Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics

The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Olomouc 2023

ISSN 2694-8133

Univerzita Palackého v Olomouci
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

ve spolupráci s

Jednotou českých matematiků a fyziků
pobočný spolek Olomouc

Elementary Mathematics Education Journal

ročník 5, číslo 2

2023

Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

in cooperation with

The Union of Czech Mathematicians and Physicists
Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 5, No. 2

2023

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Vydavatel: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika

Adresa a kontakty:
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Informace pro autory:
Časopis uveřejňuje články k aktuálním problémům z teorie elementární matematiky, o inovacích, trendech a výzkumech v primárním a preprimárním matematickém vzdělávání. Jednotlivé články jsou anonymně posuzovány dvěma odborníky v recenzním řízením typu „double-blind peer review“. Další informace a podrobné pokyny pro autory jsou k dispozici na webu: http://emejournal.upol.cz.

Za kvalitu obrázků, jazykovou správnost, dodržení bibliografické normy a dodržování publikační etiky odpovídají autoři jednotlivých článků.

Časopis vychází dvakrát ročně.

Ročník 5, číslo 2

ISSN 2694-8133

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Publisher: Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Address and contacts:
Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic
emej@upol.cz

Information for authors:
The journal publishes articles on current issues in the theory of elementary mathematics, about innovation, trends and research in primary and pre-primary mathematics education. Each article is reviewed by two anonymous experts ("double-blind peer review"). More information and other instructions for authors are available at: http://emejournal.upol.cz.

The authors of the articles are responsible for the quality of the images, language accuracy, compliance with bibliographic standards and adherence to publication ethics.

The journal is published twice a year.

Vol. 5, No. 2

ISSN 2694-8133

ISSN 2694-8133

Obsah

Content

EFFECT OF COGNITIVE DRILL THERAPY ON THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICS TEACHERS' TEST ITEM WRITING SKILLS

John J. AGAH[1], Lawrence I. AGUELE[2]
[1]University of Nigeria, Faculty of Education (Nigeria)
[2]Ambrose Alli University Ekpoma, Faculty of Education (Nigeria)
john.agah@unn.edu.ng, profaguele@gmail.com

Abstract

Test item writing is one real-life problem that poses a great challenge to teachers and often impacts negatively on students' achievement as well as decisions taken about the students. It is pertinent to use cognitive drill therapy (CDT) to resolve test item writing challenges experienced by teachers. The authors adopted a Non-equivalent control group research design. A total of 83 teachers participated in the study and constituted the study sample. Mathematics Test item Writing Skills Rating Scale (MTIWSRS) was the instrument used for data collection. The internal consistency of MTIWSRS was determined using Cronbach Alpha and a reliability coefficient of 0.83 was obtained. Data was analyzed using analysis of covariance. It was found that cognitive drill therapy (CDT) had a more significant effect on participants' test item writing scores. The researchers concluded that cognitive drill therapy (CDT) enhanced the Mathematics teachers' item writing skills in Enugu State, Nigeria. CDT was a good professional development programme for training Mathematics teachers in Enugu State, Nigeria.

Keywords: Cognitive drill, Item writing skills, Experience, Gender

1. Introduction

The inability of students to attain the desirable level of achievement in internal and external examinations globally and in Nigeria, in particular, has been attributed to the students, teachers, schools, curricula factors and the assessment approaches employed. The assessment process is a source of worry for the researchers in this article. The teachers who teach and examine students in the classroom appear to have some challenges in writing good items, as such they ignore task that measures higher-order thinking skills during item writing. This could be one of the reasons why most students cannot sufficiently display higher-order skills in areas like creativity, abstract thinking, and critical reasoning, (Aydın, Sarıer, & Uysal, 2012). The challenges that teachers face in writing items to measure higher-order thinking skills can also be considered among the reasons for students' failure as well as their inability to create and discover new things (İnceçam, Demir, & Demir, 2018; Barak, & Dori, 2009).

Increasing students' mathematical achievement in internal and external examinations is considered to be closely related to the cognitive level of teacher questions used in teaching processes or formative assessment (Çalık & Aksu, 2018; Sahin & Kulm, 2008) and the quality of teacher-designed tests and measurement instruments used in examinations (Aygün, Baran-Bulut, & İpek, 2016). For example, Çalık and Aksu (2018) state that teachers and prospective teachers prefer to ask questions at lower thinking levels during teaching. The writing of good items to measure pupils/students' learning in all subjects especially Mathematics has posed a serious challenge to teachers. Most teachers see it as a difficult task and they simply draw items or questions directly from past examinations, textbooks or even notebooks when assessing learners.

This act helps some learners who have access to the questions to pass well in internal examinations but fail at external examinations, hence the need for further professional development of Mathematics Teachers in item writing skills. The training will enhance Mathematics teachers' development and in turn, improve their skills in assessment.

Assessment is a major element that enhances students' thinking and develops their skills (Alkhateeb, 2019). It is reported that classroom teachers in most countries of the world and Nigeria in particular lack adequate knowledge and skills to write good items for assessment and it is a global phenomenon (Çakan, 2004; Şata, 2016). Teachers equally have some challenges on how to use assessment to measure higher-order thinking competencies and they are also unable to use assessment sufficiently to support learning. This may indicate the need for more quality learning opportunities on assessment. However, Professional Development activities on assessment are limited, and participation is rather low in Turkey (Aydın, Selvitopu, & Kaya, 2018; Kitchen et al., 2019) and even Nigeria.

Teacher development (TD) entails a comprehensive, sustained, and intensive approach to improving teachers' effectiveness in raising learners' achievement and it is regarded as Professional development. It is activities that aim to develop an individual's skills, knowledge, expertise, and other characteristics as a teacher (OECD, 2009). Teacher development has positive effects on students' learning outcomes and achievement (Loyalka, Popova, Li, & Shi, 2018). It is a form of in-service training that could improve the teachers' skill set and knowledge base. Participation in seminars, conferences, online sharing, belonging to professional groups, and other methods are some of the ways mathematics teachers can support their professional growth. This assertion corroborates Sharma's (2015) position that in formal settings, professional development programmes are often disseminated through seminars, conferences, workshops, and sometimes occur in informal conditions, through interactions across online platforms, and peer group discussions among others. The rate of active professional development (PD) activities such as observation visits, peer and/or self-observation and coaching is low globally (OECD, 2019). The fact that teachers had been trained to teach thinking skills to some extent, of which they were less often trained to assess (Stiggins, Griswold, & Wikelund,1989) makes it pertinent to involve them in professional development.

Some Mathematics teachers have difficulty in determining higher or lower-level thinking skills and creating test items for higher-order thinking (Thomson, 2008). As such, teachers need to be trained with the right programs (Driana & Ernawati, 2019). Teachers of mathematics work extremely hard to make the subject engaging and interesting for their students. To improve the quality of educational delivery, teachers must occasionally participate in professional development activities. Majority of the teachers lacked competencies for preparing quality classroom tests, particularly on the use of Table of Specification as well as lacked professional support on how to prepare matching items, short answers, and multiple-choice test items. Effective teacher development has a wide range of benefits, including improved teaching methods, higher levels of student engagement, and better learning outcomes.

Mathematics teachers need to inculcate, sustain, and have a strong understanding of item writing skills, especially higher-order thinking and make it an integral part of the classroom (Sebastian, 2020). Teachers' understanding of Bloom's Taxonomy which divides learning objectives into three domains: cognitive, affective, and psychomotor is essential. The cognitive domain includes six hierarchical categories: knowledge, comprehension, application, analysis, synthesis, and evaluation. Knowledge is at the lowest cognitive level, while evaluation is at the highest level. Learning objectives and questions can be phrased using the specific verbs that are linked with each category of the cognitive domain.

Mathematics Teachers' knowledge of the six levels of the cognitive domain is essential to higher-order thinking skills (HOTS) and it fosters students' interest in mathematics as well as creates continuous learning that will instil creativity among individuals (Abdul et al, 2017).

Moreover, teachers must pay equal attention to questioning skills that provide constructive feedback or ask constructive follow-up questions (Sebastian, 2020 & Nicol, 1999). It has been observed that most teachers are not good at constructing tests in their various subject areas. As such, most teachers hastily duplicate questions from any previous exam. Majority of test questions created by teachers are poorly designed and lack psychometric features. This revealed why Quansah et al. (2019) said that teachers have limited skills in the construction of end-of-term examinations and suggested organizing workshops for teachers regularly to sharpen their skills in effective test construction practices.

In constructing a good test, Nworgu (2015) outlined some stages which include content analysis, review of instructional objectives, development of test blueprint/table of specification, and item writing among others. As pointed out earlier, item writing practices pose a great challenge to classroom teachers. The practice involved writing the stem of the item using verbs to present problems, stating questions without irrelevant information, keeping the language simple and clear, avoiding tricky items, writing the question without giving too many clues to answers and so on. Teachers who do not possess sound skills in item writing are bound to produce questions that increase test anxiety among students. This will in turn impact students' academic performance (Ali & Abdul-Wahab, 2022; Ibrahim, 2018). Researchers have also argued that test construction among teachers has not been encouraging (Ali & Abdul-Wahab, 2022; Hamafyelto et al., 2015; Kazuko, 2018). Furthermore, the test construction skills of teachers are inadequate, especially those with few years of teaching experience (Ebinye, 2011) and worse for non-professional teachers (Ololube, 2008). However, Adodo (2014) found out that years of experience do not make any significant difference in teachers' knowledge of test construction procedures.

Well-written test items contribute to accurate assessment of students' mastery and in turn, improve the precision of judgment about students' learning and achievement. Anderson (2017) found that experienced teachers were more adept at aligning test items with curriculum objectives, ensuring that assessments accurately measured what students were supposed to learn. Some experienced teachers write test items that measure a wide range of student responses and misconceptions (Smith, 2019). They are more likely to design items that probe for specific misconceptions, resulting in assessments that provide valuable insights into student understanding (Johnson, 2020). Williams, (2021) opines that their item writing practices align with evolving pedagogical approaches and assessment methods that permit more innovative and application-oriented item designs. Moreso, they incorporate/engage in reflective practice, analyzing the outcomes of their assessments and iteratively improving their item writing skills in regular self-assessment and feedback processes, leading to the refinement of their item writing skills over time (Martinez, 2018). The teachers play a mentoring role, guiding novice educators in test item writing skills development, and giving professional mentorship skills to foster the growth of novice educators' item writing abilities (Turner, 2019). Although experienced teachers have a deeper understanding of curriculum standards and learning objectives as well as possess the qualities enumerated by researchers, most of them still display unsatisfactory skills in item writing.

There are various gender issues related to teaching and learning at schools at all levels (Paudel, 2020). Gender refers to a network of beliefs, personalities, traits values, behavior and activities differentiating women and men through a process of social construction that has several distinctive features (OECD, 2018, UNDP, 2006). It is a situation in which stereotypical roles or attitudes are attributed to males or females (Halpern, Straight, & Stephenson, 2011).

It noted that gender gaps do not fluctuate between items or sections of the exam (Reardon & Ho, 2015), and female teachers were less likely to perceive themselves as proficient in test item writing skills compared to their male counterparts (Brown, 2017). This means that gender inequalities exist across test item writing skills. Some subtle biases could unintentionally manifest in the wording and framing of questions. This can impact the perceived difficulty and accessibility of items for different genders (Smith, 2020).

Researchers have found that there exists a significant difference between males and females in the knowledge of test construction procedures whereas others report no differences. In the reports, some are in favour of males for tests with more multiple-choice items and more in favour of females for tests with more constructed-response items (Reardon, Kalogrides, Fahle, Podolsky, & Zárate, 2018). Furthermore, gender differences may be noticed in irrelevant skills required by different item types (Scheiber, Reynolds, Hajovsky, & Kaufman, 2015). Also, the test item format creates gender differences in achievement across state tests that weigh various dimensions of learning using overall scores (Reardon, Kalogrides, Fahle, Podolsky, & Zárate, 2018; Taylor & Lee, 2012). It was found that cognitive behavioral active engagement training was efficacious in the improvement of test items construction skills among primary school teachers in Nigeria (Ede, et al, 2021). It is essential to determine how gender could moderate the item writing skills of teachers when trained with Cognitive Drill Therapy and lecture methods. The essence is to ascertain whether the disparity associated with performance due to experience and gender could be addressed with Cognitive Drill Therapy.

A lot of teachers feel uncomfortable when they are told to submit quality test items for examination in their schools. Some of them feel uneasy when developing worthy exam questions that a superior person is to vet before it is administered to students. This creates anxiety which is characterized by constant fear and worry in various school settings. Teachers in this category are found to be deficient or incompetent in writing quality test items in Mathematics and require specific training through cognitive drill therapy. Cognitive drill therapy (CDT) is a new approach to the treatment of stimulus-bound anxiety (Kumar et al. 2012). The therapy is based on the theories of conditioning, cognitive appraisal, and linguistics. CDT has given promising results in many research studies (Verma, Arya, Kandhari & Kumar, 2018; Arya, Verma & Kumar, 2017),

CDT conceptualizes fear as having four components: O- Objects of fear; B- Body Mind Reactions; S- Safety Behaviors and D- Danger Perceptions (Arya, Verma, Kumar, & Mishra, 2018). The object of fear (carrying out content analysis and preparing test blueprint), causes physiological and psychological responses (trembling, nervousness, irritability, lack of concentration among others), teachers cope by avoiding the situation (copying questions from textbook/notebooks, past questions) as the teacher feels pressurized due to various reasons (test validators will make fun of him/her, weak skills in test item writing, etc.). It is therefore pertinent to find out the effect of Cognitive Drill Therapy on the development of Mathematics Teachers' test item writing Skills.

Research questions

1. What is the mean rating of Mathematics Teachers' test item writing skills scores when exposed to Cognitive Drill Therapy and lecture method?
2. What is the influence of experience in the mean rating of Mathematics Teachers' test item writing Skills scores?
3. What is the influence of gender in the mean rating of Mathematics Teachers' test item writing Skills scores?

Hypotheses

1. There is no significant difference in the mean rating of Mathematics Teachers' test item writing Skills scores when exposed to Cognitive Drill Therapy and lecture method.
2. There is no significant influence of teachers' experience in the mean rating of Mathematics Teachers' test item writing Skills scores.
3. There is no significant influence of teachers' gender in the mean rating of Mathematics Teachers' test item writing Skills scores.

2. Methods

The quasi-experimental design was used for the study, specifically, the non-equivalent control group design was employed. The area of the study was Enugu State, Nigeria. The sample size was 83 Mathematics teachers consisting of 41 male and 42 female teachers using a purposive sampling technique. The instrument that was used to collect data for the study was Mathematics Test item Writing Skills Rating Scale (MTIWSRS). MTIWSRS was a 15-item five-point rating scale of Excellent = 5, very good = 4, good = 3, poor = 2 and very poor = 1. It was face-validated by two experts from Measurement and Evaluation and one in the Mathematics Education unit of the Science Education Department, Faculty of Education, University of Nigeria Nsukka (UNN). The teachers were observed and rated by seven (7) experts using MTIWSRS. The internal consistency of MTIWSRS was determined using Cronbach Alpha and a reliability coefficient of 0.83 was obtained. In this study, cognitive drill therapy was done in face-to-face interaction. The teachers in the CDT group were first asked to relax by taking deep breaths. When they felt relaxed and calm, participants were asked to imagine themselves in the challenged situation in Mathematics. At this point, the drill of what to do (item writing skills) was presented to them. The teachers began the sessions, by imagining a particular situation and repeating the drill statement severally, then a pause of 20-30 seconds or larger was given before resuming. The therapy continued from the application of the drill statement until the fear of writing good items diminished. This session of CDT lasted from 45 minutes to more. In the present study, CDT intervention was carried out in two centres. Teachers were also given CDT homework to repeat drill statements twice a day, and they were encouraged to use cognitive drill therapy when they felt uncomfortable or stressed. The training lasted for eight weeks. Before the commencement of the treatment, MTIWSRS was administered as a pretest and after the treatment, it was again administered as a posttest. The data collected were analyzed using SPSS, and the research question was answered with mean and standard deviation. The hypotheses were tested at 0.05 level of significance using Analysis of Covariance (ANCOVA). The pre-test scores were used as covariates for the post-test scores.

3. Results

The result presented in Table 1 shows the pretest and posttest mean rating of Mathematics Teachers' test item writing skills scores for Cognitive Drill Therapy and lecture method. The result showed that the CDT group had a pretest mean score of ($\bar{x}$ = 25.86, SD = 4.17) and a posttest mean score of ($\bar{x}$ = 48.34, SD = 3.12). The mean difference was 22.48. The result also showed that the LM group had a pretest mean score of ($\bar{x}$ = 25.97, SD = 5.41) and a posttest mean score of ($\bar{x}$ = 31.38, SD = 3.64) with a mean difference of 5.67. The result reveals that the CDT group had a higher mean gain in Mathematics item writing skills than their LM counterparts.

Table 1. Mean and Standard deviation of ACT and CT groups

		Pretest		Posttest		
Treatment	**N**	$\bar{x}$	**SD**	$\bar{x}$	**SD**	**Mean Difference**
CDT Group	44	25.86	4.17	48.34	3.12	22.48
LM Group	39	25.97	5.41	31.38	3.64	5.67

CDT = Cognitive Drill Therapy; LM = Lecture Method

The result presented in Table 2 shows the pretest and posttest mean rating of Mathematics Teachers' test item writing skills scores for 5-years & below and 6-years & above. The result showed that the 5-year & below group had a pretest mean score of ($\bar{x}$ = 25.05, SD = 4.13) and a posttest mean score of ($\bar{x}$ = 40.06, SD = 8.34). The mean difference was 15.10. The result also showed that the 6-years & above group had a pretest mean score of ($\bar{x}$ = 26.85, SD = 5.25) and a posttest mean score of ($\bar{x}$ = 40.70, SD = 10.04) with a mean difference of 13.85. The result reveals that the 5-years & below group had a slightly higher mean gain in Mathematics item writing skills than their 6-years & above counterparts.

Table 2. Mean and Standard deviation of 5-years & below and 6-years & above

		Pretest		Posttest		
Experience	**N**	$\bar{x}$	**SD**	$\bar{x}$	**SD**	**Mean Difference**
5-years & below	43	25.05	4.13	40.06	8.34	15.10
6-years & above	40	26.85	5.25	40.70	10.04	13.85

The result presented in Table 3 shows the mean rating of males and females in Mathematics Teachers' test item writing skills. The result showed that the male teachers had a pretest mean score of ($\bar{x}$ = 25.92, SD = 5.48) and a posttest mean score of ($\bar{x}$ = 39.12, SD = 9.04). The mean difference was 13.20. The result also showed that the female group had a pretest mean of ($\bar{x}$ = 25.90, SD = 4.00) and a posttest mean score of ($\bar{x}$ = 41.59, SD = 9.19) with a mean difference of 15.59. The result reveals that the female group had a slightly higher mean gain in Mathematics item writing skills than their male counterparts.

Table 3. Mean and Standard deviation of male and female groups

		Pretest		Posttest		
Gender	**N**	$\bar{x}$	**SD**	$\bar{x}$	**SD**	**Mean Difference**
Male	41	25.92	5.48	39.12	9.04	13.20
Female	42	25.90	4.00	41.59	9.19	15.59

The result in Table 4, shows that the main effect due to treatment was significant (F = 504.23, ρ = 0.00 and η_p^2 = 0.872), the main effect due to experience was not significant (F = 1.10, ρ = 0.298 and η_p^2 = 0.02), the main effect due to gender was not significant (F = 0.97, ρ = 0.756 and η_p^2 = 0.001), the interaction effect for treatments and experience was not significant (F = 3.930, ρ = 0.051 and η_p^2 = 0.05) and the interaction effect for treatments and gender was equally not significant (F = 1.396, ρ = 0.241 and η_p^2 = 0.019). This implies that there is a significant difference in the mean rating of Mathematics Teachers' test item writing Skills scores when exposed to Cognitive Drill Therapy and lecture method in favor of the CDT group.

The partial eta square, η_p^2 (effect size) of 0.875 means that 87.2 % of the increase in the mean test item writing Skills values of Mathematics Teachers was due to the effect of training they received.

Table 4. ANCOVA result on item writing Skills for CDT and LM groups

Source	**Type III Sum of Squares**	**df**	**Mean Square**	**F**	**Sig.**	**Partial Eta Squared**	**Dec**
Corrected Model	6023.460[a]	8	752.932	66.175	.000	.877	
Intercept	3773.659	1	3773.659	331.66	.000	.818	
PreIWS	.147	1	.147	.013	.910	.000	
Groups	5737.084	1	5737.084	504.23	.000	.872	S
Experience	12.512	1	12.512	1.100	.298	.015	NS
Gender	1.108	1	1.108	.097	.756	.001	NS
Groups * Experience	44.718	1	44.718	3.930	.051	.050	NS
Groups * Gender	15.889	1	15.889	1.396	.241	.019	NS
Experience * Gender	3.015	1	3.015	.265	.608	.004	NS
Groups * Experience * Gender	5.146	1	5.146	.452	.503	.006	NS
Error	841.962	74	11.378				
Total	142157.000	83					
Corrected Total	6865.422	82					

a. R Squared = .877 (Adjusted R Squared = .864)

4. Discussion

It was found that CDT and LM significantly enhanced the test item writing skills of Mathematics teachers in favour of the CDT group. The findings revealed that 87.2 % of the increase in the mean test item writing values of secondary school teachers was due to the effect of the training they received. Consequently, teachers of the secondary schools who participated in the training have gained skills on how to write good items in mathematics. The teacher went through a well-organized training which was targeted at developing their skills in item writing and the outcome was encouraging. These results collaborated with OECD (2009) position on improving teachers' effectiveness in raising learners' achievement by involving them in activities that aim to develop their individual skills, knowledge, expertise, and other characteristics. Developing teachers' skills in item writing has positive effects on students' learning outcomes and achievement (Loyalka, Popova, Li, & Shi, 2018). The findings in this research complement previous research that focused on test item writing or test construction. The finding is in consonant with Ede, et al, (2021) who reported that cognitive behavioral active engagement training was efficacious in the improvement of test items construction skills among primary school teachers in Nigeria, and giving professional mentorship skills fostered the growth of novice educators' item writing abilities (Turner, 2019). Thus, the use of CDT was potent in helping Mathematics teachers to write the stem of the item using verbs to present problems, write questions without irrelevant information, avoid writing questions that will test reading skills more than content knowledge in mathematics, and arrange items in order of difficulty among other skills.

Other findings of the study were the removal of differences due to experiences and gender. It was found that there was no significant gender-related difference among teachers after being exposed to CDT. The main effect due to experience was not significant and the interaction effect for treatments and gender was equally not significant. Although variations were observed in mean scores based on experience and gender, the values were not substantial for significant differences. This means that the therapy was able to remove the gender gap as well as experience differences observed by other researchers. This result may have been influence by the fact that both male and female teachers took the training seriously. Also, the novice teachers were conscious of their involvement in training with more experienced teachers who may have been mentoring their professional growth and as such, were at their best. This finding negates the report that female teachers were less likely to perceive themselves as proficient in test item writing skills compared to their male counterparts (Brown, 2017). The finding was in accord with the report that years of experience do not make any significant difference in teachers' knowledge of test construction procedures (Adodo, 2014) and also not in tandem with the assertion that test construction skills of teachers are inadequate, especially those with few years of teaching experience (Ebinye, 2011) and worse for non-professional teachers (Ololube, 2008). The inadequacies of teachers in test construction that were earlier observed by researchers may be due to the use of inappropriate training programmes employed in developing them.

Overall, the result is indicative that Mathematics teachers who participated in the study have acquired new knowledge, skills, and value; can display change in behaviors in writing quality test items and use what they have learnt to impact positively on the schools resulting in a better outcome. They can be hired by individuals, schools, states, commissions, as well examination bodies to participate in quality test item writing whenever the need arises. Through this research, an aspect of human development in Nigeria has been resolved.

Conclusion

Cognitive drill therapy as well as the lecture method enhanced Mathematics teachers item writing skills in Enugu state. CDT and LM were good training programmes for Mathematics teachers, but CDT was a better and more effective way of developing Mathematics teachers' item writing skills.

Recommendations/Future directions: Cognitive drill therapy (CDT) is potent in enhancing Mathematics teachers' item writing skills and is appropriate for teachers' training. It was therefore recommended that Cognitive drill therapy (CDT) should be used for teachers' professional development. Subsequent studies should focus on the use of CDT to reduce teachers' anxiety associated with item writing and teachers of various subjects be involved. Focusing on teachers of various subjects as participants for future studies will provide researchers with more insight into the potency of CDT in enhancing the item writing skills of teachers.

