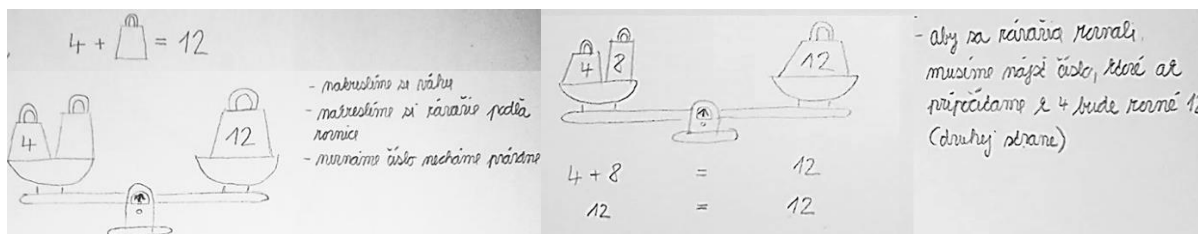


Obrázok 11. Zadanie testovej položky v prostredí Moodle

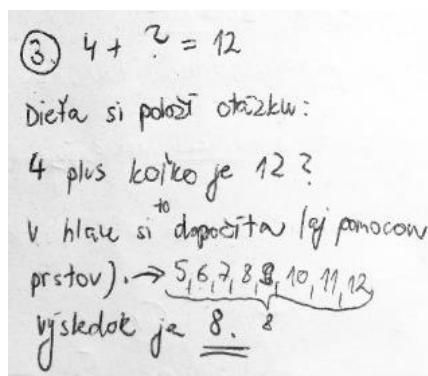
3.1. Riešenie rovnice bez použitia AR

Študenti mali za úlohu vyriešiť lineárnu rovnicu s jednou neznámou typu $a + x = b$. Rovnica bola prezentovaná v tvare $4 + ? = 12$ a postup riešenia rovnice mal reflektovať vedomosti žiakov primárneho stupňa vzdelávania.

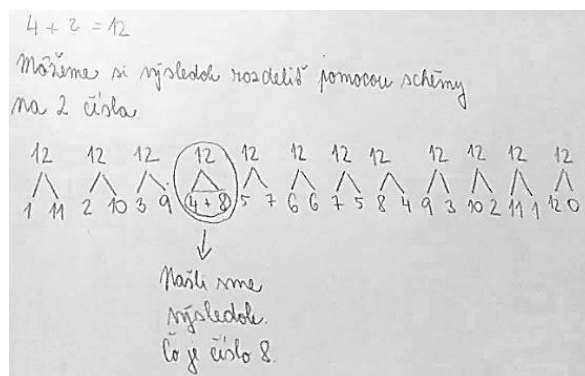
Riešiteľské postupy študentov (Obrázok 12 - Obrázok 18) boli rôznej kvality. Nie vždy zohľadnili požiadavku využitia postupov primeraných schopnostiam žiakov daného veku (Obrázok 17), resp. pri riešení rovnice formulovali slovnú úlohu, čo nemožno považovať za adekvátnu veku primeranú stratégiu (Obrázok 18. Verbalizácia rovnice).



Obrázok 12. Vizualizácia rovnice prostredníctvom obrázka



Obrázok 13. Metóda dopočítania



Obrázok 14. Rozklad čísla pri riešení rovnice

$$4 + ? = 12$$

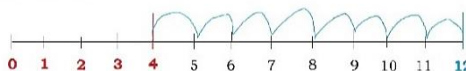
$$4 + \boxed{1} = 5 \quad 4 + \boxed{5} = 9$$

$$4 + \boxed{2} = 6 \quad 4 + \boxed{6} = 10$$

$$4 + \boxed{3} = 7 \quad 4 + \boxed{7} = 11$$

$$4 + \boxed{4} = 8 \quad 4 + \boxed{8} = 12 \checkmark$$

Obrázok 15. Postupné dosadzovanie

al $4 + ? = 12$ 

Na číselnej osi sa žiakom počíta jednoducho. Od zadaného čísla (4) počítame po jednom dieliku až do finálneho čísla (12). Pri počítaní si žiak robí vlnky, čiarky, čo mu vyhovuje a zároveň pomáha počítať.