References

Abdullah, A. H., Mokhtar, M., Noor, D. A., Ali, D. F., Tahir, L. M., Umar, H. & Kohar, A. (2017). Mathematics teachers' level of knowledge and practice on the implementation of higher-order thinking skills (HOTS). *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education 13*(1), 3-17 doi:10.12973/eurasia.2017.00601a

Adodo, S. S. (2014). An evaluation of secondary school teachers' competency in evaluating students' cognitive and psycho- motor achievement in basic science and technology. *Journal of Emerging Trends in Education Research and Policy Studies (JETERAPS), 5*(3), 48-53.

Ali, A. T. & Abdul-Wahab, I. (2022). Enhancing test development and item writing skills of subject and vocational teachers in government-owned junior secondary schools in Jigawa State, Nigeria. *Journal of Teaching and Teacher Education 11*(1), 1-12. http://dx.doi.org/10.12785/jtte/110101

Alkhateeb, M. A. (2019). Assessing eighth-grade mathematics teachers and textbook in embodying thinking levels. *International Journal of Instruction, 12*(1), 371-388.

Anderson, L. (2017). Influence of teachers' years of experience on test item alignment with curriculum. *Journal of Mathematics Education, 32*(2), 145-162.

Arya, B., Verma, S., Kumar, R., & Mishra, R. (2018). Role of cognitive drill therapy in treatment of evaluation anxiety: A case study. *International Journal of Scientific and Research Publications, 8*(5), 297-300. http://dx.doi.org/10.29322/IJSRP.8.5.2018.p7743

Aydın, A., Sarıer, Y., & Uysal, Ş. (2012). The comparative assessment of the results of mathematical literacy in terms of socio-economic and socio-cultural variables. *Education and Science, 37*(164), 20-30.

Aygün, B., Baran-Bulut, D., & İpek, A. S. (2016). The analysis of the primary school mathematics exam questions according to the math taxonomy. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 7*(1), 62-88.

Barak, M. & Dori, Y. J. (2009). Enhancing higher order thinking skills among in-service science teachers via embedded assessment. *Journal of Science Teacher Education, 20*(5), 459-474. doi: 10.1007/s10972-009-9141-z

Brown, A. (2017). Gender differences in mathematics teachers' test item writing skills. *Gender and Education, 25*(4), 523-540.

Çakan, M. (2004). Comparison of elementary and secondary school teachers in terms of their assessment practices and perceptions toward their qualification levels. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences, 37*(2), 99-114. doi:10.1501/Egifak_0000000101

Çalık, B. & Aksu, M. (2018). A systematic review of teachers’ questioning in Turkey between 2000-2018. *Elementary Education Online, 17*(3), 1548-1565. doi:10.17051/ilkonline.2018.466389

Driana, E. & Ernawati, E. (2019). Teachers’ understanding and practices in assessing higher order thinking skills at primary schools. *Journal of Teaching & Education, 1*(2), 110-118. Retrieved from: https://journals.umkt.ac.id/index.php/acitya/article/view/233

Ebinye, P. O. (2001). Problems of testing under the continuous assessment programme. *Journal of Quality Education, 4*(1), 12-19.

Ede, M. O., Agah, J. J., Okeke, C. I., Chuks, Z. O., Oguguo, B. C. E., Agu, P. U., … & Manafa, I. F. (2021). Effect of cognitive behavioral active engagement training on test item construction skills among primary school teachers in Nigeria: implication for educational policymakers. *Medicine*; 100:36(e26876).

Hamafyelto, R. S., Hamman-Tukur, A., & Hamafyelto, S. S. (2015). Assessing teachers` competence in test construction and content validity of teacher-made examination questions in Commerce in Borno State, Nigeria. *Education, 5*(5), 123-128. doi: 10.5923/j.edu.20150505.01

Ibrahim, A. (2018). Improving assessment and evaluation skills of public-school teachers in Jigawa State, Nigeria. *Journal of Education and Practice, 9*(11), 22-32. www.iiste.org

İnceçam, B., Demir, E., & Demir, E. (2018). Competencies of middle school teachers to prepare open-ended items used in open-ended tests for in-classroom assessment. *Elementary Education Online, 17*(4), 1912-1927. doi:10.17051/ilkonline.2019.506900

Johnson, M. A. (2020). Years of experience and the ability to address student misconceptions in test items. *Mathematics Education Quarterly, 50*(4), 320-335.

Kazuko, W. (2018). Assessing teachers' testing skills in ELT and enhancing their professional development through distance learning on the net. *Turkish Online Journal of Distance Education*, *5*(1), 113-125.

Kitchen, H., Bethell, G., Fordham, E., Henderson, K. & Ruochen Li, R. (2019). *OECD Reviews of Evaluation and Assessment in Education: Student Assessment in Turkey*. OECD Reviews of Evaluation and Assessment in Education. Paris: OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/5edc0abe-en.

Kumar, R. (2017). Verbal exposure for irrational fears: New directions in research and applications. *Clinical and Experimental Psychology*. doi:10.4172/2471-2701.1000157

Kumar, R., Sameer, A., & Singh, B. (2012). Preliminary test of cognitive drill as an intervention. *Indian Journal of Clinical Psychology*, *39,* 67-74.

Loyalka, P., Popova, A., Li, G., & Shi, Z. (2018). Does teacher training actually work? Evidence from a large-scale randomized evaluation of a national teacher training program. *Rural Education Action Program (REAP), Working Paper 330.* Retrieved from: https://fsi-live.s3.us-west-1.amazonaws.com/s3fs-public/does_teacher_training_work.pdf

Martinez, E. K. (2018). Reflective practice and test item writing: the role of experience. assessment in education: *Principles, Policy & Practice, 35*(1), 56-72.

Nicol, C. (1999). Learning to teach mathematics: Questioning, listening, and responding. *Educational Studies in Mathematics, 37*, 45-66. https://doi.org/10.1023/A:1003451423219

Nworgu, B. G. (2019). *Educational measurement and evaluation theory and practice* (Revised 2nd Edition). Nsukka: University Trust Publishers.

Ololube, N. P. (2008). Evaluation competencies of professional and non-professional teachers in Nigeria. *Studies in Educational Evaluation*, *34*(1), 44-51.

OECD (2009). Creating effective teaching and learning environments: First results from TALIS Retrieved from: http://www.oecd.org/education/school/43023606.pdf

OECD (2016). *PISA 2015 results (Vol I): Excellence and equity in education.* Paris: PISA, OECD Publishing. Retrieved from: http://dx.doi.org/10.1787/9789264266490-en

OECD (2018). *Bridging the digital gender divide includes, upskill, innovative*. Retrieved from https://www.oecd.org/digital/bridging-the-digital-gender-divide.pdf

OECD (2019). *TALIS 2018 results (Vol I): Teachers and school leaders as lifelong learners,* TALIS, Paris: OECD Publishing. Retrieved from: https://doi.org/10.1787/1d0bc92a-en.

Paudel, T. (2020). Gender issue in teaching and learning mathematics. Conference Paper: Lecture at Tribhuvan University and M Phil Scholar of Kathmandu University.

Quansah, F., Amoako, I., & Ankomah, F. (2019). Teachers' test construction skills in senior high schools in Ghana: Document analysis. *International Journal of Assessment Tools in Education*, *6*(1), 1-8.

Reardon, S. F., & Ho, A. D. (2015). Practical issues in estimating achievement gaps from coarsened data. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, *40*(2), 158–189.

Reardon, S. F., Kalogrides, D., Fahle, E. M., Podolsky, A. & Zárate, R. C. (2018). The relationship between test item format and gender achievement gaps on math and ELA tests in fourth and eight grades. *Educational Researcher, 47*(5), 284–294. doi: 10.3102/0013189X18762105

Sahin, A. & Kulm, G. (2008). Sixth grades mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(3), 221-241. doi:10.1007/s10857-008-9071-2

Şata, M. (2016). Türk Eğitim Sistemi'nde Sınıf İçi ile Geniş Ölçekli Ölçme ve Değerlendirmeye Genel bir Bakış. *Current Research in Education, 2*(1), 53-60.

Scheiber, C., Reynolds, M. R., Hajovsky, D. B., & Kaufman, A. S. (2015). Gender differences in achievement in a large, nationally representative sample of children and adolescents. *Psychology in the Schools, 52*(4), 335-348. doi: 10.1002/pits.21827

Sebastian M. A. (2020). Classification of test items written by mathematics pre-service teachers. *Philippines International Electronic Journal of Mathematics Education 15* (2), em0577. https://doi.org/10.29333/iejme/7599

Sharma, N. (2015). *Professional development of teacher*. New Delhi Publishers.

Smith, J. (2019). The impact of teachers' experience on item construction expertise. *Educational Assessment, 45*(3), 210-225.

Smith, L. B. (2020). Unpacking gender bias in mathematics teachers' test item writing. *Educational Psychology Review, 42*(3), 310-325.

Stiggins, R.J., Griswold, M. M., & Wikelund, K. R. (1989). Measuring thinking skills through classroom assessment. *Journal of Educational Measurement, 26*, 233-246.

Thompson, T. (2008). Mathematics teachers' interpretation of higher-order thinking in Bloom's taxonomy. *International Electronic Journal of Mathematics Education 3*(2), 96-109.

Turner, S. L. (2019). Role of experienced teachers in nurturing item writing skills. *Professional Development in Education, 47*(3), 421-438.

UNDP. (2006). *Nepal: Readings in human development.* Pulchowk, Kathmandu: United Nations Development Program.

Verma, S., Kumar, R., Arya, B., & Kandhari, N. (2016). Treatment of multiple phobias through cognitive drill technique. *International Conference of Indian Academy of Health Psychology*. Gautam Buddha University, Greater Noida.

Williams, R. D. (2021). Evolution of test item writing strategies with experience: Adapting to changing practices. *Teaching and Teacher Education, 55*, 102-115.

ROZŠÍRENÁ REALITA VO VOĽNOČASOVEJ MATEMATICKEJ EDUKÁCII OČAMI ŠTUDENTOV PREDPRIMÁRNEJ A PRIMÁRNEJ PEDAGOGIKY

Jakub LIPTÁK[1]
[1]Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)
jakub.liptak@unipo.sk

Abstrakt

Jednou zo súčasne často diskutovaných digitálnych technológií vo vzdelávaní je rozšírená realita (AR). Článok sumarizuje základné charakteristiky rozšírenej reality a aspekty jej inkorporácie do edukačných aktivít. Následne je prieskumná časť venovaná znalostiam a postojom študentov predškolskej a primárnej pedagogiky vzhľadom na rozšírenú realitu. Výsledky poukazujú na nízku mieru znalostí participantov o rozšírenej realite, no naznačujú ich záujem o používanie tejto technológie v rámci edukačného procesu. Preferencia používania rozšírenej reality v rámci matematických činností je však determinovaná jej pozitívami a negatívami, z ktorých sú v článku vyextrahované tie najčastejšie z pohľadu študentov predprimárneho a primárnej pedagogiky.

Kľúčové slová: rozšírená realita, učitelia v profesijnej príprave, klady a zápory AR

AUGMENTED REALITY IN LEISURE TIME MATH ACTIVITIES THROUGH LENSES OF PRESCHOOL AND PRIMARY PEDAGOGY STUDENTS

Abstract

Augmented reality (AR) is one of the widely discussed digital technologies in education. The paper presents the basic properties of augmented reality and aspects related to incorporating augmented reality into educational activities. The exploratory part of the paper inquires about the knowledge and beliefs of pre-service preschool and primary school teachers about augmented reality. The results indicate a low understanding of augmented reality; however, they suggest their interest in using it in educational activities based on specific criteria. Those criteria stem from what the pre-service teachers deem as positive and negative factors of using augmented reality. The paper lists the most common factors obtained from the inquiry process.

Keywords: augmented reality, pre-service teachers, cons and pros of AR

1. Úvod

Neustála modernizácia a technologický pokrok sa v dnešnej dobe premieta do každodenného života jedincov. Za príčinu implementovania stále technologicky dokonalejších technológií do každodenných činností jedincov možno hľadať dôvody ako automatizácia, časová a energetická úspora, dostupnosť, globalizácia, trhový mechanizmus a podobne. Digitálne technológie si tak vydobyli miesto aj v edukačnej realite. Používanie digitálnych technológií v edukácií sa môže uplatniť pri sprostredkovávaní informácií, pri samotnom oboznamovaní žiakov s danými technológiami, pri hodnotení úrovne znalostí žiakov a podobne.

Jednou z digitálnych technológií, ktoré sa v súčasnosti stávajú bežnou súčasťou každodennej reality, a teda ich inkorporácia do edukačného procesu je viac než žiadaná, je technológia rozšírenej reality (angl. *augmented reality* - *AR*). Pojem rozšírená realita sa vzťahuje k vizuálnym technológiám schopným kombinovať alebo prelínať grafické, symbolické, alebo alfanumerické informácie s obrazovým vnímaním sveta konkrétneho jedinca (Aukstakalnis, 2017, s. 2).

Azuma (1997) pokladá za základné charakteristiky rozšírenej reality schopnosť kombinovať reálne a virtuálne podnety, uchytenie virtuálneho modelu do stanoveného reálneho priestoru a interaktivitu v reálnom čase. Po technickej stránke tak technológia rozšírenej reality musí pozostávať z niekoľkých komponentov.

Virtuálny model predstavuje naprogramovaný objekt, o ktorý je realita rozšírená. Tento model je uložený v databáze konkrétnej aplikácie, ktorá môže fungovať on-line alebo off-line (Hnatová, 2021). Virtuálny model je vizualizovaný na základe registračného podnetu pomocou konkrétneho vizuálneho zariadenia. Tento podnet (marker) môže byť vo forme 3D objektu, textu, obrázka, QR kódu alebo ľudskej tváre (Hnatová & Hnat, 2019a). K samotnej vizualizácii pritom dochádza prostredníctvom digitálneho zariadenia, ktoré je buď pripevnené na hlave používateľa (napr. okuliare), alebo držané v rukách (napr. tablet, smartfón). Aby bol vizuálny model interaktívny v zmysle reagovania na zmenu polohy a pohybu používateľa, technológia musí poskytovať funkciu sledovania polohy a pohybu používateľa, resp. používaného zariadenia. Interaktivitu pritom možno chápať ako pripravenosť technológie zmeniť projekciu na základe priestorovej pozície používateľa (Schmalstieg & Höllerer, 2016).

2. Rozšírená realita v edukačnej sfére

Používanie digitálnych technológií v edukačnom procese môže byť faktorom, ktorý nastoľuje priaznivé učebné prostredie pre žiakov aj učiteľa, zvyšuje kvalitu učebného procesu a pomáha žiakom porozumieť základným konceptom súvisiacim s informačno-technologickou gramotnosťou (Hendrayana & Wahyudin, 2018). To možno konkretizovať aj v prípade používania rozšírenej reality.

Rozšírená realita môže pôsobiť na žiakov ako motivačný prvok (Chang & Hwang, 2018; Ibanez et al., 2020), a to aj na základe vysokej úrovne počítačovej grafiky, ktorá je v dnešnej dobe v niektorých prípadoch len ťažko rozlíšiteľná od „reálneho" obrazu (Schmalstieg & Höllerer, 2016). Používanie rozšírenej reality tak môže zvýšiť pozornosť žiakov (Bressler & Bodzin, 2013; Gün & Atasoy, 2017), čo môže následne vyústiť do kvalitnejšieho edukačného procesu.

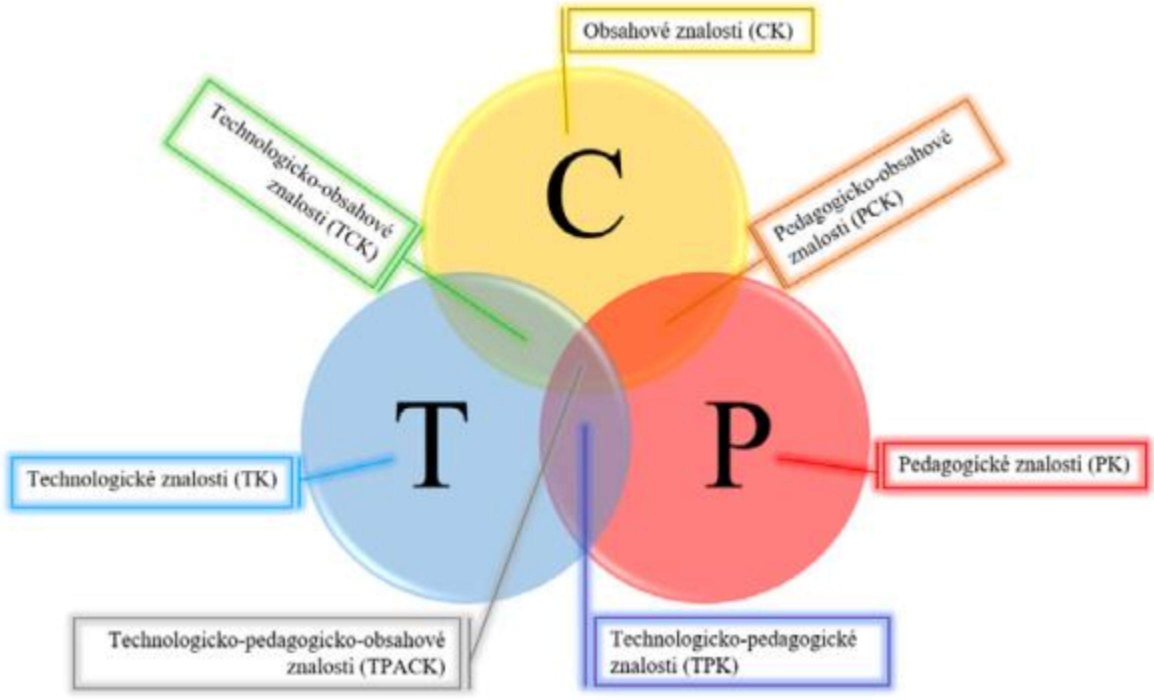
Medzi konkrétne výhody používania rozšírenej reality vo vyučovaní matematiky možno zaradiť pozitívny vplyv na úroveň žiackej predstavivosti, resp. schopnosti mentálnej vizualizácie (Hnatová, 2022; Lin et al., 2013). Následne, zlepšená schopnosť žiakov mentálne vizualizovať môže prispieť k lepšiemu porozumeniu napr. základných vlastností priestorových geometrických útvarov (Cantürk Günhan, 2014; Gunčaga & Žilková, 2019; Ibili et al., 2019). V spojení s vizualizáciou, celkovo sa javí viac zmysluplné využívanie rozšírenej reality pri vyučovaní takých edukačných celkov, ktorých súčasťou sú vizuálne koncepty. Vo vyučovaní matematiky sa tak rozšírená realita ponúka najmä pre činnosti spojené s geometrickými konceptami.

Aj keď implementácia rozšírenej reality v rámci edukácie sa zdá byť jednoduchšie v prípade nácviku alebo zdokonaľovania pohybových činností v porovnaní s učením sa teoretických poznatkov (Aukstakalnis, 2017, s. 300), možno pozorovať istý potenciál rozšírenej reality aj pre túto oblasť. Keďže rozšírená realita ponúka pre žiakov vizuálne podnety, možno predpokladať jej pozitívny vplyv pre lepšie porozumenie abstraktných konceptov (Akçayır et al., 2016), ktorými matematika prekypuje.

V súvislosti s učením sa abstraktných konceptov a Brunerovou teóriou módov učenia (1966), technológiu rozšírenej reality možno zaradiť do skupiny nástrojov, ktorými možno koncepty skúmať na ikonickej a z časti enaktívnej úrovni (nedochádza k fyzickému kontaktu, avšak manipulácia pomocou používaného zariadenia nie je vylúčená). Prídavková (2022) tieto modely nazýva enaktívnymi v digitalizovanej forme.

Samotné využívanie digitálnych inovácií v edukácii nie je zárukou dosahovanie lepších učebných výsledkov (Aukstakalnis, 2017, s. 309). Ak sú aktivity využívajúce rozšírenú realitu nevhodne navrhnuté, ich inkorporácia do vyučovania síce môžu u žiakov zvýšiť záujem o samotnú činnosť, avšak takáto aktivita môže u žiakov spôsobiť stratu pozornosti od podstatného, a tým nemusí smerovať k želanému edukačnému cieľu (Aukstakalnis, 2017, s. 309).

Digitálne technológie možno považovať za nástroj pre posilnenie pedagogického potenciálu konkrétneho učiteľa (Toyoma, 2015). Hnatová & Hnat (2019b) hovoria o rozšírenej realite ako o pomocnom nástroji, pomocou ktorého možno vizualizovať materiál, fixovať poznanie žiakov o danom koncepte, alebo hodnotiť úroveň žiackeho poznania. Predpokladom efektívneho využívania rozšírenej reality v rámci edukácie je tak schopnosť učiteľa pracovať s danou technológiou. Požiadavky kladené na učiteľa, ktorý využíva digitálne technológie v rámci edukácii možno generalizovať modelom TPAC (Harris, Mishra, & Koehler, 2009). Tento model v sebe integruje tri hlavné komponenty, a to učiteľove znalosti obsahu (angl. *content knowledge*), pedagogické znalosti (angl. *pedagogical knowledge*) a technologické znalosti (angl. *technological knowledge*). Vyučovací proces, v ktorom učiteľ používa digitálne technológie možno považovať za efektívny nielen ak jeho znalosti jednotlivých komponentov sú na optimálnej úrovni, ale ak dochádza aj k ich prelínaniu (pozri obr. 1).



Obrázok 1. Schematické znázornenie modelu TPACK (Hnatová, 2022)

V súlade s vyššie uvedeným je teda efektívnosť využívania rozšírenej reality vo vyučovaní determinovaná, okrem iného, technologickými znalosťami samotného edukátora.

ISSN 2694-8133

3. Metodológia

Cieľom prieskumu bolo zmapovať skúsenosti, pripravenosť a postoje študentov pripravujúcich sa na povolanie pedagóga pre predprimárne a primárne vzdelávanie ohľadom používania rozšírenej reality v rámci voľnočasovej matematickej edukácie. Výskumný súbor pozostával z 85 študentov druhého ročníka bakalárskeho štúdia študujúcich na Pedagogickej fakulte Prešovskej univerzity v Prešove (ďalej participanti). Participanti boli vybraní na základe dostupnosti klastrovým výberom. V rámci prieskumu sme sa zamerali na zodpovedanie týchto otázok:

1. Nakoľko sú participanti oboznámení s technológiou rozšírenej reality?
2. Ako hodnotia participanti svoju pripravenosť využívať digitálne technológie v edukácii?
3. Aký je záujem participantov o využívanie rozšírenej reality v matematickej edukácii?
4. Čo považujú participanti za silné a slabé stránky využívania rozšírenej reality v rámci matematických aktivít?

Na zodpovedanie týchto otázok sme sa rozhodli použiť metódu dotazník a posudzovaciu škálu. Na zodpovedanie prvej otázky sme sa participantov položili otázku „Čo je rozšírená realita?“. Za správnu definíciu, resp. popis sme pritom považovali takú, ktorá sa v zhoduje s vyššie uvedenou charakteristikou v znakoch ako kombinácia reálneho a digitálneho, potreba snímacieho zariadenia, virtuálna vizualizácia a pod.

Na zodpovedanie tretej a štvrtej otázky participantmi sme ich prvotne potrebovali oboznámiť s technológiou rozšírenej reality. Participantom sme predstavili aplikáciu MathAR – Kockové stavby, prostredníctvom ktorej mali možnosť si vyskúšať živú interakciu s virtuálnymi kockovými stavbami. Dĺžka tejto interakcie bola po dobu 30 minút, pričom každý participant buď priamo pracoval s danou aplikáciou alebo bol v pozícii pozorovateľa.

Na zodpovedanie druhej otázky sme pre participantov priamo formulovali tvrdenie „*Doterajšie vzdelávanie ma dostatočne pripravilo na prácu s digitálnymi technológiami v edukačnom procese*“ a nechali ich o jeho správnosti rozhodnúť pomocou sedem bodovej Likertovej škály s krajnými možnosťami úplne súhlasím (1) a úplne nesúhlasím (7). Dané tvrdenie im bolo predložené po interakcii s rozšírenou realitou.

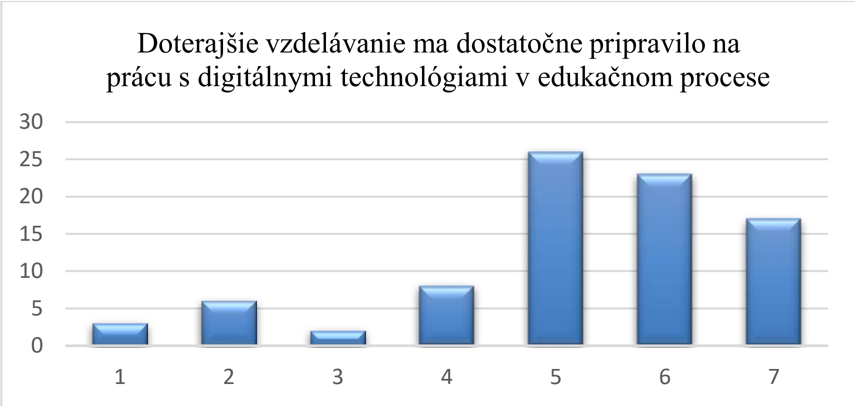
Na zodpovedanie tretej otázky bolo následne participantom sformulované tvrdenie „*Prezentovanú aplikáciu využívajúcu rozšírenú realitu chcem v budúcnosti využiť pri práci so žiakmi*“, o ktorého pravdivosti mali rozhodnúť pomocou sedem bodovej Likertovej škály s krajnými možnosťami úplne súhlasím (1) a úplne nesúhlasím (7).

Na zodpovedanie štvrtej otázky sme nechali participantom vypísať výhody a nevýhody používania rozšírenej reality v edukácii pri použití metódy brainstormingu. Odpovede boli zaznamenané formou pero-papier.

4. Výsledky

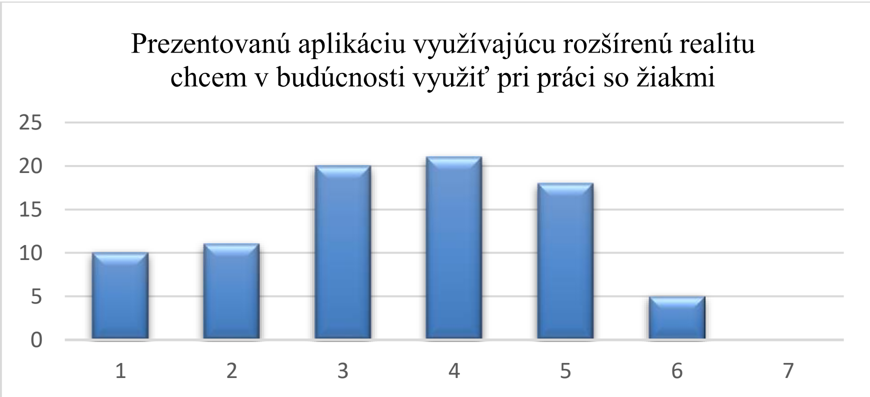
Prieskum ukázal, že rozšírená realita je pre študentov predprimárnej a primárnej pedagogiky doposiaľ nepoznanou technológiou, nakoľko ani jeden z participantov ju nedokázal správne charakterizovať. Tento fakt vopred napovedá o úrovni pripravenosti participantov používať digitálne technológie, čo bolo predmetom druhej výskumnej otázky.

Získané odpovede na druhú položenú otázku možno charakterizovať strednou hodnotou súboru 5,18 a jeho smerodajnou odchýlkou 1,59, čo poukazuje na prevahu nízkeho pocitu pripravenosti participantov používať digitálne technológie v edukačnom procese, resp. že ich doterajšie štúdium nedostatočne pripravilo na prácu s digitálnymi technológiami (pozri graf 1).



Graf 1. Názory participantov na vlastnú pripravenosť na prácu s digitálnymi technológiami v edukačnom procese

Získané odpovede na tretiu položenú otázku možno charakterizovať strednou hodnotou súboru 3,48 a jeho smerodajnou odchýlkou 1,41, čo poukazuje na ambivalentný vzťah participantov voči prezentovanej aplikácii založenej na rozšírenej realite (pozri graf 2).



Graf 2. Preferencie participantov voči budúcemu využívaniu aplikácie s rozšírenou realitou

Získané odpovede participantov ohľadom výhod a nevýhod využívania rozšírenej reality vo vyučovaní a voľnočasovej edukácii boli podrobené prvotnej analýze, na základe ktorej boli vyextrahované a syntetizované najčastejšie sa vyskytujúce odpovede (pozri tab. 1).

Tabuľka 1. Výhody a nevýhody AR z pohľadu študentov predškolskej a primárnej pedagogiky

Silné stránky	**Slabé stránky**
- zaujímavá pre žiakov, - zvýšenie pozornosti žiakov, - rozvoj priestorovej predstavivosti, - rozvíjanie IKT zručností, - možnosť použitia aj z domu.	- absencia reálnej manipulácie, - rozptýlenie inými mobilnými aplikáciami, - zníženie kognitívnej záťaže žiakov, - v súčasnosti nedostatočná technická podpora (zariadenia, Wi-Fi, ...), - nedostupnosť pre všetkých.

5. Diskusia

Technológia rozšírenej reality v súčasnosti začína prenikať do všetkých sfér bežného života. Preto je adekvátne o nej uvažovať aj ako jednom z možných edukačných prostriedkov. Realizovaný prieskum na vzorke študentov predprimárnej a primárnej pedagogiky ukázal, že napriek súčasnej všeobecnej rozšírenosti AR technológie majú budúci učitelia veľmi limitované skúsenosti a vedomosti o AR. Možno sa nazdávať, že z časti ide o neznalosť pojmu „rozšírená realita“, nakoľko samotná AR je súčasťou mnohých mobilných aplikácií, ktoré sú využívané generáciou mladých ľudí. Vo všeobecnosti tak možno tvrdiť, že s AR sa mnohí jej používatelia stretávajú bez formálneho školenia o tejto technológii. Tým pádom ich poznanie zostáva fixované na konkrétne aplikácie bez širšieho poznania technológie a jej ďalších možností. Z toho vyplýva potreba neustáleho posilňovania formálneho vzdelávania v IKT, čo súvisí s aplikovaním výsledkov súčasného výskumu poukazujúcich na potrebu integrácie digitálnych technológií do edukačného procesu (Müller, Begović & Baumgärtner 2018; Neumajer, 2014). V rámci prípravy budúcich pedagógov sa to môže odzrkadliť aj inkorporovaním rozličných aplikácií využívajúcich rozšírenú realitu v rámci ich profesijnej prípravy, špeciálne so zameraním na matematickú edukáciu.

V rámci prieskumu bola participantom predstavená jedna špecifická aplikácia pracujúca s kockovými stavbami. Z toho možno dedukovať, že ochota participantov využívať túto aplikáciu je podmienená viacerými faktormi viazanými na kvalitu aplikácie a edukačných aktivít s ňou spätých. Samotná aplikácia nie je špecifikovaná pre konkrétne činnosti, a tak ponúka používateľom širší záber použitia, čo možno vnímať pozitívne v zmysle voľnosti, avšak aj negatívne v zmysle potreby vytvárania vlastných návrhov aktivít. Získané výsledky tak nemožno zovšeobecniť pre využívanie rozšírenej reality ako takej, nakoľko realizovaná intervencia neponúkla participantom dostatočný záber na hĺbkové oboznámenie sa s využitím rozšírenej reality v rámci matematickej edukácie. Na druhej strane však získané výsledky nepoukazujú na negatívne tendencie participantov voči rozšírenej realite, čo možno považovať za pozitívum v zmysle ochoty využívať aplikácie podporené AR technológiou spĺňajúce určité kvalitatívne požiadavky.

Preferencia využívať rozšírenú realitu v rámci matematickej edukácie pedagógom je podmienená ako kvalitou samotnej aplikácie a jej zameraním, tak aj subjektívnymi a objektívnymi faktormi súvisiacimi s praktickým využívania AR technológie. Niektoré z týchto faktorov boli identifikované v rámci nášho prieskumu. Tieto faktory nadväzujú a dopĺňajú predošlé zistenia z danej oblasti (napr. Hnatová & Hnat, 2019a).

6. Záver

Inkorporácia rozšírenej reality do matematickej edukácie je súčasný fenomén, ktorý potrebuje dostatočnú mieru pozornosti ako pedagogických výskumníkov, tak aj učiteľov z praxe. Príspevok bol venovaný analýze prvotných skúseností budúcich učiteľov predprimárneho a primárneho stupňa vzdelávania s touto technológiou. Získané výsledky poukazujú na potrebu častejšieho využívania rozšírenej reality v rámci edukačných aktivít, čo môže mať za následok zlepšenie digitálnych kompetencií pedagógov a žiakov. Navyše, v prípade optimálneho prostriedku (aplikácie) využívajúceho rozšírenú realitu možno predpovedať rozvíjanie korešpondujúcich matematických znalostí žiakov. Kľúčom k úspechu je teda kvalitný edukačný prostriedok (aplikácia), adekvátne technické vybavenie v rámci konkrétneho edukačného priestoru a adekvátne pedagogicko-technologicko-obsahové znalosti pedagóga.

Acknowledgements

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA 036PU-4/2021 *Technológia rozšírenej reality v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov elementaristov* riešeného na PF PU v Prešove.

Literatúra

Akçayir, M., Akçayir, G., Pektas, H. M., & Ocak, M. A. (2016). Augmented reality in science laboratories: The effects of augmented reality on university students' laboratory skills and attitudes toward science laboratories. *Computers and Education, 57,* 334-342. https://doi.org/f795v9

Aukstakalnis, S. (2017). *Practical Augmented Reality: A Guide to the Technologies, Applications, and Human Factors for AR and VR.* Addison-Wesley. ISBN 978-0-13-409423-6

Azuma, R. T. (1997). A survey of augmented reality. *Teleoperators and Virtual Environments 6*(4), 355-385. https://doi.org/gc2hkv

Bressler, D. M., & Bodzin, A. M. (2013). A Mixed Methods Assessment of Students' Flow Experiences during a Mobile Augmented Reality Science Game. *Journal of Computer Assisted Learning*, *29*(6), 505-517. https://doi.org/10.1111/jcal.12008

Bruner, J. S., (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge: Harvard University Press.

Cantürk Günhan, B. (2014). An Investıgatıon of Pre-Servıce Elementary School Teachers' Knowledge Concernıng Quadrilaterals. *Cukurova University Faculty of Education Journal*, *43*(2), 137-154. https://doi.org/10.14812/CUFEJ.2014.017

Chang, S. C., & Hwang, G. J. (2018). Impacts of an Augmented Reality-Based Flipped Learning Guiding Approach on Students' Scientific Project Performance and Perceptions. *Computers & Education*, *125*, 226-239. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.06.007

Gün, E. T., & Atasoy, B. (2017). The effects of augmented reality elementary school students' spatial ability and academic achievement. *Education and Science*, *42*(191), 31-51. https://doi.org/gn4m

Gunčaga, J., & Žilková, K. (2019). Visualisation as a method for the development of the term rectangle for pupils in primary school. *European Journal of Contemporary Education*, *8*(1), 52-68. https://doi.org/gn4k

Harris, J., Mishra, P., & Koehler, M. (2009). Teachers' technological pedagogical content knowledge and learning activity types: curriculum-based technology integration reframed. *Journal of Research on Technology in Education*, *41*(4), 393-416. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ844273.pdf

Hendrayana, A. & Wahyudin. (2018). Mobile learning to improve mathematics teachers' mathematical competencies. *Journal of Physics: Conference Series, 948*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/948/1/012049

Hnatová, J., Hnat, A. (2019a). Swot analýza zaradenia technológie rozšírenej reality do vzdelávania. In: *Między teorią pedagogiczną a praktyką edukacyjną. Annales Pedagogicae Nova Sandes – Presoves VIII.* (s. 75-83). Nowy Sacz, Poľsko.

Hnatová, J., Hnat, A. (2019b). Rozšírená realita vo vzdelávaní. In: *Osvita i suspiľstvo IV. Mižnarodnyj zbirnyk naukovych prac*. (s. 100-108). Opole (Polsko): Vidavnictvo Vyššoj technickoj školy v Katovice.

Hnatová, J. (2021). Výhody a úskalia inkorporácie „nových" digitálnych technológií do matematickej edukácie. *Elementary Mathematics Education Journal*, *3*(1), 15-24. http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol3No1/Vol3No1_Hnatova.pdf

Hnatová, J. (2022). Vzájomné prieniky technologických, matematických a pedagogických znalostí pri implementácii technológie rozšírenej reality do výučby študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie. *Elementary Mathematics Education Journal*, *4*(1), 13-25. http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol4No1/Vol4No1_Hnatova.pdf

Ibáñez, M. B., Portillo, A. U., Cabada, R. Z., Barrón, M. L., (2020). Impact of augmented reality technology on academic achievement and motivation of students from public and private Mexican schools. A case study in a middle-school geometry course, *Computers & Education, 145*. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103734.

Ibili, E., Çat, M., Resnyansky, D., Şahin & Billinghurst, M. (2019). An assessment of geometry teaching supported with augmented reality teaching materials to enhance students' 3D geometry thinking skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(2), 224-246. https://doi.org/ghpqdn

Lin, H. C. K., Chen, M. C., & Chang, C. K. (2013). Assessing the effectiveness of learning solid geometry by using an augmented reality-assisted learning system. *Interactive Learning Environments*, *23*(6), 799-810. https://doi.org/10.1080/10494820.2013.817435

Müller, M., Begović, I., Baumgärtner, R. (2018). Information and communication technologies and teacher education in the new paradigms of higher education. *Croatian Review of Economic, Business and Social Statistics*, *4*(1), 27-41. https://doi.org/10.2478/crebss-2018-0003

Neumajer, O. (2014). *Inovativní výukové aktivity pro rozvoj dovedností pro 21. století*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. https://ondrej.neumajer.cz/wp-content/uploads/2016/08/Inovativni-vyukove-aktivity-pro-rozvoj-dovednosti-pro-21.-stoleti.pdf

Prídavková, A. (2022). Technológia rozšírenej reality a rozvoj matematických schopností. *Elementary Mathematics Education Journal*, *4*(1), 53-63. http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol4No1/Vol4No1_Pridavkova.pdf

Schmalstieg, D., & Höllerer, T. (2016). *Augmented Reality: Principles and Practice*. Boston: Addison-Wesley.

Toyoma, K. (2015). Technology won't fix America's neediest schools. It makes bad education worse. *Washington Post*. https://www.washingtonpost.com/posteverything/wp/2015/06/04/technology-wont-fix-americas-neediest-schools-it-makes-bad-education-worse/

RIEŠENIE ROVNÍC V PRÍPRAVE UČITEĽOV ELEMENTARISTOV

Marek MOKRIŠ[1], Edita ŠIMČÍKOVÁ[1], Blanka TOMKOVÁ[1]
[1]Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovensko)
marek.mokris@unipo.sk, edita.simcikova@unipo.sk, blanka.tomkova@unipo.sk

Abstrakt

Jednou z oblastí v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov je aj problematika výrokových foriem a jej súčasťou je riešenie lineárnych rovníc s jednou neznámou. Tieto koncepty majú svoj odraz aj vo vyučovaní matematiky na primárnom stupni vzdelávania. V príspevku charakterizujeme metodiku riešenia lineárnych rovníc a predstavujeme stratégie uplatniteľné v primárnom vzdelávaní. V rámci pregraduálnej prípravy učiteľov elementaristov je uvedená problematika zaradená do dvoch vyučovacích predmetov. Pri analýze preferovaných metód riešenia lineárnych rovníc boli skúmanou vzorkou študenti PF PU v Prešove. V rámci profesijnej prípravy mali možnosť uplatniť technológiu rozšírenej reality ako prostriedok riešenia lineárnych rovníc. Výsledky meraní sú súčasťou príspevku.

Kľúčové slová: výroková forma, lineárna rovnica, primárne vzdelávanie, stratégie riešenia rovníc, rozšírená realita

SOLVING EQUATIONS IN THE TRAINING OF ELEMENTARY TEACHERS

Abstract

One of the areas of professional mathematical training of future teachers is the issue of predicate logic and solving linear equations with one unknown. These concepts are included in the teaching of mathematics at the primary level of education. In the paper, we characterize the methodology of solving linear equations in primary education. As part of the undergraduate training of elementary school teachers, this issue is included in two teaching subjects. In the analysis of preferred methods of solving linear equations, the studied sample was the students of PF PU in Prešov. As part of their professional training, they had the opportunity to apply augmented reality technology in solving linear equations. The results of the observations are included in the paper.

Keywords: predicate logic, linear equation, primary education, strategies for solving equations, augmented reality

1. Úvod

Pojem rovnica je počas matematickej prípravy žiakov a študentov prezentovaný ako rovnosť dvoch funkcií, zápis vyjadrujúci rovnosť dvoch algebrických výrazov s premennou, alebo ako typ výrokovej formy. Formálna definícia pojmu rovnica je totožná s predstavou uplatňovanou od matematickej prípravy na strednej škole. Vychádza z pojmu funkcia a tvrdí, že ak máme dve lineárne funkcie $f(x)$ a $g(x)$ definované na množine D, potom rovnosť $f(x) = g(x)$, ktorá vyžaduje nájdenie všetkých takých $x \in D$ vyhovujúcich tejto rovnosti, sa nazýva lineárnou rovnicou s neznámou x.

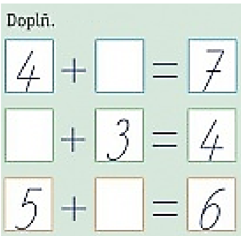
Funkciu *f(x)* nazývame ľavá strana rovnice a funkciu *g(x)* pravá strana rovnice. Množinu *D* označujeme ako definičný obor rovnice a *x* je premenná – neznáma, ktorej hodnotu je potrebné určiť. Predstava rovnice ako rovnosti dvoch algebrických výrazov s danou premennou je zaradená do matematického učiva na druhom stupni základnej školy.

Rovnica ako výroková forma s istou premennou – neznámou je súčasťou matematickej prípravy žiakov na prvom stupni základnej školy. Úlohou je nájsť konštantu – číslo, ktoré danú výrokovú formu *V(x)*, vyjadrenú v podobe rovnosti, zmení na pravdivý výrok. Metóda riešenia rovnice pre žiakov v primárnom vzdelávaní nie je určená. Kurikulárny dokument (*Inovovaný štátny vzdelávací program: Matematika – primárne vzdelávanie*, 2015) uvádza len požiadavku, aby žiak daného ročníka (v danom číselnom obore v množine prirodzených čísel) vedel na propedeutickej úrovni vyriešiť jednoduché rovnice na sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie.

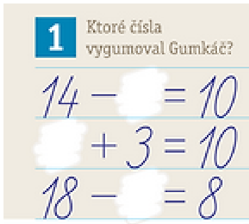
2. Rovnice v primárnej edukácii

Úlohy na riešenie rovníc sú v učebných zdrojoch súčasťou tém zameraných na operácie sčítania a odčítania prirodzených čísel v danom obore (od 1. ročníka ZŠ) a násobenia a delenia prirodzených čísel v obore do 100 (od 3. ročníka ZŠ). Pojem rovnica a neznáma sa v pojmovom aparáte žiaka nevyskytuje a nepoužíva ho v matematickej komunikácii so žiakom ani učiteľ. Reprezentantmi premennej (neznámej) v rovnici na prvom stupni základnej školy sú rôzne symboly, ktoré sú primerané danej vekovej kategórii, alebo rovnice predstavujú iné typy úloh. Ukážky uvádzame z aktuálne dostupných učebných zdrojov[1] pre prvý ročník základnej školy:

Rovnice s jednou neznámou, kde neznámu predstavuje prázdny štvorček (Obrázok 1), gumovanec (Obrázok 2), hviezdička (Obrázok 3):



Obrázok 1. (Zdroj: Belic & Striežovská, 2015, s. 50)



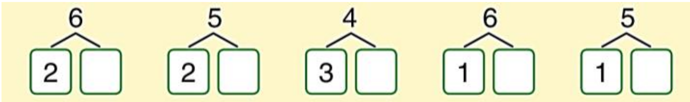
Obrázok 2. (Zdroj: Repáš & Jančiarová, 2020, s. 15)

Obrázok 3. (Zdroj: Berová et al., 2017a, s. 34)

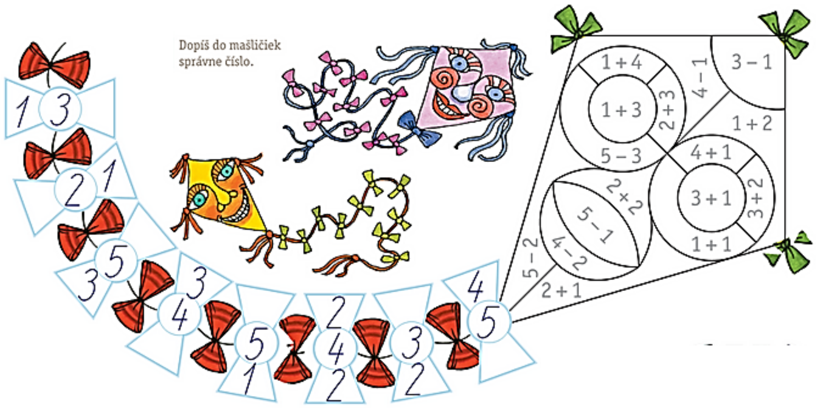
Ukážky úloh zameraných na riešenie rovníc, kde žiak nevidí matematickú operáciu, ale pri riešení je aplikovaný rozklad čísel (Obrázok 4 - Obrázok 6):

[1] Skúmanými boli učebné texty schválené pre vyučovanie matematiky na primárnom stupni vzdelávania na Slovensku.

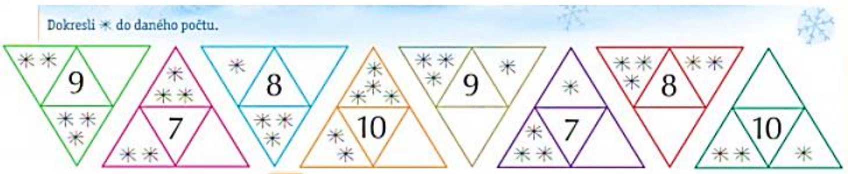
ISSN 2694-8133



Obrázok 4. (Zdroj: Berová et al., 2017a, s. 34)

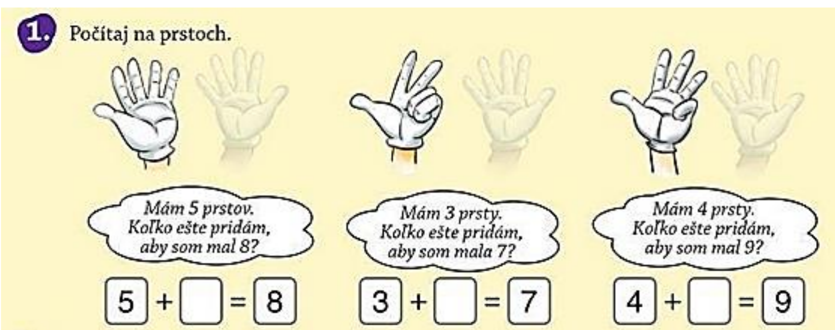


Obrázok 5. (Zdroj: Repáš & Jančiarová, 2020, s. 15)

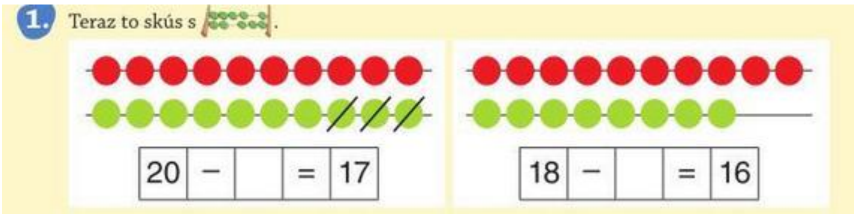


Obrázok 6. (Zdroj: Belic & Striežovská, 2015b, s. 3)

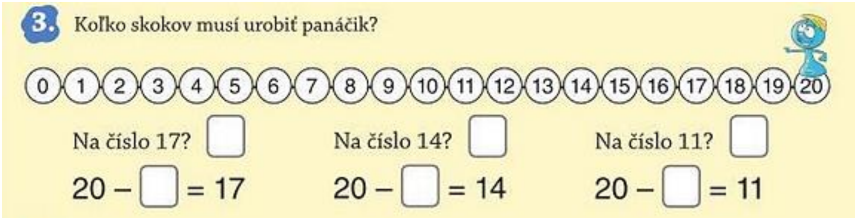
Žiaci tieto typy úloh (Obrázok 1- Obrázok 3) riešia dopočítavaním (Obrázok 1, Obrázok 3) alebo postupným odčítaním čísla (Obrázok 2). Stratégia pokus – omyl je využívaná zväčša na podnet učiteľa. Rovnice zadané cez rozklad čísel žiaci riešia buď dopočítaním alebo využitím automatického spoja v číselnom obore do 6, prípadne do 10 (Obrázok 4, Obrázok 5). Využitie inverznej operácie v procese riešenia rovníc žiakom primárnej edukácie nie je prirodzené. Učiteľ by mal žiakom ponechať priestor na samostatné objavovanie vhodnej stratégie, ale mal by im vedieť ponúknuť aj ďalšie postupy umožňujúce nájsť neznáme číslo, aby si mohli zvoliť ten, ktorý im pri riešení úlohy najviac vyhovuje. Učebné zdroje žiakom zväčša priamo neponúkajú metódy riešenia rovníc. Výnimkou sú učebné texty pre 2. ročník autorov Černek & Bednářová (2018) a pracovné zošity pre 1. ročník autorov Berová et al. (2017).