Obrázok 16. Riešenie pomocou číselnej osi

$$4 + ? = 12$$

$$\begin{array}{r} 4 + ? = 12 \\ -4 \quad -4 \\ \hline ? = 12 - 4 \\ ? = 8 \end{array}$$

$$\text{SK: } 4 + 8 = 12$$

$$\text{SK2: } 8 = 12 - 4$$

$$8 = 8$$

$$4 + ? = 12 \quad / -4$$

$$? = 12 - 4$$

$$? = 8$$

Aby sme mohli vyriešiť túto rovnicu musíme ako prvú prehodit číslo 4 na druhú stranu. Keď presúvame čísla zo strany na stranu zmení sa znamienko pred nimi na opačné. Príklad: $2 - 10$ bude 10 a zo 4 bude -4 . Tento krok je označený v prvom riadku, druhom je už číslo 4 presunuté. V ďalšom kroku odpočítame 4 od 12 a do tretieho riadku napíšeme výsledok. A tak sme zistili, že $?$ sa rovná 8.

Obrázok 17. Aplikácia ekvivalentných úprav

$$4 + ? = 12$$

K tejto rovnici si vymyslím príbeh napr.:

Včera Ema dostala 4 cukríky.
Dnes dostala ešte niekoľko.
Teraz má spolu 12 cukríkov.

Kolko cukríkov dostala dnes?

Počítame po jednom od čísla 4, až po č. 12.
Ukážem 8 prstov.

Ema dnes dostala ešte 8 cukríkov.

$$4 + \boxed{8} = 12$$

V košíku mám 4 jablka, koľko jablček musím pridať do košíka, aby som mala v košíku 12 jablček.

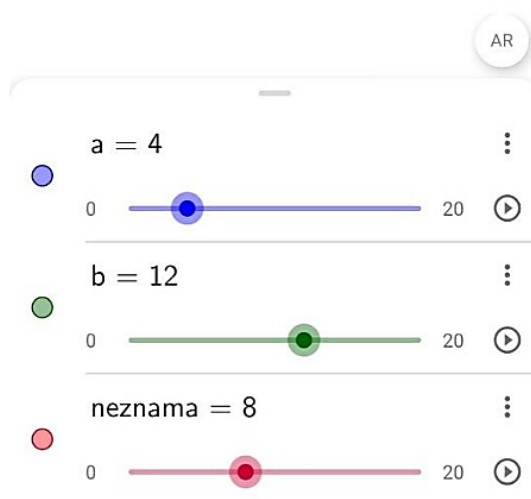
$$\underline{\underline{\text{Odpoveď} = 8}}$$

Obrázok 18. Verbalizácia rovnice

3.2. Riešenie rovnice s použitím AR

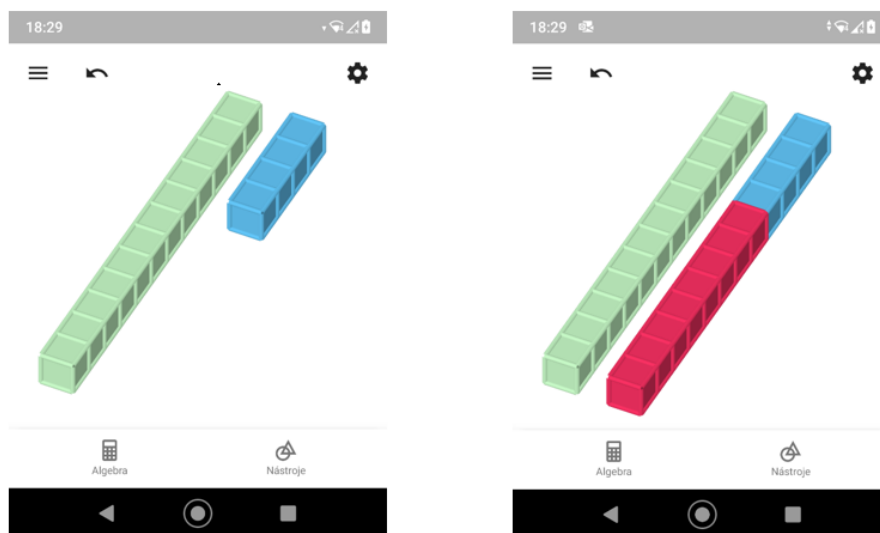
Študenti mali za úlohu vyriešiť opäť lineárnu rovnicu s jednou neznámou typu $a + x = b$. Rovnica bola prezentovaná v rovnakom tvare $4 + ? = 12$ a postup riešenia rovnice mal reflektovať vedomosti žiakov primárneho stupňa tak, že pri riešení rovnice bolo potrebné využiť vhodný applet (Obrázok 11).