Obrázok 7. (Zdroj: Berová et al., 2017a, s. 15)



Obrázok 8. (Zdroj: Berová et al., 2017b, s. 25)



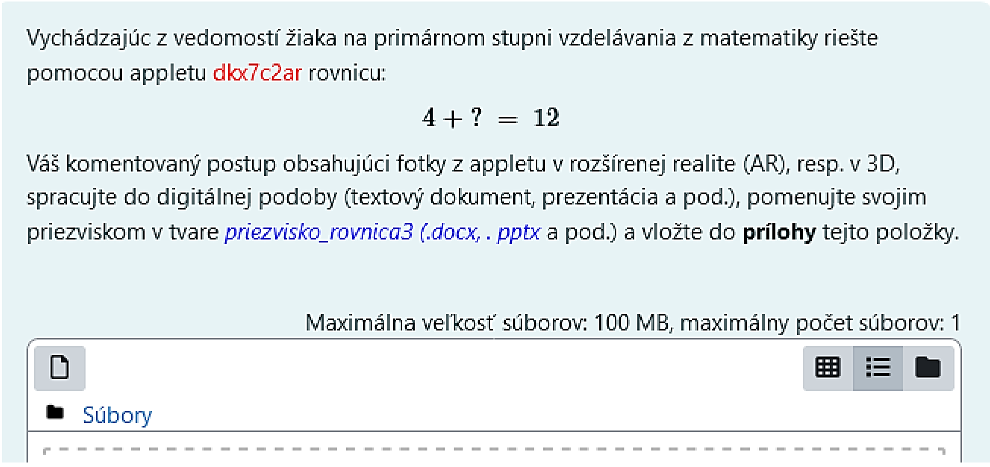
Obrázok 9. (Zdroj: Berová et al., 2017b, s. 24)

So stratégiou pokus – omyl (Obrázok 10) sa stretneme len v pracovnom zošite pre 2. ročník (Černek & Bednářová, 2018), ktorý ale nie je súčasťou žiadneho uceleného setu učebných materiálov pre 1. stupeň ZŠ a nemá nadväznosť na ďalšie ročníky.

Obrázok 10. (Zdroj: Černek & Bednářová, 2018, s. 45)

3. Postupy riešenia rovníc – výsledky meraní

Problematika riešenia rovníc využitím rôznych stratégií je súčasťou vysokoškolskej pregraduálnej prípravy učiteľov pre primárne, resp. predprimárne vzdelávanie, ktoré je realizované v podmienkach Pedagogickej fakulty Prešovskej univerzity v Prešove v bakalárskom aj magisterskom stupni štúdia. V tomto kontexte bol realizovaný výskum, v ktorom bolo zisťované, ako si s problematikou riešenia rovníc poradia študenti 3. ročníka bakalárskeho stupňa vysokoškolského štúdia a aký vplyv na spôsob riešenia bude mať využitie technológie rozšírenej reality (AR). Meranie bolo realizované na vzorke osemdesiatich ôsmich študentov dennej formy bakalárskeho stupňa štúdia v študijnom programe predškolská a elementárna pedagogika. Na zber dát bol aplikovaný nástroj Test v prostredí LMS Moodle v e-kurze Matematika v primárnej edukácii. Realizované boli dve merania. V prvom meraní bolo úlohou študentov riešiť lineárne rovnice takým spôsobom, ktorý by mohli uplatniť žiaci na prvom stupni základnej školy. Riešenie bolo potrebné doplniť metodickým komentárom. V druhom meraní študenti museli pri riešení rovnice použiť nástroje technológie rozšírenej reality. Riešenie úloh však opäť muselo vychádzať z postupov použiteľných na primárnom stupni vzdelávania. Toto meranie bolo realizované až potom, keď študenti získali skúsenosti s prácou s technológiou rozšírenej reality, ktorá predstavuje kombináciu reálneho a virtuálneho prostredia. Technológia rozšírenej reality mala podobu appletu spracovaného v prostredí Geogebra 3D Caculator – kód appletu *dkx7c2ar* (Obrázok 11).

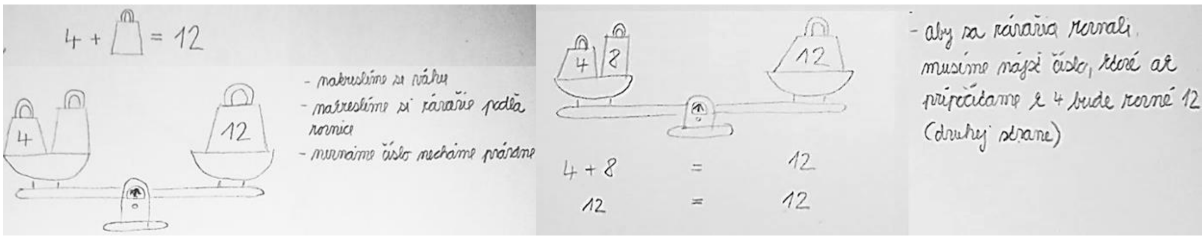


Obrázok 11. Zadanie testovej položky v prostredí Moodle

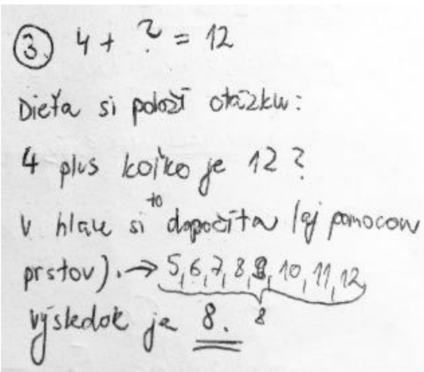
3.1. Riešenie rovnice bez použitia AR

Študenti mali za úlohu vyriešiť lineárnu rovnicu s jednou neznámou typu $a + x = b$. Rovnica bola prezentovaná v tvare $4 + ? = 12$ a postup riešenia rovnice mal reflektovať vedomosti žiakov primárneho stupňa vzdelávania.

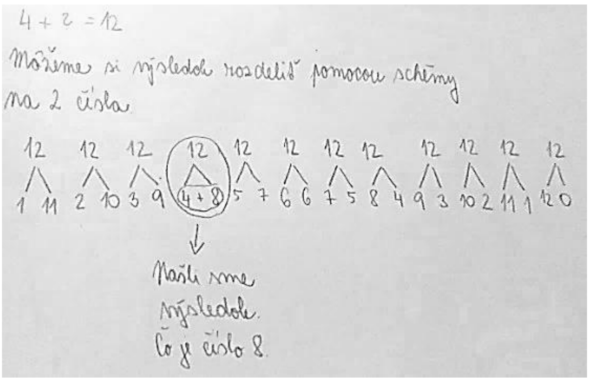
Riešiteľské postupy študentov (Obrázok 12 - Obrázok 18) boli rôznej kvality. Nie vždy zohľadnili požiadavku využitia postupov primeraných schopnostiam žiakov daného veku (Obrázok 17), resp. pri riešení rovnice formulovali slovnú úlohu, čo nemožno považovať za adekvátnu veku primeranú stratégiu (Obrázok 18. Verbalizácia rovnice).



Obrázok 12. Vizualizácia rovnice prostredníctvom obrázka

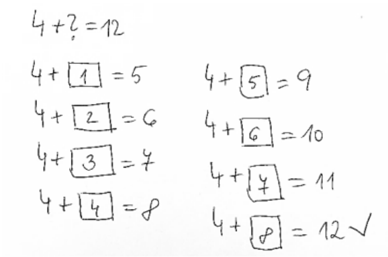


Obrázok 13. Metóda dopočítania

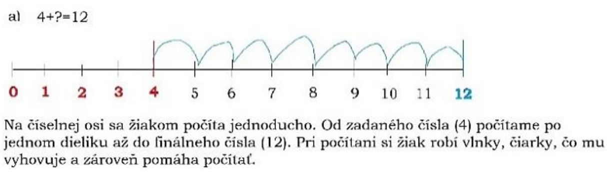


Obrázok 14. Rozklad čísla pri riešení rovnice

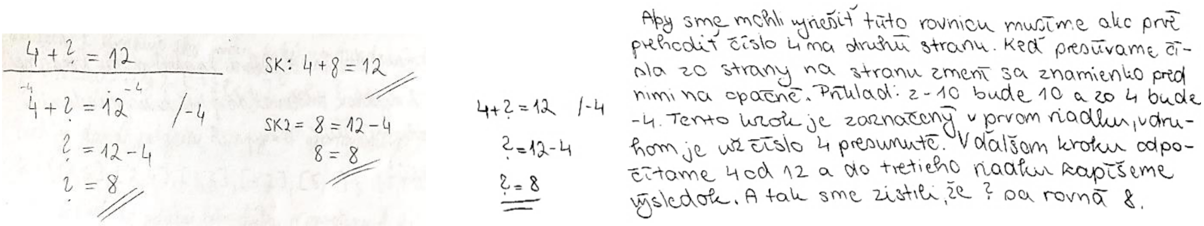
ISSN 2694-8133



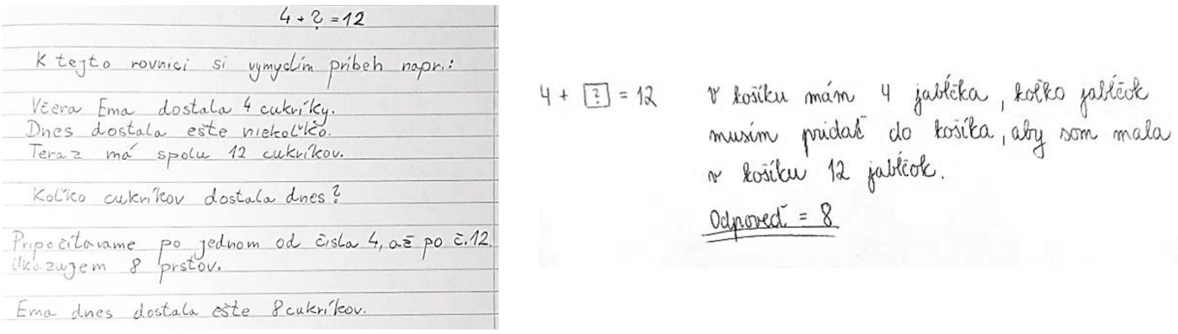
Obrázok 15. Postupné dosadzovanie



Obrázok 16. Riešenie pomocou číselnej osi



Obrázok 17. Aplikácia ekvivalentných úprav

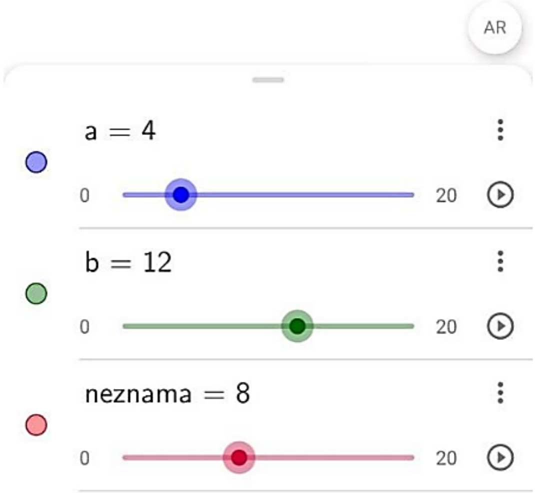


Obrázok 18. Verbalizácia rovnice

3.2. Riešenie rovnice s použitím AR

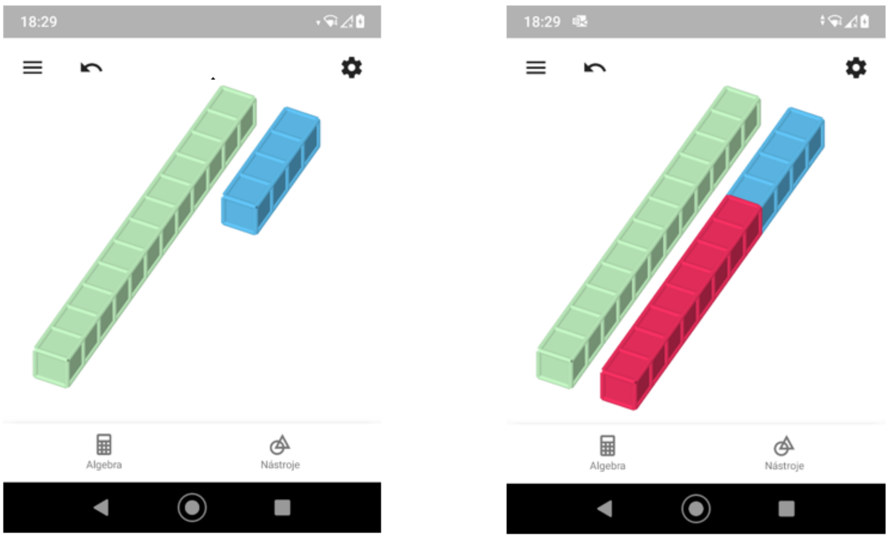
Študenti mali za úlohu vyriešiť opäť lineárnu rovnicu s jednou neznámou typu $a + x = b$. Rovnica bola prezentovaná v rovnakom tvare $4+? = 12$ a postup riešenia rovnice mal reflektovať vedomosti žiakov primárneho stupňa tak, že pri riešení rovnice bolo potrebné využiť vhodný applet (Obrázok 11).

Použitie appletu si vyžadovalo transformáciu rovnice $4 + x = 12$ do appletu v podobe korektných vstupných parametrov appletu (Obrázok 19).



Obrázok 19. Nastavenie vstupných parametrov appletu

Analýza študentských riešení nám poskytla informáciu o aplikovaných postupoch riešenia zadanej rovnice. V tomto kontexte konštatujeme, že s využitím technológie AR sa riešiteľské postupy obmedzili len na postup, ktorý využíval metódu dopočítania (Obrázok 20). Metodický komentár bol zväčša zúžený na popis práce so samotným appletom, čo nemožno považovať za postačujúce. V mnohých prípadoch sa v komentároch objavili aj terminologické nedostatky (štvorec vs. kocka - Obrázok 20). Niektoré didaktické aspekty aplikovanej technológie študenti neobjavili. Medzi ne je možné zaradiť aj použitie metódy postupného dosadzovania, resp. metódy pokus-omyl, ktoré samotný applet ponúkal v podobe vizuálnej spätnej väzby. Čiastkové výsledky riešenej rovnice boli odlíšené odtieňom farby, ktorou bolo prezentované hľadané riešenie.



Na prvom obrázku sú 4 modré štvorce a 12 zelených.
Postupne pridávaj červené štvorce ku modrým až kým nebude zástup červeno-modrých štvorcov rovnako dlhý ako zástup zelených štvorcov. Spočítaj, koľko červených štvorcov si pridal.

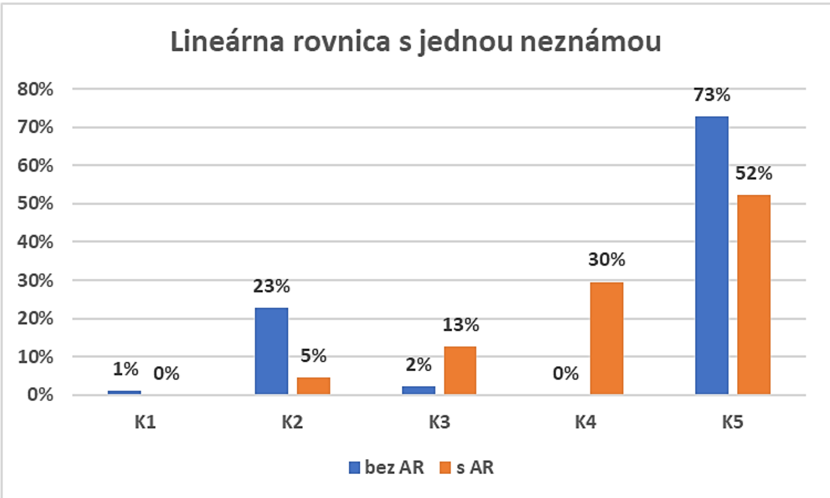
Obrázok 20. Študentské riešenie rovnice s využitím appletu s AR

Riešenia študentov boli podrobené kvalitatívnej analýze a zatriedené do piatich kategórií:

- K1 - neriešená úloha,
- K2 - nesprávne riešená úloha,
- K3 - čiastočne správne riešená úloha,
- K4 - správne vyriešená úloha – bez vhodnej metodiky,
- K5 - správne vyriešená úloha – uplatnená vhodná metodika.

Typ kategórie odrážal dve dimenzie a to korektnosť samotného riešenia problému a vhodnosť zvoleného postupu z pohľadu aplikovateľnosti vo vyučovacom procese na primárnom stupni vzdelávania.

Korektné zvládnutie riešenia zadania v oboch testovaniach vyžadovalo od študentov, okrem teoretických poznatkov súvisiacich s procesom riešenia lineárnej rovnice s jednou neznámou, aj schopnosť rešpektovať poznatky žiakov na prvom stupni základnej školy a k tomu prispôsobiť metodiku riešenia úlohy. Výsledky oboch meraní sú prezentované prostredníctvom nasledujúceho grafu (Obrázok 21), ktorý ukazuje úspešnosť respondentov pri riešení lineárnej rovnice s jednou neznámou.



Obrázok 21. Úspešnosť riešenia lineárnej rovnice s jednou neznámou.

Konštatujeme, že použitie technológie eliminovalo kategóriu K1 – neriešená úloha, tj. všetci respondenti prezentovali svoj prístup k riešeniu zadania. Rovnako je možné tvrdiť, že aplikácia technológie AR priniesla aj nárast počtu správnych riešení bez zohľadnenia metodického postupu (73 % bez AR, 83 % s AR – sledované kategórie K4 a K5, Obrázok 21). Za problematickú oblasť implementácie technológie AR do procesu riešenia rovníc je možné považovať nie vždy vhodné metodické spracovanie úlohy (napr. Obrázok 20). Použitie technológie rozšírenej reality v profesijnej príprave budúcich učiteľov považujú za prínosné aj Hnatová (2022) a Prídavková (2022). V tomto kontexte je potrebné zamerať pozornosť aj na didaktický rozmer začleňovania nových technológií do pregraduálnej prípravy budúcich učiteľov. V súlade s prácou Nocara a Zdráhala (2016) môžeme konštatovať, že nie je možné jednoznačne potvrdiť efektivitu využitia moderných technológií („tradičné versus nové") pri hľadaní postupov riešení matematických úloh.

4. Záver

Aplikácia technológie rozšírenej reality (AR) v podobe appletu spracovaného v prostredí Geogebra 3D Caculator umožnila študentom nájsť riešenie lineárnej rovnice s jednou neznámou s väčšou pravdepodobnosťou, ako bez jej implementácie. Portfólio ponúkaných riešiteľských stratégií je však eliminované len na jeden prístup opierajúci sa o metódu dopočítania. Schopnosť študentov poskytnúť vhodný metodický komentár k riešeniu lineárnej rovnice s jednou neznámou tak, aby bol veku primeraný žiakom mladšieho školského veku, nebola na požadovanej úrovni. Táto oblasť profesijnej prípravy si vyžaduje väčšiu pozornosť.

Acknowledgements

Príspevok je výstupom grantového projektu KEGA 036PU-4/2021 Technológia rozšírenej reality v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov elementaristov.

Literatúra

Belic, M., & Striežovská, J. (2015a). *Matematika pre prvákov – 1. časť* (1. vydanie). AITEC. https://www.aitec.sk/produkt-preview-ng/matematika-pre-prvakov-1-cast-176#flipbook/page-1

Belic, M., & Striežovská, J. (2015b). *Matematika pre prvákov – 2. časť* (1. vydanie). AITEC. https://www.aitec.sk/produkt-preview-ng/matematika-pre-prvakov-2-cast-177#flipbook/page-1

Berová, Z., Bero, P., & Honzová, I. (2017a). *Matematika pre 1. ročník ZŠ - Pracovný zošit 2* (1. vydanie). LiberaTerra. https://studio.liberaterra.sk

Berová, Z., Bero, P., & Honzová, I. (2017b). *Matematika pre 1. ročník ZŠ - Pracovný zošit 3* (1. vydanie). LiberaTerra. https://studio.liberaterra.sk

Černek, P., & Bednářová, S. (2018). *Matematika pre 2. ročník základných škôl – Pracovný zošit 2. časť*. AITEC. https://www.aitec.sk/produkt-preview-ng/matematika-pre-2-rocnik-zs-pracovny-zosit-2-cast--44#flipbook/page-1

Hnatová, J. (2022). Vzájomné prieniky technologických, matematických a pedagogických znalostí pri implementácii technológie rozšírenej reality do výučby študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie. *Elementary Mathematics Education Journal, 4*(1), 13–25.

Inovovaný štátny vzdelávací program: Matematika – primárne vzdelávanie. (2015). Štátny pedagogický ústav. https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf

Nocar, D. & Zdráhal, T. (2016). Efficiency of the dynamic geometry software for self-education on one geometric concept. *Trends in Education*, *9*(1), 198–204. https://doi.org/10.5507/tvv.2016.027

Prídavková, A. (2022). Technológia rozšírenej reality a rozvoj matematických schopností. *Elementary Mathematics Education Journal*, *4*(1), 53–63.

Repáš, V., & Jančiarová, I. (2020). *Matematika 1: 2. diel* (1. vydanie). Orbis Pictus Istropolitana. https://kniznica.orbispictus.sk/matematika-1-2-diel/#1

PROBLÉMY ŽÁKA S DYSLEXIÍ PŘI NÁSOBENÍ A KOMPENZAČNÍ POSTUPY PRO JEJICH REDUKCI

Jitka PANÁČOVÁ[1]
[1]Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
panacova@ped.muni.cz

Abstrakt

Předložená kazuistika pojednává o problémech žáka 5. ročníku při osvojování si operace násobení. Jejím cílem je upozornit na vyskytující se potíže některých žáků se specifickými poruchami učení v matematice, a poukázat na to, jak může být pro ně náročné zvládnout operaci násobení přirozených čísel v oboru malé násobilky. Záměrem této kazuistiky bylo rovněž najít a popsat vhodné strategie, které by žáka více posunuly v jeho výkonu a kompenzovaly stávající potíže při násobení. Jedná se o problematiku z oblasti didaktiky matematiky a uvádíme ji zde do souvislosti se specifickými poruchami učení. Vybraná případová studie ilustrující tuto problematiku by se mohla stát inspirativní a užitečnou pro učitele matematiky, učitele 1. stupně ZŠ, konzultanty v oblasti vzdělávání, ale i pro studenty – budoucí učitele matematiky či rodiče dětí s popsanými potížemi.

Klíčová slova: specifické poruchy učení, násobení přirozených čísel, násobilka, kazuistika

PROBLEMS OF STUDENTS WITH DYSLEXIA IN MULTIPLICATION AND COMPENSATORY PROCEDURES FOR THEIR REDUCTION

Abstract

This case study discusses the problems of a 5th grade student in mastering the operation of multiplication. Its aim is to draw attention to the difficulties encountered by some pupils with specific learning disabilities, and to point out how it can be challenging for them to master the operation of multiplying natural numbers in the area of a small multiplication table. The intention of this case study was also to find and describe suitable strategies that would further advance the pupil in his performance and compensate for the existing difficulties in multiplication. This is an issue from the field of mathematics didactics, and we present it here in connection with specific learning disorders. A selected case study illustrating this issue could become inspiring and useful for mathematics teachers, primary school teachers, consultants in the field of education, but also for students - future mathematics teachers or parents of children with the described difficulties.

Keywords: specific learning disabilities, multiplication of natural numbers, multiplication table, case study.

1. Úvod

Specifické poruchy učení, jejich projevy v matematice a doporučené kompenzační postupy vedoucí k nápravě jsou předmětem zájmu řady monografií a odborných článků mnoha pedagogických výzkumníků.

V České republice sledujeme tyto specifické poruchy učení, které se vzájemně prolínají, ovlivňují a mají často negativní dopad na výkony žáka v matematice: dyslexie, dygrafie, dysortografie, dyskalkulie, dysmúzie, dyspinxie a dyspraxie. Ve své pedagogické praxi jsem měla možnost se setkat se skupinou žáků, u kterých byla diagnostikována dyslexie a dysortografie. Všimla jsem si, že pro některé žáky s těmito poruchami učení byla v matematice hlavním problémem operace násobení přirozených čísel včetně osvojení si pamětných spojů malé násobilky. Vybraná případová studie v tomto článku upozorňuje na náročnost zvládnutí této operace u žáka s uvedenými poruchami a popisuje provedené kompenzační postupy zaměřené na zmírnění těchto potíží. Domnívám se, že tento text by mohl být užitečný nejen pro učitele a poradenstké pracovníky ve školství, ale i pro rozvíjející se oblast pedagogiky, kterou představuje tzv. „doučování“.

2. Operace násobení a kroky k jejímu zvládnutí u žáků se specifickou poruchou učení

Násobení přirozených čísel je v pořadí třetí operace, s níž se žáci seznamují obvykle ve 2. ročníku základní školy. V principu se jedná o zkrácený způsob sčítání několika sobě rovných sčítanců. Namísto součtu 4 + 4 + 4 + 4 + 4 násobíme 5 · 4. Budínová (2022) a další výzkumníci upozorňují na důležitost toho, aby žáci při vyvozování násobení zaznamenali provázanost operací sčítání a násobení. I bez tohoto poznatku se žáci sice mohou naučit násobilku a využívat ji k řešení úloh na násobení, ale představa založená na provázanosti sčítání a násobení je nepostradatelná, její absence se časem může projevit negativně při řešení dalších úloh. Hejný (2014) říká, že znalost násobení není podstatou matematiky. Podstatou je podle něj vhled do operace, který žák prokáže zpravidla tím, že v zadané situaci rozezná násobení. S tímto názorem se ztotožňuje řada autorů, tj. že znalost násobilky nemá pro žáka valný význam bez opory v pochopení této operace. V návaznosti na to se setkáváme se dvěma přístupy směřujícími k tomu, zda je pro správné řešení úlohy nezbytné zvládnutí procesů, které umožní žákovi rychle získat výsledek, nebo zda stačí představa operace, která je dostačující k poskytnutí správného řešení ale zdlouhavější cestou. V kontextu s tímto Budínová (2022, s. 53) uvádí, že „ve hře je i kognitivní zahlcení dítěte“. V případě, že žákovi chybí automatizované spoje, je pro něj podle Sharmy (2015) náročné orientovat se v nových situacích, jeho mozková kapacita se zahltí samotným výpočtem a nezbývá na promýšlení souvislostí.

V předkládané případové studii budu ilustrovat postup osvojování si násobilky u žáka 5. ročníku s dyslexií a dysortografií, jehož logické schopnosti byly nadprůměrné, ale měl potíže zapamatovat si základní spoje pro násobení, což ho zpomalovalo a limitovalo při různých výpočtech.

Dle Blažkové (2017, s. 91) je „dobrá znalost operace násobení a základních spojů násobilky pro žáky dobrým východiskem pro zvládnutí dalšího učiva, kterým je dělení, dělení se zbytkem, písemné násobení a dělení, počítání se zlomky i praktické využití v aplikačních úlohách“. Zaměříme-li se s ohledem na níže popsanou kazuistiku pouze na operaci násobení, lze konstatovat, že stejně jako ostatní základní operace, bývá u žáků se specifickými poruchami učení (dále jen SPU) zdrojem velkého množství problémů, které se vztahují k pamětnému i písemnému násobení. Pro úspěšné zvládnutí této operace a jejího využívání v dalším učivu i v dalších předmětech zvláště u žáků s SPÚ Blažková (2020) doporučuje respektovat následující faktory:

a) Pochopení významu násobení jako opakovaného sčítání sobě rovných sčítanců, tzn. co se děje s čísly, když se násobí. Pro toto je potřeba, aby byla operace násobení řádně vyvozena (v případě nutnosti i opakovaně) a aby žáci dokázali sami slovně formulovat úlohu vedoucí k danému spoji, například 4 · 5, 7 · 3 apod.

b) Vyvození operace násobení by mělo využívat manipulativní činnost s konkrétními předměty, dramatizaci doplněnou o vhodnou motivační situaci. Vybraná situace by měla být graficky znázoněná pomocí symbolů s doprovázejícím zápisem příkladu.

c) Je zřejmé, že dílčí výpočty písemného algoritmu pro násobení jsou snazší, pokud žáci chápou význam základních spojů a znají je zpaměti. Pokud žák zná pamětné spoje pro násobení, umí je memorovat, ale nechápe jejich význam, může se tento fakt jevit až škodlivým. Často se setkáváme s žáky, kteří se učí malou násobilku bez pochopení, což je nebaví a rychle spoje zapomínají. Tento způsob učení tedy není efektivní. V opačném případě, kdy žák umí násobilku a chápe její význam, je pro něj navazující učivo (písemné násobení, pamětné a písemné dělení, práce se zlomky, učivo o dělitelnosti přirozených čísel, řešení rovnic apod.) snazší. Dle Rendla et al. (2013) nejsou porozumění a dril v žádném jednoznačném vztahu. „Rozhodně neplatí, že při porozumění výkladu není už žádný dril zapotřebí. Stejně tak neodpovídá skutečnosti, že při drilu nedochází k porozumění nebo že mu dril dokonce zabraňuje. Na druhou stranu samotný dril porozumění nijak negarantuje. Je tedy podmínkou nutnou, nikoli však postačující“ (Rendl et al., 2013, s. 144).

d) Nácvik jednotlivých spojů by měl respektovat individuálnost poznávacích procesů každého žáka. Pamětné zvládnutí spojů násobení by se přitom mělo vždy opírat o konkrétní představy. Násobilka by měla být vyučována v malých krocích, ale procvičována neustále. Budínová (2022) doporučuje pro osvojení si a posílení jednotlivých násobilkových spojů propojení příkladů s geometrickým modelem. Žáci mohou pracovat s obdélníkovými schématy, kdy například při výpočtu $4 \cdot 5$ požádáme žáka, aby z korálků poskládal obdélník o daných rozměrech.

e) Při vyvození násobení se doporučuje začínat násobilkami čísel dvou, tří, čtyř, a postupně až do devíti (Blažková, 2017). Není vhodné začínat násobením čísly 1, 0 a 10, přestože interpretují zdánlivě jednoduché případy, neboť nedostatečně ilustrují význam násobení.

f) Důležitý je respekt k osobním strategiím, které žák při výpočtech používá. Pokud si žák vytvoří svůj vlastní postup, který je matematicky správný a lze jej využít obecněji, pak se žákovi ponechá a nevnucuje se mu přístup nabízený učitelem nebo rodičem. Vlastní chybný postup však není možné respektovat.

g) Je výhodné využívat co nejvíce matematických her, didaktických pomůcek a činností, které jsou dětem blízké. Nápomocné je využití učiva v reálných situacích, které žáky zajímají.

h) Důležité je prokázat velkou dávku trpělivosti při práci s dětmi s SPU a každý sebemenší úspěch je třeba ocenit pochvalou.

Při výuce matematiky je třeba dle Blažkové (2020) zvážit míru procedurálních a konceptuálních znalostí žáků, neboť řada z nich, zejména žáci se SPU, potřebuje postupy a doporučení, jak provádět příslušné úkony a jak řešit úlohy, aby dosáhli plánovaného cíle. Osvojením procedurálních znalostí (znalosti týkající se postupů, doporučení, předpisů) můžeme u žáka přispět k osvojení znalostí konceptuálních (vztahy a souvislosti, kategorie a klasifikace, principy a generalizace, teorie, modely, struktury). Akceptovatelný je i opačný postup, kdy porozumění matematickým konceptům podporuje procedurální dovednosti. Jako učitelé matematiky bychom měli mít na paměti, že mnozí žáci začínají chápat vztahy a souvislosti teprve ve chvíli, kdy jejich mozek obsahuje určitou sumu znalostí získaných procedurálně.

Rendl et al. (2013, s. 36) připomíná Hejného (1999, s. 52), který poukazuje „na důležitost proceptuálního transferu, ke kterému dochází ve vědomí žáka, když procesuálně vnímanou situaci (např. násobení) uchopí konceptuálně (triáda čísel ve vzájemných vztazích), nebo konceptuálně vnímanou situaci uchopí procesuálně“. Procedura je tedy důležitá, ale neměla by být příliš mechanická. Představa žákovi umožňuje operaci pochopit a postupně vytvovřit koncept násobení.

3. Časté problémy žáků při osvojování si operace násobení

Během učení se operace násobení mohou mít žáci potíže ve kterékoli jeho fázi. Nemusí chápat význam této operace a neví, co mají s čísly udělat. Mnohdy se objevují problémy při pamětném osvojování spojů v oboru malé násobilky (tedy po spoj $10 \cdot 10$). Mnozí žáci pracují pouze s řadou násobků, které musí při počítání postupně vyjmenovat, a často k tomu používají prsty. Nejasná představa řádu čísla se rovněž projevuje chybně při násobení dvou čísel.

Žáci s oslabenou funkcí paměti mívají problémy s krátkodobou (pracovní) i dlouhodobou pamětí, což se u násobení projevuje. Důležitý je pro ně trénink dlohodobé i krátkodobé paměti. Jak upozorňuje (Budínová, 2022) a jiní výzkumníci, výhodou pro tyto žáky bývá bezpečná znalost nějakého algoritmu, která snižuje kognitivní zatížení, což může uvolnit prostor pro náročnější druhy výpočtu. Na druhé straně Budínová poukazuje, že „pokud je výuka čistě založena na osvojování si rutinních procedur, může to vést k algoritmickému uvažování založenému na povrchních vlastnostech algoritmu a nikoli podstatných vlastnostech operace násobení. Matematické kompetence tak nemusí být rozvíjeny“. (s. 56) Algoritmy jsou důležité a nápomocné, ale výuka by u nich neměla skončit a pozornost by se měla soustředit rovněž na konceptuální porozumění násobení. V souvislosti se žáky s SPU upozorňuje Chinn (2019) na jistou nevýhodu učení se procedurám zpaměti, neboť řadu těchto žáků vede tento přístup k mechanickému zvládnutí úlohy bez sebejistoty a bez potřeby ověřování správnosti výpočtu, co není efektivní.

Specifické chyby u násobení bývají spojeny s písemným algoritmem a mívají návaznost na nestabilizované spoje pro sčítání a násobení nebo jsou důsledkem chybování při zápisu do schématu. Pro eliminaci některých chyb u písemného násobení existují různé reedukační postupy, které mohou být zaměřeny procedurálně a jiné se soustřeďují více na pochopení podstaty operace. Další zdroj chyb může mít kořeny v dysgrafii, kdy žák není schopen zapsat výpočet řádně, čitelně a přehledně.

Blažková (2007; 2017) popisuje některé konkrétní problémy žáků při násobení, které mají návaznost na výše uvedené:

1) Zaměňování operace násobení a zápisu čísla, např. $7 \cdot 7 = 77$ nebo $5 \cdot 8 = 58$.
2) Chybování při vyvození násobení; dominantní je pro žáky jeden činitel, např. $4 \cdot 8 = 4 + 4 + 4 + 4$
3) Nerozlišování mezi rozvojem čísla v desítkové soustavě a násobením, např. $12 \cdot 4 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 18$ nebo $52 \cdot 3 = 50 + 2 \cdot 3 = 56$
4) Učení se základním spojům operací zpaměti bez porozumění. Žák memoruje pamětné spoje pro násobení bez pochopení jejich významu.
5) Používání pouze řady násobků a neschopnost naučit se spoje nezávisle na řadě násobků.
6) Zafixování chybných spojů, např. $6 \cdot 8 = 52$.
7) Záměna operace násobení za sčítání, např. $6 \cdot 3 = 9$.
8) Záměna některých základních spojů pro násobení, např. $6 \cdot 8 = 42$ nebo $9 \cdot 8 = 64$. Nejčastěji se jedná o čísla 42, 48, 54, 56, 63, 64.

4. Didaktická kazuistika – Jakub (5. ročník)

Tato část článku zpracovává případovou studii žáka 5. ročníku (11 let), který vykazuje dlouhodobé problémy s operacemi násobení a dělení přirozených čísel.

Ve svých třech letech Jakub (jméno je smyšlené) poprvé navštívil pedagogicko-psychologickou poradnu (dále jen PPP) z důvodu adaptačních potíží při nástupu do MŠ a s potížemi s udržením pozornosti. Při nástupu do 1. ročníku ZŠ vykazoval Jakub neklid a nesoustředěnost ve školním prostředí, pomalé pracovní tempo a špatně spolupracoval s paní učitelkou. V průběhu školní docházky byl Jakub v PPP diagnostikován jako dyslektik a dysortografik, přičemž tyto poruchy se projevily jeho pomalým a těžkopádným čtením, záměnou či vynecháváním některých písmen při čtení, stálým slabikováním či hláskováním. U písemného projevu byla patrná grafomotorická neobratnost a vysoká chybovost (chyběla diakritika, objevovaly se gramatické chyby a záměna písmen). Problémy spojené s popsanými poruchami učení se dále negativně projevovaly v dalších školních předmětech, tedy i v matematice. PPP doporučila na základě diagnostiky řadu podpůrných opatření a doporučení pro domácí přípravu i pro školní výuku. Proti této skutečnosti Jakub dosahoval nadprůměrných výsledků u zkoušek zaměřených na úroveň slovní zásoby a abstraktního myšlení; jeho rozumové nadání se celkově nacházelo v pásmu vyššího průměru ve prospěch verbálních schopností.

S přihlédnutím ke specifickým poruchám učení se začaly u Jakuba postupně s nástupem do školy objevovat a následně prohlubovat potíže v matematice způsobené dyslexií a dysortografií. Bylo zřejmé, že Jakub v matematice zaostává.

Na začátku 5. ročníku ke mně začal docházet na doučování, jehož cílem bylo zmírnění problémů, které se u něj postupně začaly objevovat při zvládání matematického učiva. Tyto problémy se dle rodičů týkaly převážně operací násobení a dělení přirozených čísel s dopadem na řešení slovních úloh.

Cílem předložené kazuistiky je ilustrovat Jakubovy potíže, které se objevily v souvislosti s operací násobení v oboru malé násobilky, analyzovat příčinu problému dostatečně zvládat toto matematické učivo a na základě toho najít vhodná reedukační cvičení vedoucí k nápravě. Předložený text by mohl být užitečný pro učitele 1. stupně ZŠ, poradce ve vzdělávání a pro individuální práci se žáky s SPU v rámci doučování.

Data pro zpracování případové studie byla sbírána po dobu jednoho roku, v průběhu kterého jsem měla možnost s Jakubem individuálně pracovat. Obsahem datového souboru jsou výpovědi rodičů i samotného Jakuba, jeho školní výkony a slovní projevy a poznámky z intervencí. Hned od začátku individuální práce s Jakubem jsem směřovala k nalezení a analýze oblastí matematického učiva, které mu činily potíže. Na základě předchozí analýzy jsem operativně volila vhodné postupy a reedukační cvičení, u kterých jsem předpokládala případnou nápravu identifikovaných obtíží. Informace pro analýzu celé kazuistiky byly vybrány z tohoto rozsáhlého souboru dat. V roli učitele a výzkumníka bylo mojí snahou pomoci Jakubovi překonat problémy s násobením, které se objevily v důsledku jeho dyslexie a dysortografie.

Z hlediska výzkumného přístupu byla zvolena deskriptivní a instrumentální případová studie (Mareš, 2015). Deskriptivní případová studie se používá „k podrobnému, komplexnímu popisu nějakého jevu reálného života v tom kontextu, v němž se běžně vyskytuje a probíhá" (s. 121). V rovině instrumentální se jedná o případ, kdy „chce výzkumník prozkoumat konkrétní podoby nějakého obecného jevu. Vyhledá jeden nebo několik případů, které tento obecný jev reprezentují, a důkladně je prostuduje" (s. 121). Zkoumaným jevem zde byl problém násobení v oboru malé násobilky u žáka 5. ročníku ZŠ s SPU.

Průběh případové studie jsem strukturovala prostřednictvím Metodiky 3A (Janík et al., 2013; Slavík et al., 2017a; Slavík et al., 2017b), tedy Anotace – Analýza – Alterace.[1]

[1] Tato kazuistika byla již dříve publikována jiným způsobem v Panáčová (2023).

4.1. Anotace

Popis původních potíží

Během intervence proběhla nejdříve diagnostika případných Jakubových potíží v matematice. Při individuální práci s Jakubem jsem se zaměřila nejdříve na to, jak zvládá základní početní operace s přirozenými čísly, přičemž jsem vycházela z metodických řad popsaných v Blažkové (2017). V rámci diagnostiky byly zjištěny následující fenomény:

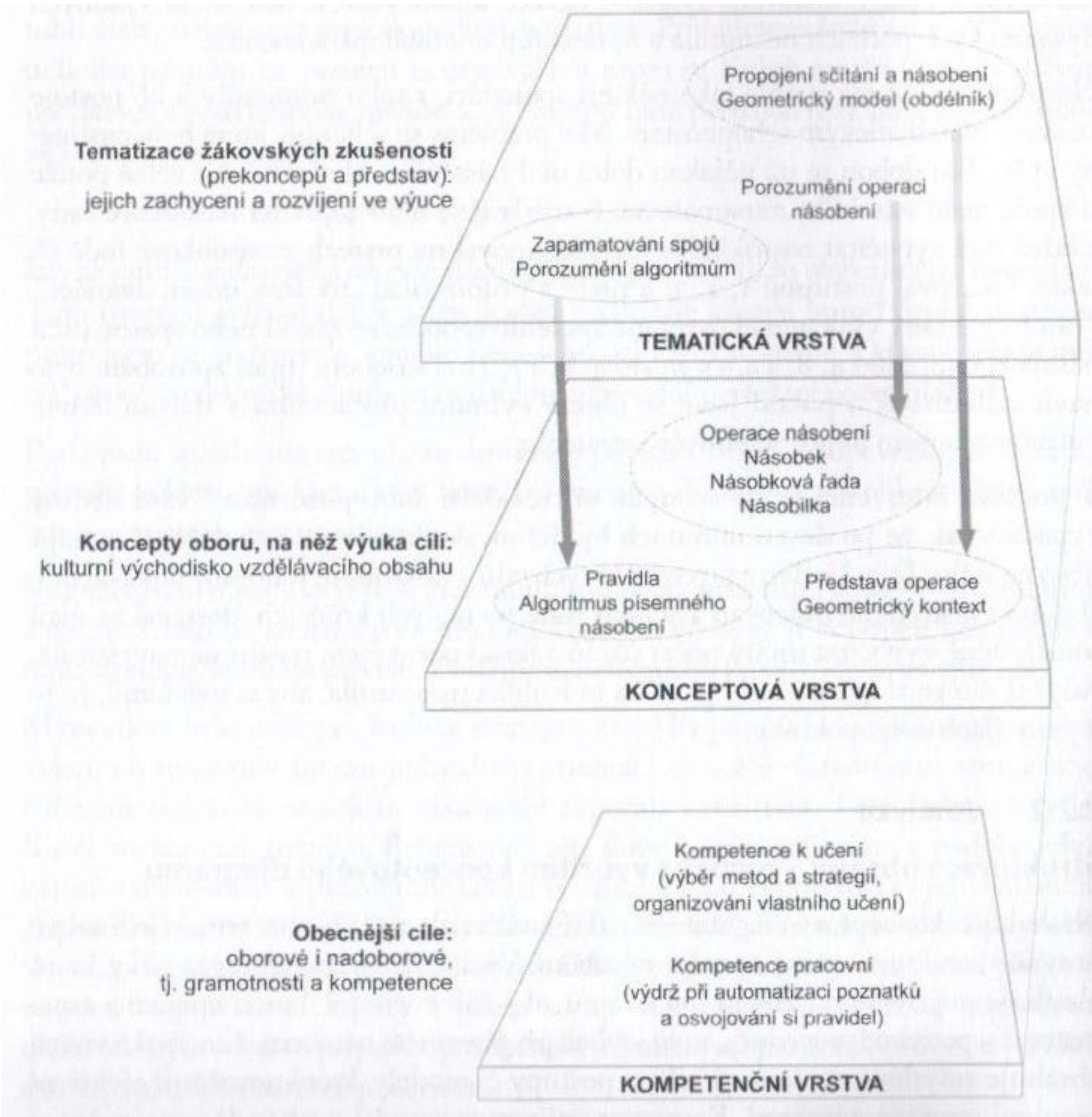
- *Operace sčítání a odčítání přirozených čísel* – v této oblasti nebyly zaznamenány žádné závažné potíže. Jakub chápal význam obou operací, ovládal pamětné sčítání i odčítání přirozených čísel v oboru do 100, ovšem s pomalejším tempem. Rovněž ovládal a správně používal písemný algoritmus pro sčítání i odčítání přirozených čísel i pro vyšší řády. Občas u písemného algoritmu pro sčítání a odčítání chyboval, což však pramenilo z jeho nepřehledného zápisu.
- *Násobení přirozených čísel* – nejprve bylo zjištěno, že Jakub vůbec nechápal podstatu násobení přirozených čísel a netušil, co se s čísly děje, když je násobíme. Nedokázal určit výsledek například úlohy $5 \cdot 3$, ani nebyl schopen si pod tímto symbolickým zápisem cokoli představit. Neznal základní spoje malé násobilky, které tou dobou již řada jeho vrstevníků spolehlivě ovládala. S násobilkou měl možnost se ve výuce matematiky již delší dobu setkávat, ale činilo mu velké potíže si její spoje zapamatovat. Neuměl spolehlivě vyjmenovat číselnou řadu malé násobilky daného čísla. Při vyjmenování násobkové řady postupoval na prstech takto: když měl vypočítat například $5 \cdot 3$, v násobkové řadě tří ukazoval postupně 1, 2, 3, 4, 5 prstů a přitom říkal „tři, šest, devět, dvanáct, patnáct“. Nutno dodat, že jednotlivé násobky této řady vyjmenovával velmi pomalu. Operace násobení se tedy u Jakuba jevila jako velký problém, mimoto se objevily obtíže 5) a 8) popsané Blažkovou (2007; 2017) výše.
- *Dělení přirozených čísel* – problémy s násobením se promítaly i do operace dělení. Jakub zpočátku nechápal význam této operace. Neznalost malé násobilky jej rovněž dále limitovala při řešení úloh na dělení analogicky jako při násobení.

4.2. Analýza

Struktura obsahu – rozbor s využitím konceptového diagramu

Konceptový diagram na obrázku 1 (Slavík et al., 2017b) znázorňuje jednotlivé úrovně a strukturu výuky operace násobení. Výchozí úroveň zde představuje *konceptová vrstva*, která obsahuje pojmy a pravidla nutná k tomu, aby žák pochopil násobení a zapamatoval si potřebné procedury, jejichž využití vrcholí u písemného násobení. *Tematická vrstva* obsahuje smyslové zkušenosti žáka, postupy a modely, které efektivně pomáhají při osvojení operace násobení. *Kompetenční vrstva* se vztahuje v případě osvojování si násobení k pracovním návykům žáka (kompetence pracovní), k jeho píli a vytrvalosti, které mu umožní tuto operaci automatizovat a ovládnout. Kompetenční vrstva také souvisí se schopností žáka vybírat si vhodné metody a strategie a s organizací vlastního učení (kompetence k učení).