Použitie appletu si vyžadovalo transformáciu rovnice $4 + x = 12$ do appletu v podobe korektných vstupných parametrov appletu (Obrázok 19).



Obrázok 19. Nastavenie vstupných parametrov appletu

Analýza študentských riešení nám poskytla informáciu o aplikovaných postupoch riešenia zadanej rovnice. V tomto kontexte konštatujeme, že s využitím technológie AR sa riešiteľské postupy obmedzili len na postup, ktorý využíval metódu dopočítania (Obrázok 20). Metodický komentár bol zväčša zúžený na popis práce so samotným appletom, čo nemožno považovať za postačujúce. V mnohých prípadoch sa v komentároch objavili aj terminologické nedostatky (štvorec vs. kocka - Obrázok 20). Niektoré didaktické aspekty aplikovanej technológie študenti neobjavili. Medzi ne je možné zaradiť aj použitie metódy postupného dosadzovania, resp. metódy pokus-omyl, ktoré samotný applet ponúkal v podobe vizuálnej spätnej väzby. Čiastkové výsledky riešenej rovnice boli odlišené odtieňom farby, ktorou bolo prezentované hľadané riešenie.



Na prvom obrázku sú 4 modré štvorce a 12 zelených.

Postupne pridávaj červené štvorce ku modrým až kým nebude zástup červeno-modrých štvorcov rovnako dlhý ako zástup zelených štvorcov. Spočítaj, koľko červených štvorcov si pridal.

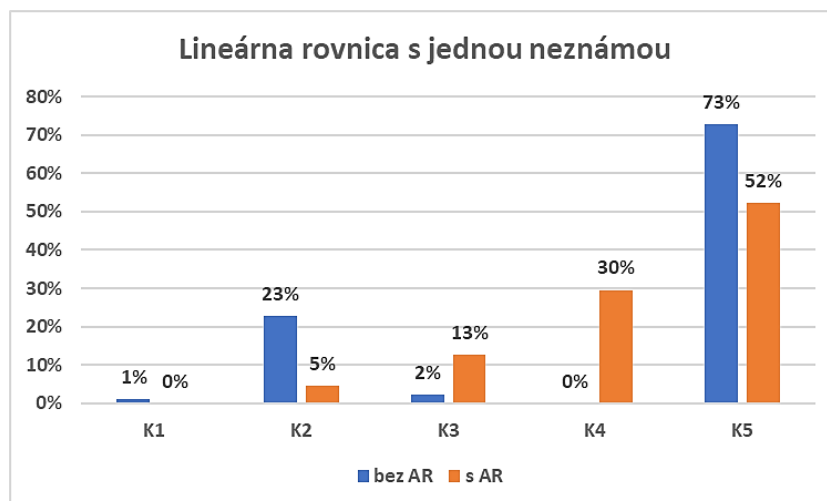
Obrázok 20. Študentské riešenie rovnice s využitím appletu s AR

Riešenia študentov boli podrobené kvalitatívnej analýze a zatriedené do piatich kategórií:

- K1 - neriešená úloha,
- K2 - nesprávne riešená úloha,
- K3 - čiastočne správne riešená úloha,
- K4 - správne vyriešená úloha – bez vhodnej metodiky,
- K5 - správne vyriešená úloha – uplatnená vhodná metodika.

Typ kategórie odrážal dve dimenzie a to korektnosť samotného riešenia problému a vhodnosť zvoleného postupu z pohľadu aplikovateľnosti vo vyučovacom procese na primárnom stupni vzdelávania.

Korektné zvládnutie riešenia zadania v oboch testovaniach vyžadovalo od študentov, okrem teoretických poznatkov súvisiacich s procesom riešenia lineárnej rovnice s jednou neznámou, aj schopnosť rešpektovať poznatky žiakov na prvom stupni základnej školy a k tomu prispôbiť metodiku riešenia úlohy. Výsledky oboch meraní sú prezentované prostredníctvom nasledujúceho grafu (Obrázok 21), ktorý ukazuje úspešnosť respondentov pri riešení lineárnej rovnice s jednou neznámou.



Obrázok 21. Úspešnosť riešenia lineárnej rovnice s jednou neznámou.