Při výuce násobení žák postupně získává celou řadu znalostí a dovedností, ale jejich osvojování může být kognitivně poměrně náročné. Pro pochopení principu operace násobení je nezbytné ji propojovat s předchozí operací sčítání a s násobkovými řadami. Vhodná je zároveň geometrická představa obdélníka. Toto jsou významné pomocné prvky pro pochopení a uchopení této operace. Z mého pohledu je však zároveň žádoucí, aby současně docházelo k pamětnému osvojování malé násobilky. Osvojení si těchto znalostí a dovedností spojených s násobením pak vrcholí ovládnutím algoritmu pro písemné násobení, což vyžaduje navíc další dovednost, kterou je „držení prstů při násobení s přechodem“. Jedná se o komplexní postup, při kterém žák využije krátkodobou i dlouhodobou paměť, což je procedurálně náročné.



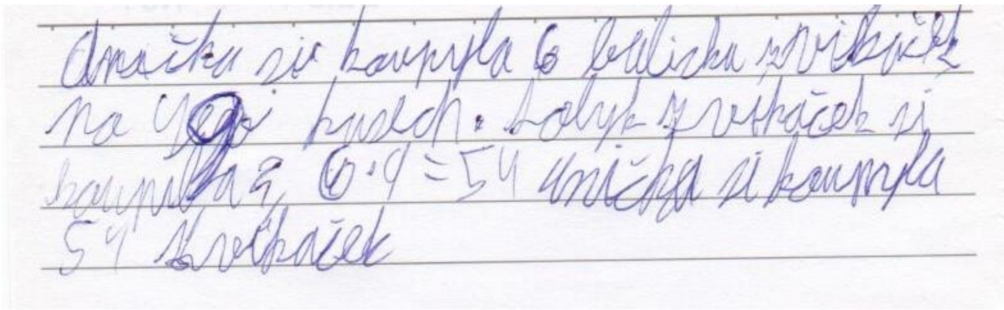
Obrázek 1. Konceptový diagram pro násobení (Budínová, 2022, s. 60)

Tematická vrstva – rozbor problematických situací

Psaní textu bylo pro Jakuba velmi obtížné, jak ilustruje obrázek 2, psal nečitelně a v textu se objevila řada gramatických chyb. Jednoduchou slovní úlohu však spočítal správně, přičemž výpočet psal přímo za text zadání. Řešení úlohy obsahovalo i odpověď. U zápisu čísel se objevovaly stejné potíže jako u psaní textu.

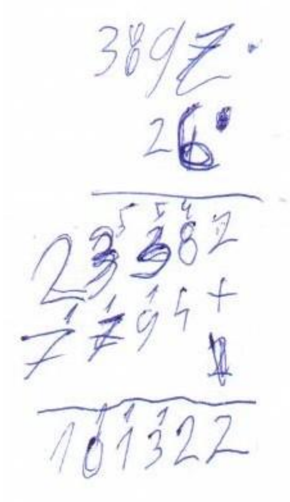
Vzhledem k tomu, že Jakub nechápal podstatu násobení přirozených čísel, bylo potřeba nejdříve důsledně a opakovaně vyvodit operaci násobení a za tímto účelem si naplánovat vhodné aktivity k jejímu pochopení.

Výpočty při násobení byly u Jakuba ovlivněny nestabilizovanými spoji malé násobilky. Bylo nutné pravidelně procvičovat pamětné osvojení násobilkových spojů. Rovněž bylo třeba zapracovat na osvojení si násobkové řady, kterou Jakub nedokázal vždy spolehlivě vyjmenovat a opíral se o ukazování si na prstech, při němž občas chyboval.



Obrázek 2. Problémy při zápisu slovní úlohy

U písemného algoritmu na násobení jsme narazili na potíže, které souvisely s používáním násobkové řady s prsty, která Jakubovi pomáhala při určení spoje malé násobilky. Při určení spoje $7 \cdot 8 = 56$, který nalezl prostřednictvím řady násobků, měl problém „držet si 5 na prstech“. Tuto skutečnost vyřešil tím, že si do zápisu výpočtu napsal malou pětku. Tato strategie byla sice nápomocná při jeho oslabené krátkodobé paměti, ale u výpočtů s vícecifernými činiteli byly zápisy nepřehledné, jak můžeme vidět na obrázku 3.



Obrázek 3. Písemné násobení

Postupně jsme přicházeli na způsoby a aktivity, jak výše popsané nedostatky překonat. Podrobněji jsou tyto kroky dále představeny.

4.3. Alterace

V následujícím textu blíže popisuji postup a volbu aktivit, které byly vybrány pro Jakubovo úspěšné zvládnutí operace násobení. Za tímto účelem jsem volila kroky navržené Blažkovou (2020), shrnuté do faktorů a) – h) popsaných výše v textu. Podrobné návody a reedukační cvičení z publikací Blažkové (2015; 2017) a Blažkové et al. (2007) se rovněž velmi osvědčily, nicméně během intervence bylo důležité respektovat Jakubovu individualitu. Soustředila jsem se zároveň na to, aby pomocí názoru prostřednictvím vybraných aktivit docházelo u Jakuba také ke konceptuálnímu porozumění násobení. Podrobně jsou popsány tři zlepšující alterace.

1) Opakované vyvození operace násobení

V rámci nápravných opatření bylo s Jakubem nejprve opakovaně vyvozeno násobení přirozených čísel na základě sčítání několika sobě rovných sčítanců, při kterém jsem vycházela z dramatizací a z konkrétních, Jakubovi blízkých, situací. Ilustrujme tento postup na následujícím příkladu:

Babička dá každému ze svých čtyř vnoučat tři koláčky. Kolik koláčků dá vnoučatům celkem?

Vnoučata:	A	B	C	D
Koláčky:	○○○	○○○	○○○	○○○

$3 + 3 + 3 + 3 = 12$

$4 \cdot 3 = 12$

Takto pak byly postupně vyvozovány další spoje pro násobení. Byl kladen důraz na podstatu násobení a na to, aby si Jakub uvědomoval, co se s čísly při násobení děje. Jakub se neustále vracel k manipulativním činnostem s konkrétními předměty a zapisoval příslušné pamětné spoje. Zaznamenala jsem, že tyto opakované postupy měly na Jakuba pozitivní dopad. Již během první intervence byl schopen zapsat pamětné násobilkové spoje pro konkrétní situace. Například u úlohy „V ohradě se pase 5 koní, kolik mají dohromady nohou?“ Jakub správně zapsal spoj $5 \cdot 4$.

Navzdory tomu, že po této intervenci si Jakub postupně uvědomoval podstatu násobení a uměl zapsat příslušný spoj pro vybranou situaci, neuměl určit správný výsledek úlohy. Například u předchozí úlohy o koních nedokázal na otázku „Kolik mají dohromady nohou?“ odpovědět, přestože spoj určil správně.

2) Osvojení násobkových řad a jejich přechod k násobilce

Jakubovy znalosti násobení byly omezeny na násobkové řady, kterou však neuměl zcela spolehlivě vyjmenovat. Poté, co si Jakub postupně po první popsané alteraci uvědomoval podstatu násobení, začal objevovat význam násobkové řady. Pro osvojení násobkových řad bylo třeba postupovat pomalu po malých krocích a aktivovat tak krátkodobou paměť. Při opakovaném krátkodobém zapamatování poznatku se zvyšuje pravděpodobnost, že poznatek přejde do dlouhodobé paměti. Jakub si začal postupně osvojovat násobkové řady čísel 2, 3, 4, 5, atd., přičemž byl kladen důraz na jejich opakované procvičování. Oporou pro fixaci řad byla opět manipulativní činnost s konkrétními předměty s využitím geometrického schématu obdélníka. Dalšími aktivitami bylo kroužkování násobků daných čísel ve stovkové tabulce nebo výběr a uspořádání kartiček se zapsanými čísly do násobkové řady.

Přestože je tato strategie (znalost násobkové řady) považována za užitečnou, neboť při jejím využití Jakub prokázal pochopení podstaty operace násobení jakožto opakovaného sčítání, byl při jejím používání velmi pomalý, neboť neustále opakovaně přičítal dané číslo k předcházejícímu násobku s využitím ukazování si na prstech. Bez problémů zpaměti byl schopen vyjmenovat pouze násobkovou řadu čísla 2 a 5.

Ve druhé fázi vyučovacího procesu zaměřeného na osvojení si násobení, jsem se u Jakuba soustředila na pamětné osvojení spojů malé násobilky. I zde bylo nutné postupovat po malých krocích, aby nedocházelo k rychlému zahlcení Jakubovy pracovní paměti. Přechod k pamětnému zvládnutí malé násobilky se i nadále opíral o konkrétní představy. Pracovali jsme vždy s několika vybranými spoji, zpravidla pěti, jak doporučuje Budínová (2022).

Napsala jsem například $5 \cdot 4 = \square$ a k tomu zakreslila ve čtvercové síti obdélník o rozměrech 5×4, do kterého Jakub naskládal příslušný počet knoflíků. V případě, že Jakub neznal výsledek, určil si ho pomocí násobkové řady a zapsal výsledek 20. Poté jsem vedle napsala $4 \cdot 5 = \square$. Jakubova matematická představa byla lepší než jeho schopnost zapamatovat si násobilkové spoje, takže rychle odhalil, že výsledek bude stejný, neboť stačí obdélník jen otočit. Analogicky jsme tento postup opakovali pro spoje $6 \cdot 4$, $7 \cdot 4$, $8 \cdot 4$, $9 \cdot 4$. Poté jsem nechala Jakuba, aby se na tyto příklady díval po dobu půl minuty a následně jsem ho zkoušela. Trvalo mu, než si vzpomněl nebo si nevzpomněl vůbec. Teprve po mnoha pokusech opakování mu některé spoje nabíhaly. Tento postup jsme aplikovali v průběhu jednoho roku na celou malou násobilku.

Pro upevnění násobilkových spojů jsme kromě popsaného modelování násobilky ve čtvercové síti vyžili další aktivity a pomůcky (Blažková, 2017):

- přiřazování kartiček s příklady na násobení ke kartičkám s výsledky,
- vyznačování násobků čísel ve stovkové tabulce,
- deskové hry (pexeso, domino, bingo),
- hra na obchod a nakupování zboží (5 jogurtů po 7 Kč, 6 žvýkaček po 3 Kč, atd.).

Jakub si spolehlivě v průběhu intervence zapamatoval jen některé násobilkové spoje, např. $6 \cdot 4$, $5 \cdot 5$, $6 \cdot 6$, které pro něj byly často oporou pro určení výsledku jiného spoje téže násobkové řady. V některých situacích Jakub využíval komutativity operace násobení, kdy na případu obdélníka popsaném výše, sám odhalil pravidlo, že záměnou činitelů se součin nezmění.

Mnohé spoje byly pro něj problematické, např. $6 \cdot 8$, $8 \cdot 7$, $6 \cdot 7$. Tyto a další spoje nemá Jakub stále osvojené, dodnes je u nich závislý na násobkové řadě s použitím prstů a postupného přičítání téhož činitele.

Neustálé procvičování násobilky, snaha o její zvládnutí a opakující se vyjmenovávání násobkové řady s občasnými chybami pro jakýkoli spoj byly pro Jakuba po celou dobu intervence velmi náročné, odrazující a často vyčerpávající. Tyto skutečnosti korespondují s pohledem Portešové (2011), že žák s dyslexií vykazuje deficit ve schopnosti rychlého vybavování pojmů z dlouhodobé paměti, který, jak se zdá, se u Jakuba projevil právě v oblasti učiva souvisejícího s násobením.

3) Algoritmus písemného násobení

U algoritmu písemného násobení si Jakub rychle osvojil postup a zápis čísel do schématu. V průběhu algoritmu, který vyžaduje znalost pamětného násobení, Jakub počítal v násobkové řadě s použitím prstů. Ukážeme si to na následujícím příkladu:

$$\begin{array}{r} 498 \\ \underline{\cdot \quad 6} \end{array}$$

Jakub zde postupoval následovně: příklad $6 \cdot 8$ počítal na prstech v řadě 8, 16, 24, 32, 40, 48. Sepsal osmičku, měl si držet čtyřku. Aby na ni nezapomněl, zapsal ji v menší velikosti pod šestku do zápisu zadaného příkladu. Dále na prstech počítal $6 \cdot 9 = 54$ a přičetl správně 4. Sepsal osmičku, měl si držet pětku, kterou opět zapsal v menší velikosti pod devítku do zápisu příkladu. Nakonec na prstech určil $6 \cdot 4 = 24$ a přičetl 5. Sepsal dvojku a devítku do zápisu příkladu. Samotnou proceduru písemného násobení tedy Jakub zvládl, přestože v jejím průběhu, kdy se vyžaduje znalost pamětného násobení, počítal v násobkové řadě s použitím prstů. Byl však schopen alespoň tímto způsobem písemně vynásobit i víceciferná čísla a jeho úkolem pro další období bylo stabilizovat spoje malé násobilky a osvojit si pevněji násobkovou řadu.

5. Shrnutí, diskuse, závěr

Problematika specifických poruch učení se stává předmětem zájmu učitelů, pedagogických výzkumníků, rodičů i širší veřejnosti. Pokud se u žáka objeví potíže v matematice, které jsou včasně diagnostikovány, je možné jej vhodnou volbou reedukačních a kompenzačních postupů ušetřit mnoha nedorozumění, ke kterým může při výuce matematiky dojít.

Článek pojednával o žákovi 5. ročníku (Jakubovi), u kterého diagnostikovaná dyslexie a dysortografie vedly ke sníženým výkonům v matematice. Jeho potíže se převážně týkaly osvojení si operace násobení. V rámci případové studie byla podrobně popsána intervence se žákem, jejímž smyslem bylo diagnostikovat jeho potíže objevující se v matematice, analyzovat příčinu problémů dostatečně zvládat toto matematické učivo a na základě toho najít vhodné reedukační a kompenzační postupy vedoucí k nápravě. Intervence probíhala po dobu jednoho roku.

Podle Budínové (2022) dává pedagogická a matematicko-didaktická literatura často do rozporu procedurální a konceptuální pohled na operace. Na jedné straně stojí nácvik jednotlivých kroků algoritmu (proces) mnohdy bez vytvoření představy, na straně druhé pak vhled do operace (koncept). Je řada autorů, kteří zdůrazňují potřebu osvojení algoritmu kvůli eliminaci kognitivního zahlcování při řešení náročnějších úloh a zároveň upozorňují na nutnost pochopení operace (Sharma, 2015; Chinn, 2019). U Jakuba převažovaly problémy procedurálního charakteru nad konceptuálními, což se projevovalo v poměrně rychlém pochopení principu operace násobení proti tomu, jaké obtíže mu činilo pamětné osvojení násobkových řad a spojů malé násobilky.

Při osvojování si násobení jsem u Jakuba zaznamenala potíže spojené se zapamatováním si malé násobilky a nespolehlivé osvojení násobkové řady, používání prstů pro násobení a problémy při zápisu schémat pro písemný algoritmus násobení. Pro některé žáky se používání prstů stalo nutností pro zvládnutí násobkové řady a spojů malé násobilky a pravděpodobně budou na nich závislí doživotně (Budínová, 2022). Nabízí se otázka, do jaké míry bude používání prstů efektivní a zda se tito žáci naučí používat je pouze v představě. Není vhodné těmto žákům používání prstů zakazovat, protože slouží jako jediná opora a pomůcka pro zvládnutí zadané úlohy.

V souvislosti s tímto případem upozorňujeme na fakt, že existuje řada dětí s poruchami učení či se sníženou kognitivní efektivitou, které se v matematice potýkají s násobením přirozených čísel podobně, jako bylo popsáno v uvedené kazuistice. Analogické případy žáků byly zkoumány a popsány v případových studiích v publikacích Budínové a Panáčové (2022) nebo Budínové (2022). Všechny tyto kazuistiky ukazují, že i přes velkou snahu vyučujících, rodičů a lektorů s využitím množství reedukačních a kompenzačních postupů nemusí u žáků s uvedenými poruchami učení dojít k pamětnému osvojení spojů malé násobilky či spolehlivému osvojení násobkové řady bez použití prstů, přestože význam této operace chápou. Na případu žáka 5. ročníku jsem chtěla ilustrovat, že existují způsoby, jak žákům s aritmetikou pomáhat. S odstupem času mohu konstatovat, že se intervence podařila a dosáhla cíle, kterým bylo zvládnutí násobilky, násobkových řad a písemného násobení do té míry, aby žák nebyl v budoucnu významně limitován.

Literatura

Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M., & Blažek, M. (2007). *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy*. Brno: Paido.

Blažková, R. (2015). Žáci se speciálními vzdělávacími potřebami. In E. Fuchs & E. Zelendová (Eds.), *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání* (s. 133-148). Praha: Národní ústav pro vzdělávání.

Blažková, R. (2017). *Didaktika matematiky se zaměřením na specifické poruchy učení*. Brno: Munipress.

Blažková, R. (2020). *Vzdělávání žáků se specifickými poruchami učení – matematika. Metodická příručka.* Brno: Masarykova univerzita.

Budínová, I., & Panáčová, J. (2022). Children with reduced cognitive effectivity, their problems and optimal way of education. In J. Morska & A. Rogerson (Eds.), *The Mathematics Education for the Future Project. Proceedings of the 16th International Conference. Building on the Past to Prepare for the Future* (s. 75-80). Münster: WTM.

Budínová, I. (2022). Obtíže žáka se sníženou kognitivní efektivitou s dysgrafickými problémy při násobení a jejich kompenzace. In T. Janík, J. Slavík, T. Češková et al., *Produktivní kultura vyučování a učení v didaktických kazuistikách* (s. 53-68). Brno: Masarykova univerzita.

Hejný, M. (1999). Procept. In *Zborník bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky* (s. 40-61). Bratislava: KZaDM.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: Univerzita Karlova.

Chinn, S. (2019). *Math learning difficulties, dyslexia and dyscalculia.* Jessica Kingsley Publishers.

Janík, T., Slavík, J., Mužík, V., Trna, J., Janko, T., Lokajíčková, V., Lukavský, J., Minaříková, E., Sliacky, J., Šalamounová, Z., Vondrová, N., & Zlatníček, P. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky.* Brno: Masarykova univerzita.

Mareš, J. (2015). Tvorba případových studií pro výzkumné účely. *Pedagogika, 65*(2), 113–142.

Panáčová, J. (2023). Žák s dyslexií a jeho potíže s násobením přirozených čísel. *Učitel matematiky, 31*(2), 109-121.

Portešová, Š. (2011). *Skryté nadání. Psychologická specifika rozumově nadaných žáků s dyslexií.* Brno: Masarykova univerzita.

Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, E., & Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Univerzita Karlova.

Sharma, M. C. (2015). Numbersence: A window into dyscalculia and other mathematics difficulties. In S. Chinn (Ed.). *The Routledge international handbook of dyscalcilia and mathematical learning difficulties* (s. 277-291). Routledge.

Slavík, J., Janík, T., Najvar, P., & Knecht, P. (2017a). *Transdisciplinární didaktika: o učitelském sdílení znalostí a zvyšování kvality výuky napříč obory.* Brno: Masarykova univerzita.

Slavík, J., Stará, J., Uličná, K., & Najvar, P. (2017b). *Didaktické kazuistiky v oborech školního vzdělávání.* Brno: Masarykova univerzita

EULEROVA ŠACHOVÁ PROCHÁZKA

Karel PASTOR[1]
[1] Palacký University, Faculty of Education (Czech Republic)
karel.pastor@upol.cz

Abstrakt

Jezdcovu procházku na šachovnici 8 × 8 lze provést mnoha způsoby. V našem článku bychom se rádi zaměřili na Eulerovu jezdcovu procházku. Pro žáky od 6 do 11 let může být atraktivní tím, že pole šachovnice při její přípravě podle jednoduchého pravidla vybarvíme čtyřmi barvami a následně celkem snadno jezdcovu procházku provedeme. Článek také zmiňuje zajímavou Schwenkovu větu o uzavřených jezdcových procházkách na obecné obdélníkové šachovnici.

Klíčová slova: kombinatorické myšlení, šachy, deskové hry, matematické šachové problémy.

THE EULER KNIGHT'S TOUR

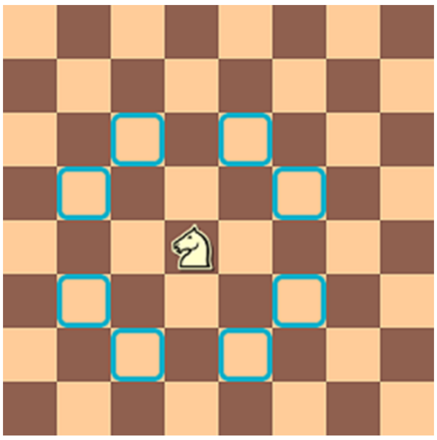
Abstract

The knight's tour on an 8 × 8 chessboard can be done in a number of ways. In our article, we would like to focus on the Euler kniht's tour. This can be attractive for pupils aged 6 to 11 by coloring the squares of the chessboard with four colors during its preparation, following a simple rule, and then implementing the kniht's tour quite easily. The article also mentions Schwenk's interesting theorem about kniht's closed tours on a generally rectangular chessboard.

Keywords: combinatorial thinking, chess, board games, mathematical chess problems.

1. Úvod

Naplňování cílů tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace mohou pomoci deskové hry, mezi nimiž mají významné postavení šachy. Není však potřeba, aby se žáci naučili kompletní pravidla šachu, jejichž osvojení nemusí být pro každého žáka 1. stupně základní školy záživné.



Obrázek 1. Tah jezdce

ISSN 2694-8133

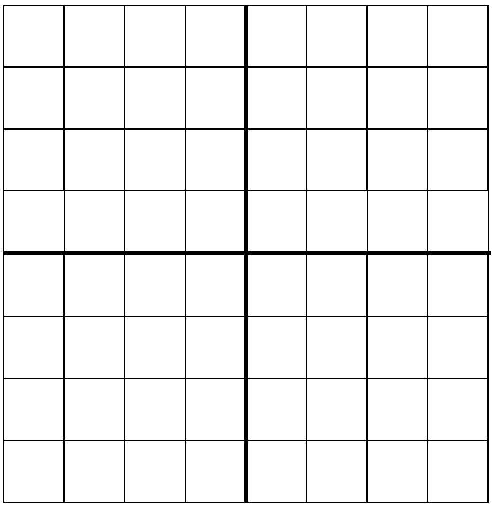
Stačí porozumět chodu některých šachových figur a hned poté je možné řešit matematické šachové úlohy. S matematickými šachovými úlohami je možné se seznámit na (Wikipedia, 2023a), popřípadě s jejich jednotlivými variantami přizpůsobenými žákům 1. stupně (Pastor, 2019, 2020a, 2020b). V tomto článku se budeme zabývat jezdcovými procházkami po šachovnici.

Připomeňme, že šachový jezdec se na šachovnici pohybuje skoky ve tvaru písmene L, tj. dvě pole rovně a jedno do strany nebo jedno pole rovně a dvě do strany (Wikipedia, 2023b), jak je ukázáno na obrázku 1.

Jezdcovou procházkou se označuje úloha navštívit jezdcem postupně všechna pole šachovnice. Historie tohoto problému je poměrně velmi dlouhá, první zmínky o něm pocházejí z 9. století (Wikipedia, 2023c). V našem článku se budeme věnovat jezdcové procházce představené Leonhardem Eulerem v roce 1759, která může být zajímavá pro žáky 1. stupně díky svému poměrně jednoduchému algoritmu.

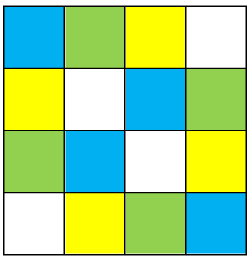
2. Eulerova procházka

Šachovnici 8×8 rozdělíme na 4 menší šachovnice 4×4 (obrázek 2).



Obrázek 2. Rozdělení šachovnice

Vezmeme nyní každý z menších čtverců 4×4 a jeho pole vybarvíme 3 barvami způsobem uvedeným na obrázku 3 a 4 pole necháme bílá. Všimněme si, že pole stejné barvy je možné spojit čtyř krokovou jezdcovou procházkou.

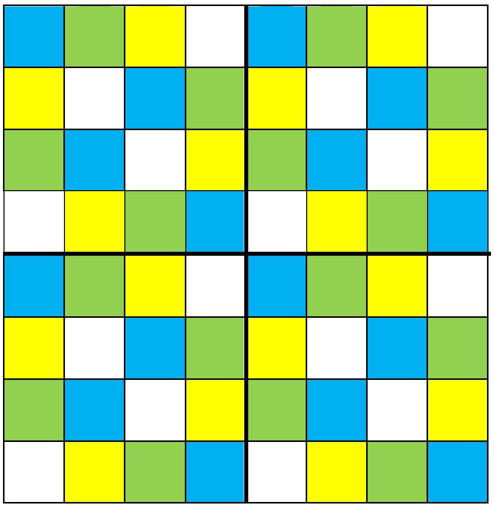


Obrázek 3. Vybarvení šachovnice 4×4

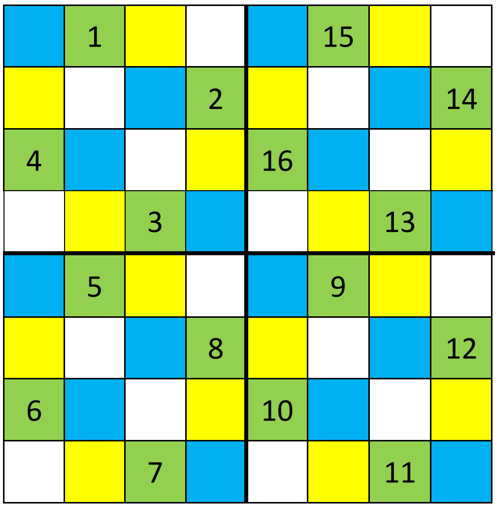
Po příslušném vybarvení polí na obrázku 2 má šachovnice 8×8 podobu znázorněnou obrázkem 4.

ISSN 2694-8133

Nyní již můžeme přistoupit k jezdcově procházce po šachovnici 8×8. Zvolíme si jednu barvu, například zelenou a jezdcovou procházkou nejprve navštívíme všechna zelená pole levé horní šachovnice 4×4, potom levé dolní šachovnice, následně pravé dolní šachovnice a nakonec pravé horní šachovnice 4×4 (obrázek 5).



Obrázek 4. Vybarvení šachovnice 8×8



Obrázek 5. Zelená pole

Po navštívení všech 16 zelených polí se přesuneme na pole modrá a postupně je všechny vyplníme, jak je ukázáno na obrázku 6 s očíslovanými 32 poli. Následovat budou pole žlutá – obrázek 7 s 48 poli navštívenými šachovým jezdcem. Při vyplňování zbývajících bílých polí změníme směr vyplňování menších šachovnic, tj. nejprve necháme šachového jezdce navštívit bílá pole pravé dolní šachovnice 4×4. Na obrázku 8 je jezdcova procházka zdárně ukončena. Algoritmus je poměrně velmi jednoduchý a zapamatovatelný, tedy je vhodný i pro děti navštěvující 1. stupeň základní školy. Pořadí barev i směr vyplňování menších šachovnic se většinou samy nabídnou (někdy si můžeme vybrat).

18	1			32	15		
		17	2			31	14
4	19			16	29		
		3	20			13	30
22	5			28	9		
		21	8			27	12
6	23			10	25		
		7	24			11	26

Obrázek 6. Modrá pole

18	1	34		32	15	46	
35		17	2	47		31	14
4	19		33	16	29		45
	36	3	20		48	13	30
22	5	40		28	9	44	
37		21	8	41		27	12
6	23		39	10	25		43
	38	7	24		42	11	26

Obrázek 7. Žlutá pole

18	1	34	59	32	15	46	63
35	58	17	2	47	62	31	14
4	19	60	33	16	29	64	45
57	36	3	20	61	48	13	30
22	5	40	53	28	9	44	49
37	56	21	8	41	52	27	12
6	23	54	39	10	25	50	43
55	38	7	24	51	42	11	26

Obrázek 8. Bílá pole

3. Uzavřená jezdcova procházka

Na obrázku 8 je tzv. otevřená jezdcova procházka, při které se šachový jezdec ze svého posledního navštíveného pole (64) nemůže svým tahem dostat na pole začátku své procházky (1). V opačném případě hovoříme o uzavřené jezdcově procházce. Docílit uzavřené jezdcovy procházky pomocí Eulerovy metody je již o něco náročnější než otevřené jezdcovy procházky, ale nadanější žáci 1. stupně ji podle mého názoru mohou také úspěšně zvládnout. Příklad uzavřené jezdcovy procházky s využitím metody Leonharda Eulera je uveden na obrázku 9.

30	1	46	61	18	15	34	59
47	62	31	2	33	60	17	14
4	29	64	45	16	19	58	35
63	48	3	32	57	36	13	20
28	5	44	49	24	9	38	55
43	50	25	8	37	56	21	12
6	27	52	41	10	23	54	39
51	42	7	26	53	40	11	22

Obrázek 9. Uzavřená jezdcova procházka

Každou uzavřenou jezdcovu procházku je možné provést ve dvou směrech – v případě uzavřené jezdcovy procházky na obrázku 9 bychom mohli začít na poli označené číslem 64 a skončit na poli 1 (šachový jezdec tak navštěvuje pole v opačném pořadí). Pokud budeme tyto dvě procházky lišící se pouze směrem považovat za jedinou procházku, pak celkový počet možných uzavřených procházek po šachovnici 8×8 je 13 267 364 410 532 (Wikipedia, 2023c).

4. Schwenkova věta

Děti může zajímat, zda šachovým jezdec můžeme realizovat uzavřenou procházku i na šachovnicích jiných rozměrů. Odpověď na tuto otázku dává Schwenkova věta (Schwenk, 1991; Chybová 2017).

Věta (Schwenkova). *Pro všechna přirozená* $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{n}$ *existuje na šachovnici* $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ *uzavřená jezdcova procházka právě tehdy, když není splněna žádná z následujících podmínek:*

i. *m a n jsou obě lichá čísla,*

ii. *m = 1, 2 nebo 4,*

iii. *m = 3 a n = 4, 6 nebo 8.*

Předchozí věta tak například říká, že na šachovnici 5×7 nebo 4×5 uzavřená jezdcova procházka neexistuje, kdežto na šachovnici 5×6 ano, jak je ukázáno na obrázku 10.

8	17	12	27	2	23
11	28	9	24	13	26
18	7	16	1	22	3
29	10	5	20	25	14
6	19	30	15	4	21

Obrázek 10. Šachovnice 5×6

Realizovat uzavřenou jezdcovu procházku je samozřejmě náročnější než realizovat otevřenou jezdcovu procházku. Ale i v tomto případě může být náročné, zejména pro děti 1. stupně, vyplnit tahy šachového jezdce (zvolenou obdélníkovou) všechna pole šachovnice. Je však možné vyhlásit soutěž, kdo vyplní co nejvíce polí dané šachovnice tahy šachového jezdce. Na závěr ještě zmíníme větu, která udává podmínky existence otevřené jezdcovy procházky s ohledem na rozměry šachovnice.

Věta (Conrad a kol., 1994). *Pro všechna přirozená $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{n}$ existuje na šachovnici $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ otevřená jezdcova procházka právě tehdy, když není splněna žádná z následujících podmínek:*

i. *m = 1 nebo 2,*

ii. *m = 3 a n = 3, 5 nebo 6,*

iii. *m = 4 a n = 4.*

Podle předchozí věty je možné (na rozdíl od uzavřené jezdcovy procházky) najít otevřenou jezdcovu procházku na šachovnici 5×7, jedna taková procházka je uvedena na obrázku 11.

1	20	9	30	3	22	11
8	29	2	21	10	31	4
19	16	27	32	35	12	23
28	7	18	25	14	5	34
17	26	15	6	33	24	13

Obrázek 11. Šachovnice 5×7

5. Závěr

V článku byla představena Eulerova jezdcova procházka. Její algoritmus je poměrně snadno zapamatovatelný. Jedná se do značné míry o hraní se 4 barvami, které může být zajímavé pro žáky 1. stupně. Dále byl vysvětlen rozdíl mezi uzavřenou a otevřenou jezdcovou procházkou a byly zmíněny podmínky jejich existence kladené na rozměry šachovnice. Pro žáky 1. stupně může být vhodnější, aby se snažili vyplnit tahy šachového jezdce menší šachovnici, např. $\mathbf{5} \times \mathbf{7}$, místo klasické šachovnice 8×8.

Literatura

Conrad, A., Hindrichs, T., Morsy, H. & Wegener, I. (1994). Solution of the Knight's Hamiltonian Path Problem on Chessboards. *Discrete Applied Mathematics 50* (2). Dostupné z https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166218X9200170Q?via%3Dihub

Chybová, L. (2017). *Šachové úlohy v kombinatorice* (Diplomová práce). Univerzita Karlova, Praha. Dostupné z http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/lucie_chybova_dp/sachove-ulohy.pdf

Pastor, K. (2019). Chess Independence Problems. *Elementary Mathematics Education Journal 1* (2), 34-42. Dostupné z http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol1No2/Pastor_2019_Vol1No2.pdf

Pastor, K. (2020a). Chess Domination Problems. *Elementary Mathematics Education Journal 2* (1), 46-52. Dostupné z http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol2No1/Pastor_2020_Vol2No1.pdf

Pastor, K. (2020b). Chess Piece Tour Problems. *Elementary Mathematics Education Journal 2* (2), 38-45. Dostupné z http://emejournal.upol.cz/Issues/Vol2No2/Vol2No2_Pastor2.pdf

Schwenk, A. J. (1991). Which Rectangular Chessboard Have a Knight´s Tour?. *Mathematics Magazine 64* (5), 325-332. https://doi.org/10.2307/2690649

Wikipedia. (2023a). *Mathematical chess problems*. Dostupné z https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_chess_problem

Wikipedia. (2023b). *Pravidla šachů*. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Pravidla_šachů

Wikipedia. (2023c). *Jezdcova procházka*. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Jezdcova_procházka

ANALÝZA PRÁC ŠTUDENTOV V KONTEXTE ZARADENIA TECHNOLÓGIE ROZŠÍRENEJ REALITY DO MATEMATICKEJ EDUKÁCIE

Alena PRÍDAVKOVÁ[1]
[1]Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovensko)
alena.pridavkova@unipo.sk

Abstrakt

Integrácia edukačných aktivít s podporou technológie rozšírenej reality (Augmented Reality – AR) vytvára nové možnosti v matematickej edukácii. Cieľom realizovaného skúmania bolo (1) zaradiť činnosti s využitím technológie AR do pregraduálnej prípravy učiteľov elementaristov a (2) analyzovať produkty práce študentov pred a po zavedení edukačných aktivít s využitím technológie rozšírenej reality. Výskum bol orientovaný na tematickú oblasť aritmetiky – zápis prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave. Prezentované sú typy modelov daného matematického konceptu, ktoré boli identifikované kvalitatívnou analýzou. Výstupy študentov boli predmetom kvantitatívnej analýzy.

Kľúčové slová: matematická edukácia, technológia rozšírenej reality, model prirodzeného čísla

ANALYSIS OF STUDENTS´ WORK IN THE CONTEXT OF INCLUDING THE AUGMENTED REALITY TECHNOLOGY IN MATHEMATICS EDUCATION

Abstract

Integration of education activities supported by Augmented Reality technology (AR) creates new opportunities in mathematics education. The research aims are (1) to implement activities using AR technology in primary school teacher training, (2) to analyse students´ work before and after the implementation AR activities. Research is focused on the arithmetic area – standard and expanded forms of natural numbers in the decadic number system. The types of models of the concept are presented in the article. Models were identified by qualitative analysis. The students´ outputs were quantitatively analysed.

Keywords: mathematical education, augmented reality technology, number model

1. Technológia rozšírenej reality v matematickej edukácii

Zaradenie technológie rozšírenej reality (Augmented Reality – AR) do vyučovania prináša viacero výhod. Podľa Tiede et al. (2023) dochádza k zvýšeniu motivácie študentov pre učenie sa, miery spolupráce, ale aj porozumenia vybraných pojmov. Technológia AR má potenciál v kontexte zmien foriem vyučovania, v dôsledku ktorých dochádza k zvýšeniu motivácie študentov a k posilneniu zážitku v procese učenia sa (Afnan et al., 2021; Boras, 2022; Demitriadou et al., 2020; Koparan et al., 2023; Nevřelová & Koreňová, 2022).

Implementáciou rozšírenej reality do edukačnej praxe sa vyučovanie stáva zaujímavejším, informácie a poznatky sú pre žiakov prístupnejšie a lepšie pochopiteľné. Táto zmena je, podľa Boras (2022), kľúčová v kontexte meniacich sa potrieb študentov 21. storočia. Efektívna inkorporácia technológie AR do vyučovania je podmienená vedomosťami učiteľov o existujúcich prostriedkoch a o možnostiach využitia ich potenciálu. Týka sa to aj populácie budúcich učiteľov – študentov, ktorí majú záujem o poznávanie možností práce s technológiou AR vyplývajúcich z ich pozitívneho postoja k zmene edukačných prístupov (Castaño-Calle et al., 2022). Výsledky výskumu ukazujú na dôležitosť poskytovania poznatkov a rozvoja zručností v oblasti práce s technológiou AR. Edukácia realizovaná s podporou prostriedkov využívajúcich technológiu rozšírenej reality zvyšuje kvalitu prípravy budúcich učiteľov (Gómez-García et al., 2021), kedy študenti prejavujú väčší záujem o inovácie (Sáez-López et al., 2020).

AR technológia je považovaná za prostriedok realizácie zmien v prístupoch k matematickému vzdelávaniu a k zvýšeniu miery pozornosti študentov na rôznych úrovniach vzdelávania (Afnan et al., 2021). Zavedenie nových technológií do matematického vzdelávania vo forme rozšírenej reality pôsobí na rast úrovne interaktivity a záujmu žiakov o matematiku (Demitriadou et al., 2020). Uvedená skutočnosť podnecuje k efektívnejšiemu učeniu sa a lepšiemu porozumeniu matematických konceptov v porovnaní s tradičnými metódami výučby. Ukazuje sa, že práca s aplikáciami využívajúcimi AR technológiu, má pozitívny vplyv na úroveň zvládnutia matematických problémov. Učiaci sa vnímajú problém ako jednoduchší, v porovnaní s verziou vo forme pero-papier (Afnan et al., 2021). Súhlasný postoj k používaniu AR vo vyučovaní matematiky z pohľadu zvýšenia motivácie, aktivity žiakov, zlepšenia ich výsledkov, ako aj v kontexte zmeny klímy v triede, prezentuje aj Radu (2014). Ďalšie výhody začlenenia technológie AR do matematickej edukácie uvádza Hnatová (2023).

V obsahu matematickej edukácie je možné špecifikovať viacero oblastí, pri ktorých je vhodné využiť aktivity s aplikáciou technológie rozšírenej reality (Mokriš, 2022; Prídavková, 2022; Hnatová & Hnat, 2021). Digitalizované edukačné materiály vytvorené na prácu s podporou AR, v prípade niektorých matematických konceptov, nahrádzajú činnosti s reálnymi pomôckami, ktoré sú zastúpené modifikovateľnými virtuálnymi objektami. Edukačné podporné materiály spomenutého charakteru môžu byť súčasťou vzdelávania v rôznych cieľových skupinách, ako u žiakov na základnej škole, tak aj pri študentoch na vysokých školách. Použitie technológie AR prispieva k optimalizácii prípravy budúcich učiteľov (Gómez-García et al., 2021).

Na Pedagogickej fakulte PU v Prešove sú činnosti a aktivity s podporou technológie AR súčasťou pregraduálnej prípravy budúcich učiteľov elementaristov. Študenti majú možnosť spoznať potenciál a prínos práce s nástrojmi s podporou technológie AR z viacerých pohľadov. Uvádzame niektoré z benefitov plynúcich z práce s AR:

- možnosť získať skúsenosti a zručnosti pri práci s dynamickými softvérmi a aplikáciami (rozvoj digitálnych kompetencií),
- prítomnosť dynamickej dimenzie v materiáloch ako predpoklad možnosti prezentovať proces konštruovania modelov alebo postupu riešenia úlohy (nielen statické znázornenie výsledku úlohy),
- možnosť modifikovať vstupné kritériá v modeloch a tvoriť tak úlohy diferencovanej úrovne náročnosti,
- priestor pre individuálnu prácu, podmienky na riešenie problémov rôznymi stratégiami;
- poskytnutie spätnej väzby (napríklad pri tvorbe modelu matematického konceptu zadaním vstupných parametrov). (Prídavková, 2022, 2023).

Predmetom prezentovaného skúmania bola oblasť týkajúca sa reprezentácií a modelov pre zápis prirodzených čísel v desiatkovej číselnej sústave. Predstavené budú výsledky realizovaného výskumu, v rámci ktorého bola pri príprave budúcich učiteľov primárneho vzdelávania aplikovaná technológia AR.

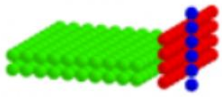
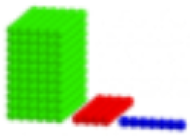
2. Modely prirodzeného čísla

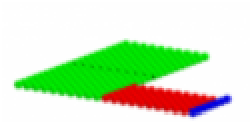
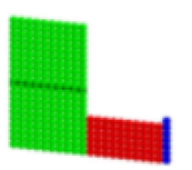
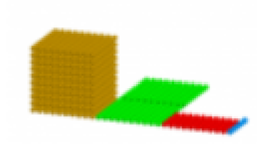
Rozvinutý a skrátený zápis prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave je možné prezentovať žiakom už od primárneho stupňa vzdelávania, využitím modelov rôzneho typu, na rôznych úrovniach abstrakcie. Na najnižšej úrovni abstrakcie ide o prácu s modelmi využívajúcimi manipuláciu s predmetmi reprezentujúcimi jednotlivé rády *n*-ciferného čísla (jednotky, desiatky, stovky atď.). Postupne sú prezentované grafické modely, ktoré sú abstrahované do formy symbolických zápisov. V prípade všetkých modelov sú aplikované pravidlá pre zápis prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave, ktorá je považovaná za pozičnú. Každá číslica v zápise čísla má danú pozíciu, vyjadrujúcu jej hodnotu (jednotky, desiatky, stovky atď.). Na primárnom stupni vzdelávania je podstatné spoznať princíp zápisu a čítanie viacciferných prirodzených čísel v desiatkovej číselnej sústave. Inou možnosťou pre modelovanie rozvinutého a skráteného zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave je práca s digitalizovaným materiálom využívajúcim technológiu rozšírenej reality. Na uvedený účel môžu byť vytvorené applety (napríklad pomocou softvéru GeoGebra v prepojení na prácu s aplikáciou GeoGebra 3D Graphing Calculator), kde pri modelovaní prirodzeného čísla sú použité objekty rôzneho druhu (kocky, guľôčky a pod.). Pre potreby modelovania daného konceptu je potrebné mať k dispozícii mobilné zariadenie podporujúce technológiu rozšírenej reality (ARCore).

3. Súbor appletov pre modelovanie zápisu prirodzeného čísla

Pre potreby začlenenia technológie AR do matematickej edukácie v skupinách študentov elementaristov, boli na Pedagogickej fakulte PU v Prešove (v rámci projektu KEGA) vytvorené súbory appletov. Predstavené sú vybrané ukážky autorských appletov pre problematiku zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave (Tab. 1).

Tabuľka 1. Ukážka appletov pre modelovanie rozvinutého zápisu prirodzeného čísla

	aplikácia	**ukážka modelu čísla**
1.	**Prirodzené číslo z oboru 0 až 999** vertikálna orientácia (stovky, desiatky, jednotky) • skupiny s konkrétnym počtom jednotiek daného rádu sú znázornené vo vertikálnom smere	
2.	**Prirodzené číslo z oboru 0 až 999** horizontálna orientácia (stovky, desiatky, jednotky) • skupiny s konkrétnym počtom jednotiek daného rádu sú znázornené v horizontálnom smere	

3.	**Prirodzené číslo z oboru 0 až 999** vizualizácia v rovine *xy* • tzv. pruhový model, kde model čísla je znázornený v rovine *xy*	
4.	**Prirodzené číslo z oboru 0 až 999** vizualizácia v rovine *xz* • tzv. pruhový model, kde model čísla je znázornený v rovine *xz*	
5.	**Prirodzené číslo z oboru 0 až 9999** vizualizácia v rovine *xy* • tzv. pruhový model, kde model čísla je znázornený v rovine *xy*	

4. Ciele, opis a výsledky realizovaného výskumu

Zámery prezentovaného realizovaného skúmania nadväzovali na parciálne projektové ciele orientované na:

- identifikáciu a výber tematických oblastí vhodných na inkorporáciu AR,
- postupné spracovanie námetov a podporných zdrojov (v súlade so zameraním projektu),
- realizovanie výučby so začlenením AR do vybraných matematických disciplín.

Možnosti začlenenia technológie AR do matematickej edukácie boli vymedzené v dvoch dimenziách. Na jednej strane boli špecifikované možnosti na primárnom stupni vzdelávania a na strane druhej išlo o výber oblastí v profesijnej príprave budúcich učiteľov elementaristov. V uvedenom kontexte bola realizovaná obsahová analýza matematického kurikula na základných školách (v slovenskom kontexte) a analýza obsahu vybraných matematických disciplín v študijných programoch pripravujúcich budúcich učiteľov na primárnom stupni vzdelávania (na Pedagogickej fakulte PU v Prešove).

Výstupom analytickej procedúry je portfólio tematických oblastí elementárnej matematiky, v rámci ktorých je možné zaradiť prácu s využitím didaktických digitálnych prostriedkov prostredníctvom technológie rozšírenej reality. Na základe realizovanej obsahovej analýzy bola pre ďalšie skúmanie špecifikovaná téma: zápis prirodzených čísel v desiatkovej číselnej sústave (skrátený a rozvinutý). Pre danú problematiku bol vytvorený súbor digitalizovaných učebných materiálov na prácu s podporou technológie AR, ktoré boli začlenené do výučby predmetu aritmetika a algebra s metodikou (v akademickom roku 2021/2022, v prvom ročníku Mgr. stupňa štúdia, v študijnom programe učiteľstvo a pedagogické vedy).

Cieľom výskumu bolo

- implementovať činnosti s využitím technológie AR do pregraduálnej matematickej prípravy budúcich učiteľov elementaristov,
- identifikovať modely zápisu prirodzeného čísla osvojené a využívané v skupine študentov elementaristov (pred a po zavedení aktivít s podporou technológie AR).

Výskum bol integrálnou súčasťou projektovej etapy, kedy prebiehala výučba vybraných disciplín (na PF PU Prešove) s inkorporáciou technológie AR. V rámci výučby predmetu aritmetika a algebra s metodikou, na seminári (4. týždeň semestra), boli analyzované a diskutované rôzne spôsoby prezentovania a modelovania skráteného a rozvinutého zápisu čísel (manipulácia, obrázkový mód, auditívny model, symbolická reprezentácia; možnosti sprístupnenia konceptu, tvorba modelov v rôznych módoch, predstavenie možností pre zaradenie AR do vyučovania v primárnej škole). V šiestom týždni semestra boli do výučby na seminári zaradené aktivity spojené s možnosťami využitia technológie AR v matematickej edukácii (autorská aplikácia). Priestor bol venovaný prezentovaniu práce s aplikáciou GeoGebra 3D Graphing Calculator. Vybraná bola problematika modelovania viacciferných čísel, konkrétne rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave. Do výučby boli implementované aktivity prezentujúce rôzne modely daného pojmu. Predstavených bolo niekoľko možnosti využitia rôznych módov reprezentácie predmetného konceptu, ktoré sú aplikované na primárnom stupni vzdelávania.

V rámci projektových cieľov, paralelne s obsahovou analýzou matematických disciplín, boli postupne spracovávané námety a podporné zdroje na prácu s využitím technológie AR. Súbor appletov (popísaný v časti 3) bol vytvorený aj pre problematiku modelovania rozvinutého zápisu čísla v desiatkovej číselnej sústave. Ten bol zadaný v skupine študentov za účelom pilotného overenia možností práce s jednotlivými appletmi a analýzy výhod resp. nevýhod ich využitia v praxi. Na základe realizovanej analýzy, si študenti zvolili jeden z piatich dostupných appletov, jeho výber zdôvodnili a vytvorili návrh úlohy (skupinu úloh) s využitím appletu pre žiakov vybraného ročníka. Návrh mal obsahovať aj súbor konkrétnych zadaní, formulácií pokynov, úloh pre žiakov.