Konštatujeme, že použitie technológie eliminovalo kategóriu K1 – neriešená úloha, tj. všetci respondenti prezentovali svoj prístup k riešeniu zadania. Rovnako je možné tvrdiť, že aplikácia technológie AR priniesla aj nárast počtu správnych riešení bez zohľadnenia metodického postupu (73 % bez AR, 83 % s AR – sledované kategórie K4 a K5, Obrázok 21). Za problematickú oblasť implementácie technológie AR do procesu riešenia rovníc je možné považovať nie vždy vhodné metodické spracovanie úlohy (napr. Obrázok 20). Použitie technológie rozšírenej reality v profesijnej príprave budúcich učiteľov považujú za prínosné aj Hnatová (2022) a Prídavková (2022). V tomto kontexte je potrebné zamerať pozornosť aj na didaktický rozmer začleňovania nových technológií do pregraduálnej prípravy budúcich učiteľov. V súlade s prácou Nocara a Zdráhala (2016) môžeme konštatovať, že nie je možné jednoznačne potvrdiť efektivitu využitia moderných technológií („tradičné versus nové“) pri hľadaní postupov riešení matematických úloh.

4. Záver

Aplikácia technológie rozšírenej reality (AR) v podobe appletu spracovaného v prostredí Geogebra 3D Calculator umožnila študentom nájsť riešenie lineárnej rovnice s jednou neznámou s väčšou pravdepodobnosťou, ako bez jej implementácie. Portfólio ponúkaných riešiteľských stratégií je však eliminované len na jeden prístup opierajúci sa o metódu dopočítania. Schopnosť študentov poskytnúť vhodný metodický komentár k riešeniu lineárnej rovnice s jednou neznámou tak, aby bol veku primeraný žiakom mladšieho školského veku, nebola na požadovanej úrovni. Táto oblasť profesijnej prípravy si vyžaduje väčšiu pozornosť.

Acknowledgements

Príspevok je výstupom grantového projektu KEGA 036PU-4/2021 Technológia rozšírenej reality v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov elementaristov.

Literatúra

- Belic, M., & Striežovská, J. (2015a). *Matematika pre prvákov – 1. časť* (1. vydanie). AITEC. <https://www.aitec.sk/produkt-preview-ng/matematika-pre-prvakov-1-cast-176#flipbook/page-1>
- Belic, M., & Striežovská, J. (2015b). *Matematika pre prvákov – 2. časť* (1. vydanie). AITEC. <https://www.aitec.sk/produkt-preview-ng/matematika-pre-prvakov-2-cast-177#flipbook/page-1>
- Berová, Z., Bero, P., & Honzová, I. (2017a). *Matematika pre 1. ročník ZŠ - Pracovný zošit 2* (1. vydanie). LiberaTerra. <https://studio.liberaterra.sk>
- Berová, Z., Bero, P., & Honzová, I. (2017b). *Matematika pre 1. ročník ZŠ - Pracovný zošit 3* (1. vydanie). LiberaTerra. <https://studio.liberaterra.sk>
- Černek, P., & Bednářová, S. (2018). *Matematika pre 2. ročník základných škôl – Pracovný zošit 2. časť*. AITEC. <https://www.aitec.sk/produkt-preview-ng/matematika-pre-2-rocnik-zs-pracovny-zosit-2-cast--44#flipbook/page-1>
- Hnatová, J. (2022). Vzájomné prieniky technologických, matematických a pedagogických znalostí pri implementácii technológie rozšírenej reality do výučby študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie. *Elementary Mathematics Education Journal*, 4(1), 13–25.
- Inovovaný štátny vzdelávací program: Matematika – primárne vzdelávanie*. (2015). Štátny pedagogický ústav. https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf
- Nocar, D. & Zdráhal, T. (2016). Efficiency of the dynamic geometry software for self-education on one geometric concept. *Trends in Education*, 9(1), 198–204. <https://doi.org/10.5507/tvv.2016.027>
- Prídavková, A. (2022). Technológia rozšírenej reality a rozvoj matematických schopností. *Elementary Mathematics Education Journal*, 4(1), 53–63.
- Repáš, V., & Jančiarová, I. (2020). *Matematika 1: 2. diel* (1. vydanie). Orbis Pictus Istropolitana. <https://kniznica.orbispictus.sk/matematika-1-2-diel/#1>