Študentom bol zadaný súbor úloh (T1 na vstupe a T2 na výstupe, t. j. pred a po práci s nástrojmi využívajúcimi technológiu AR) so zámerom zistenia úrovne poznania danej problematiky. Výstupy študentov (v počte 110) boli predmetom kvantitatívno–kvalitatívnej analýzy, zameranej na (1) určenie počtu rôznych využitých modelov a možností zápisu prirodzených čísel a (2) identifikáciu použitých a prezentovaných typov modelov zápisu prirodzeného čísla.

4.1. Opis a charakteristika zadaných úloh

Úloha zadaná na vstupe bola zameraná na zistenie úrovne poznania a schopnosti aplikovať rôzne spôsoby vyjadrenia a zápisu prirodzených čísel. Predpokladalo sa, že študenti použijú nielen skrátený zápis čísel, ale aj rôzne typy modelov rozvinutého zápisu (v nadväznosti na realizované aktivity v rámci výučby). Pripravené boli tri analogické varianty úlohy. V každej z nich boli zadané tri čísla slovným vyjadrením (dvojciferné číslo, trojciferné a štvorciferné). Troj a štvorciferné čísla boli zvolené tak, aby sa v ich skrátenom zápise vyskytovala číslica nula (Tab. 2).

Na konci semestra bol opätovne priestor venovaný zisťovaniu porozumenia, vnímania a schopnosti tvoriť rôzne modely zápisov čísel, porovnaniu jednotlivých modelov, identifikácii výhod a nevýhod jednotlivých modelov. Študentom bol zadaný súbor úloh s analogickými položkami, ako na začiatku semestra. Oproti situácii pri zadaní úloh T1 už mali študenti skúsenosť s úlohami a činnosťami v danej problematike aj s prácou s appletmi využívajúcimi technológiu AR. Na základe uvedeného sa očakávalo, že sa medzi prezentovanými modelmi rozvinutého zápisu prirodzených čísel vyskytnú aj modely odkazujúce na využitie technológie AR. V úlohe na výstupe bolo v zadaní uvedené len jedno trojciferné číslo (pripravené boli tri analogické verzie, pričom v zápise čísla sa vyskytuje číslica nula, Tab. 2).

Tabuľka 2. Ukážka úloh zadaných študentom

verzia	T1 - súbor úloh na vstupe	T2 - súbor úloh na výstupe
A	Zapíšte všetky dané čísla viacerými rôznymi spôsobmi a stručne vysvetlite: *dvadsaťtri* *tristopäť* *tisícšesťstodvadsať*	Zapíšte dané číslo viacerými rôznymi spôsobmi a stručne vysvetlite: *tristopäť*
B	Zapíšte všetky dané čísla viacerými rôznymi spôsobmi a stručne vysvetlite: *tridsaťdva* *päťstotri* *tisícdvestošesťdesiat*	Zapíšte dané číslo viacerými rôznymi spôsobmi a stručne vysvetlite: *päťstotri*
C	Zapíšte všetky dané čísla viacerými rôznymi spôsobmi a stručne vysvetlite: *dvadsaťšesť* *dvestosedem* *tisíctristoštyridsať*	Zapíšte dané číslo viacerými rôznymi spôsobmi a stručne vysvetlite: *dvestosedem*

4.2. Výsledky analýzy študentských výstupov

Predmetom analýzy boli výstupy študentov, ktoré boli produkované pred a po zavedení a realizovaní práce s podporou technológie rozšírenej reality. Študenti prezentovali v súbore T1 niekoľko modelov zápisu daných prirodzených čísel, nasledovala práca s využitím technológie rozšírenej reality a po tejto činnosti bolo ich úlohou znova prezentovať rôzne možnosti modelovania rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave (súbor úloh T2). Zámerom skúmania bolo sledovať, ako realizované činnosti a práca s materiálom s podporou technológie rozšírenej reality zmení porozumenie predmetnej problematiky z pohľadu percepcie prínosu nového prístupu k tvorbe modelov daného konceptu. Všetky výstupy študentov (v počte 110) získaných z riešení súborov úloh T1 a T2 boli predmetom kvalitatívnej analýzy orientovanej na identifikáciu využitých a prezentovaných modelov zápisu prirodzených čísel v desiatkovej číselnej sústave. V zadaní úloh bola formulovaná požiadavka na produkovanie viacerých rôznych spôsobov reprezentácie daného čísla. V tabuľke 3 sú spracované kvantitatívne ukazovatele týkajúce sa počtu modelov vyskytujúcich sa vo výstupoch študentov.

Tabuľka 3. Počet prezentovaných modelov zápisu čísla (na vstupe T1 a na výstupe T2)

početnosť vytvorených modelov	**počet študentov s danou početnosťou (T1)**	**počet študentov s danou početnosťou (T2)**	**zmena/rozdiel v počte študentov (T2-T1)**
0	8	13	5
1	1	2	1
2	28	5	-23
3	26	16	-10
4	31	30	1
5	11	34	13
6	5	10	5
	110	110	

V tabuľke 3 sú prezentované kvantitatívne údaje získané z analýzy počtu produkovaných modelov daného konceptu v skupine študentov, konkrétne v dvoch rôznych časových obdobiach (označených ako T1 a T2). Stĺpec *početnosť vytvorených modelov* reprezentuje rôzne počty modelov vyskytujúcich sa vo výstupoch každého študenta. V prípade hodnoty 0 ide o situáciu, kedy študenti úlohy neriešili z dôvodu neprítomnosti. V častiach *počet študentov s danou početnosťou (T1, T2)* sú prezentované údaje vyjadrujúce počet študentov, ktorí vytvorili konkrétny počet modelov (v oboch časových obdobiach a testovaniach T1 a T2). Zaznamenané sú zmeny v počte produkovaných modelov v čase, vo forme rozdielu počtu modelov v T2 a T1.

Na vstupe (súbor úloh T1) takmer tretina študentov (31) vo svojich výstupoch prezentovala štyri typy modelov zápisu čísla, väčšina mala uvedené dva až tri modely. Šesť rôznych spôsobov reprezentácie zápisu prirodzeného čísla bolo uvedených v piatich prípadoch. Na výstupe (súbor úloh T2) sa pomer zmenil; vo viac ako tretine prípadov bolo evidovaných až po päť modelov, v 30- tich výstupoch boli zaznamenané po štyri typy modelov. Narástol aj počet študentov so šiestimi modelmi (z 5 na 10). Oproti výsledkom na vstupe väčšina študentov uvádzala štyri až päť modelov.

Na základe údajov je zrejmé, že v monitorovaných obdobiach došlo k zmene v početnosti produkovaných modelov daného konceptu. Napríklad, pre početnosť s dvoma modelmi sa počet študentov výrazne znížil (z 28 na 5), v porovnaní so vstupom, čo indikuje, že na výstupe bolo viac študentov schopných vytvoriť viac ako dva modely. Dôkazom toho je údaj vyjadrujúci zmenu v početnosti 5 – počet študentov sa zvýšil z 11 na 34. Zaznamenané zmeny môžu naznačovať trendy, v procese tvorby modelov predmetného konceptu rôzneho typu, v čase. Evidované rozdiely sú dôsledkom viacerých faktorov, ktoré môžu byť platformou pre ďalšie výskumy v danej problematike. Jedným z nich je nadobudnutie vhľadu do predmetnej problematiky z pohľadu poznania viacerých možností pre reprezentáciu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave, ako aj získania skúseností s úlohami z elementárnej matematiky. Pozitívna zmena v zmysle schopnosti produkovať viac modelov, je pravdepodobne dôsledkom aplikovaných metód vo výučbe, kedy bol priestor venovaný aktivite študentov, zaradené boli interaktívne prostriedky, pričom boli rozvíjané argumentačné a analytické schopnosti. V neposlednom rade je to aj dôsledok individuálnych schopností študentov, ako aj ich záujmu o danú problematiku.

Nasledujúca etapa analytického procesu bola zameraná na identifikáciu použitých a prezentovaných typov modelov zápisu prirodzeného čísla. V analyzovaných študentských produktoch bolo identifikovaných na vstupe (T1) sedem modelov zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave, na výstupe (T2) osem modelov (Tab. 4). Tie boli pre potreby ďalšej analýzy kódované:

MODEL1 skrátený zápis
MODEL2a rozvinutý zápis_súčet
MODEL2b rozvinutý zápis_súčet násobkov
MODEL2c rozvinutý zápis_mocniny
MODEL3 graficky
MODEL4 zvuk, pohyb
MODEL_rímske čísla
AR_MODEL

Sú to modely čísel, ktoré sa vyskytujú v učive matematiky na primárnom stupni vzdelávania. V niektorých analyzovaných prípadoch boli identifikované aj zápisy využívajúce súčet násobkov čísel 10, 100 resp. vyjadrenie pomocou mocnín čísla 10.

Vyskytli sa aj modely na princípe ikonickej reprezentácie (graficky) resp. typ vyjadrenia, kde sa využívajú napríklad rozličné zvuky na odlíšenie jednotlivých rádov (auditívny model). Napríklad číslo *tristopäť* je vyjadrené pomocou identifikovaných modelov nasledujúcimi spôsobmi:

MODEL1	305
MODEL2a	$300 + 5$
MODEL2b	$3.100 + 0.10 + 5.1$ resp. $3.100 + 5.1$
MODEL2c	$3.10^2 + 0.10^1 + 5.10^0$ resp. $3.10^2 + 5.10^0$
MODEL3	OOO|||||
MODEL4	trikrát lúsknutie, päťkrát dupnutie (Prídavková et al., 2021)
MODEL_rímske čísla	CCCV

Tabuľka 4. Početnosť výskytu jednotlivých modelov zápisu prirodzeného čísla

typ modelu	**počet študentov (T1)**	**počet študentov (T2)**	**zmena/rozdiel v počte študentov (T2-T1)**
MODEL1-skrátený zápis	99	96	-3
MODEL2a-rozvinutý zápis_súčet	65	73	8
MODEL2b-rozvinutý zápis_súčet násobkov	38	59	21
MODEL2c-rozvinutý zápis_mocniny	30	36	6
MODEL3-graficky	61	79	18
MODEL4-zvuk, pohyb	1	5	4
MODEL_rímske čísla	50	58	8
AR_MODEL	---	4	4

V tabuľke 4 sú prezentované kvantitatívne údaje analýzy produktov študentov z pohľadu typu modelu rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave. V stĺpci *typ modelu* sú uvedené kódy všetkých identifikovaných modelov. Hodnoty v častiach *počet študentov (T1, T2)* predstavujú počty študentov, vo výstupoch ktorých sa vyskytol konkrétny typ modelu. Spracované sú aj rozdiely v čase (*zmena/rozdiel v počte študentov T2-T1*). Uvedená je početnosť výskytu každého identifikovaného modelu. Skrátený zápis sa vyskytol takmer vo všetkých analyzovaných výstupoch. Pri rozvinutom zápise bol, v prípade úloh v T1, najčastejšie aplikovaný zápis pomocou súčtu jednotiek, desiatok, stoviek (65-krát), nasledovala grafická reprezentácia (61 prípadov). Oproti tomu, v úlohách T2, bol najviac zastúpený rozvinutý zápis využívajúci grafický model (79) a následne zápis vo forme súčtu jednotiek, desiatok, stoviek (73). V pomerne vysokom počte boli prezentované aj zápisy pomocou rímskych čísel a to aj napriek skutočnosti, že v úlohách išlo o zápis čísel v desiatkovej číselnej sústave. V jednom prípade v T1 a v piatich v T2 bol spomenutý aj model využívajúci zvukovú reprezentáciu pre číslice jednotlivých rádov.

Mierna zmena v počte (z 99 v T1 na 96 v T2) bola zaznamenaná v prípade modelu vo forme skráteného zápisu čísla. Je to dôsledok faktu, že ide o najčastejšie sa vyskytujúci model analyzovaného konceptu na primárnom stupni vzdelávania. V prípade modelov 2a, 2b a 2c bol zaznamenaný nárast v počte výskytov v T2 v porovnaní v T1. Výrazná zmena bola evidovaná v prípade modelu 2b (až o 21 prípadov, z 38 na 59), kde ide o reprezentáciu rozvinutého zápisu čísla vo formáte súčtu násobkov čísel 1, 10 a 100. Nárast v počte výskytu daného modelu naznačuje zvýšenú úroveň osvojenia si daného konceptu v skúmanom súbore.

ISSN 2694-8133

Pomerne vysoká miera zmeny, v pozitívnom zmysle, bola zaznamenaná aj v početnosti modelu 3, ktorý predstavuje grafický mód zápisu čísla. Mierny nárast v počte je evidovaný pri type modelu 4, kde je číslo reprezentované v auditívnom formáte. S týmito typmi reprezentácie analyzovaného konceptu mali možnosť študenti pracovať počas seminárov v predmete aritmetika a algebra s metodikou.

Reflektované zmeny v počte výskytu jednotlivých identifikovaných modelov sú pravdepodobne dôsledkom osvojenia si predmetných modelov daného konceptu v edukačnom procese. Priestor bol venovaný nielen prezentovaniu jednotlivých modelov, ale aj ich komparácii a analýzy možností aplikácie v primárnej matematickej edukácii, čo viedlo k ich hlbšiemu porozumeniu zo strany študentov.

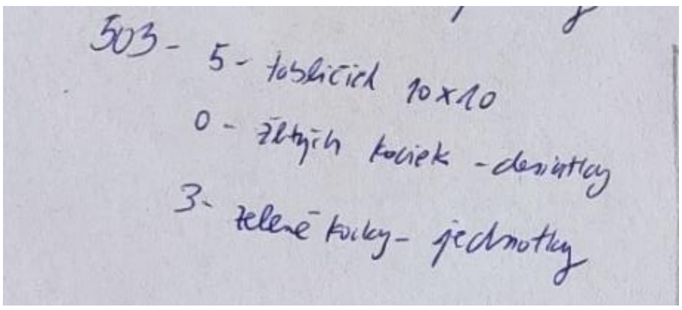
Na základe výsledkov realizovanej analýzy produktov študentov je možné konštatovať pomerne nízku mieru schopnosti hľadať a tvoriť prieniky a súvislosti medzi aktivitami realizovanými počas semestra. Jednotlivé témy sú pre nich, vo väčšine prípadov izolované, vnímané lineárne, o čom svedčí aj skutočnosť, že v analyzovaných písomných riešeniach sa vyskytli aj modely rímskych čísel (problematika číselných sústav).

Očakávalo sa, že skúsenosti s realizáciou praktických činností s edukačnými materiálmi s podporou technológie rozšírenej reality budú mať vplyv na uchopenie konkrétneho konceptu z elementárnej matematiky a v produktoch sa vyskytnú aj modely využívajúce dostupné applety. Výsledky analýzy ukazujú, že študenti nedokázali dostatočne implementovať skúsenosti zo samostatnej práce s appletmi, kedy mali vytvorenú príležitosť na ich analýzu, tvorbu vlastných návrhov na prácu s AR v tematickej oblasti zameranej na rôzne modely zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave. Dôvodom je pravdepodobne fakt, že vo väčšej miere bola reflektovaná a percipovaná forma a nie samotný obsah realizovaných činností. Pri analýze funkčnosti jednotlivých appletov sa matematický obsah dostal do úzadia a takmer nikto zo skupiny študentov si neuvedomil, že ide o ďalšiu možnosť pre modelovanie zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave. Dôkazom toho je výsledok, že len v štyroch prípadoch sa vyskytli typy modelov považované za analogické tým, ktoré boli prezentované v appletoch pre prácu s technológiou AR, resp. ich tvorba bola prácou s AR inšpirovaná.

4.3 Ukážky modelov typu AR_MODEL

Ako bolo v prezentovaných výsledkoch realizovanej analýzy uvedené, len v štyroch prípadoch boli identifikované modely zápisov čísel, ktoré sčasti korešpondujú s typmi reprezentácie čísla využitých v appletoch s podporou technológie rozšírenej reality. Predstavené budú konkrétne výstupy.

Ukážka 1: v zadaní išlo o vytvorenie zápisu trojciferného čísla päťstotri.



Obrázok 1. Model AR1

ISSN 2694-8133

Na obrázku 1 je uvedené:

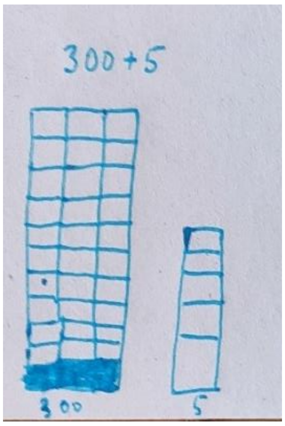
503 – 5 – tabličiek 10×10

0 – žltých kociek – desiatky

3 – zelené kocky – jednotky

Predstavený typ modelu možno považovať za model využívajúci elementy v jednom z appletov. Jednotky, desiatky a stovky sú modelované pomocou kociek (v tomto prípade rôznej farby), kde stovky sú prezentované ako „tablička“ (s rozmermi 10×10 kociek, tzv. jednotkových). Autorka prezentovala model na úrovni popisu, ktorý nie je doplnený o grafickú, či obrázkovú reprezentáciu. Pri zaznamenávaní modelu čísla postupovala od stoviek, cez desiatky ku jednotkám, s využitím identického elementu, kocky pre jednotky aj pre desiatky. V kontexte princípu desiatkovej číselnej sústavy by mali byť desiatky reprezentované ako objekt obsahujúci desať jednotiek (útvar zložený z desiatich kociek/jednotiek). Študentka diferencovala jednotky nultého a prvého rádu použitím kociek rôznej farby.

Ukážka 2: úlohou bolo vytvoriť rôzne zápisy trojciferného čísla tristopäť (obrázok 2).

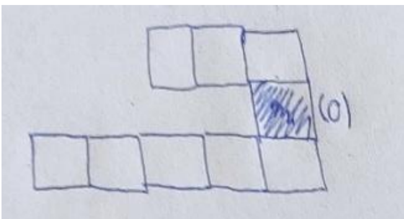


Obrázok 2. Model AR2

Číslo 305 je graficky znázornené a vytvorené z dvoch častí: (1) päť jednotiek – znázornené ako skupina piatich štvorcov (resp. kociek) uložených nad sebou vo zvislom smere a (2) tri stovky – skupina tridsiatich štvorcov v tvare troch desaťposchodových veží (považované za tri stovky). Nie sú diferencované elementy, symboly, ktoré sú použité na znázornenie jednotiek a stoviek, ale sú aplikované identické symboly, konkrétne štvorce. V prípade stoviek je jeden štvorec využitý na vyjadrenie jednej desiatky (na obrázku je ich trikrát po desať, t. j. spolu 30 desiatok).

Absentuje vysvetlenie dôvodu použitia symbolu daného typu. Ide o ukážku nekorektne uchopeného konceptu, princípu znázornenia, modelovania a vizualizácie rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave.

Ukážka 3: na obrázku 3 je prezentovaný model čísla 503, ktorého tvorba bola pravdepodobne ovplyvnená skúsenosťou s modelovaním čísel použitím appletov vytvorených na prácu s AR.



Obrázok 3. Model AR3

Číslo 503 je vymodelované pomocou štvorcov umiestnených v troch riadkoch, od stoviek smerom k jednotkám, v smere zdola nahor. Zaujímavá je konfigurácia štvorcov v jednotlivých riadkoch, kde ide o znázornenie sprava doľava. V prvom riadku sú znázornené stovky, ako päť štvorcov umiestnených vodorovne vedľa seba, v smere sprava doľava. Druhý riadok predstavuje rád desiatok, kde nie sú znázornené žiadne štvorce, resp. sú označené ako vyšrafovaný, či vyčiarknutý štvorec. Tretí riadok zdola je vytvorený z troch štvorcov analogicky vo vodorovnej orientácii, v smere sprava doľava. V prezentovanom znázornení trojciferného čísla sú použité identické elementy pre reprezentáciu jednotiek, desiatok aj stoviek, nie sú žiadnym spôsobom diferencované. Autorka neuvádza žiadne bližšie vysvetlenie, ktoré by mohlo viesť k detailnejšiemu porozumeniu procesu tvorby daného modelu.

5. Diskusia

Edukácia realizovaná s podporou mobilných zariadení je prostriedkom, ktorý môže obohatiť proces vzdelávania študentov a zlepšiť prípravu budúcich učiteľov (Gómez-García et al., 2021). Ak uvažujeme konkrétne o technológii rozšírenej reality, tak tá umožňuje vyučovanie na základe skúseností. Štúdie zamerané na možnosti využitia technológie rozšírenej reality v edukácii potvrdzujú nárast miery atraktivity vyučovania a učenia sa, ako aj zvýšenie motivácie žiakov, či študentov – budúcich učiteľov (Afnan et al., 2021; Boras, 2022; Demitriadou et al. 2020; Koparan et al., 2023; Koreňová et al., 2023; Nevřelová & Koreňová, 2022). Študenti, budúci učitelia na primárnom stupni vzdelávania si uvedomujú potenciál technológie AR, z pohľadu efektívnej edukácie aj v aktivitách realizovaných v čase mimo vyučovania (Koreňová et al., 2023).

Na druhej strane, výskumy zamerané na zistenie percipovanej miery užitočnosti použitia technológie rozšírenej reality v edukácii potvrdzujú len mierny nárast motivácie študentov (Gómez-García et al., 2021), čo ukazujú aj nami získané výsledky. Limity v predmetnej oblasti súvisia aj s technickou stránkou výskumov. Vývoj aplikácií na použitie s podporou technológie AR je možné realizovať len pri splnení istých podmienok, ktoré sú ovplyvnené aj vzdelávacím obsahom, napríklad obsahom elementárnej matematiky (Tzima et al., 2019). V uvedenom kontexte je dôležitý výber obsahových oblastí z matematiky, v ktorých bude technológia AR zmysluplne aplikovaná.

Sáez-López et al. (2020) posudzovali postoje budúcich učiteľov k zaradeniu technológie rozšírenej reality do univerzitného vzdelávania. Zdôraznené je, že študenti nevyužívajú tento zdroj pravidelne a edukácia s podporou technológie AR je z ich strany niekedy vnímaná ako prostriedok rozptýlenia ich pozornosti a dokonca aj ako plytvanie časom. Na druhej strane z analýzy výsledkov výskumu vyplýva, že ak sú pripravené kvalitné prostriedky, výučba je naplánovaná a učitelia sú na túto formu pripravení, tak práca s AR technológiou prináša výhody. Tie sú orientované na zvýšenie záujmu zo strany študentov o prácu s technológiou, rastie miera ich tvorivosti a motivácie. Výskum akcentuje potrebu vzdelávania budúcich učiteľov v oblasti aplikácie postupov s podporou technológie rozšírenej reality.

Podobne aj Osuna et al. (2019) prezentujú benefity zaradenia AR do výučby, kedy študenti prejavujú vysokú mieru spokojnosti a pozitívny postoj k jej využívaniu. Avšak výsledky štúdie indikujú aj niekoľko prekážok spojených s implementáciou AR do univerzitného vzdelávania. Sú medzi nimi uvedené nedostatky v oblasti odborného rastu, obmedzenia v miere skúseností, ako aj nedostatok inštitucionálnej podpory. Aj tu je deklarovaný nedostatočný počet výskumov realizovaných v predmetnej oblasti.

Mena et al. (2023) konštatujú nízku mieru využívania technológie rozšírenej reality študentmi – budúcimi učiteľmi predprimárneho a primárneho vzdelávania. Uvádzajú obmedzené využívanie technológie, ako dôsledok nedostatku štúdií v danej oblasti, z ktorých je väčšina orientovaných predovšetkým na výhody využívania AR vo vzdelávaní učiteľov. Poukazujú na potrebu skúmania využitia AR vo vzdelávaní budúcich učiteľov.

Výsledky výskumu (Boras, 2022) orientovaného na možnosti využitia AR technológie vo vyučovaní z pohľadu učiteľov, študentov a rodičov, poukazujú na jej širší význam v medzinárodnom vzdelávacom prostredí, kde implementácia AR predstavuje jeden z transformačných krokov k tvorbe zaujímavých a efektívnych edukačných prostredí.

Výskumné zistenia naznačujú, že pre efektívne zaradenie aplikácií s podporou AR do edukačného prostredia je nevyhnutné venovať pozornosť nielen technologickým aspektom, ale aj podpore v oblasti vzdelávania budúcich učiteľov. Podpora by mala byť orientovaná na tvorbu vzdelávacích projektov pre prípravu učiteľov, aby boli schopní efektívne integrovať AR technológie do vyučovania.

Prezentované čiastkové výsledky skúmania zameraného na jednu z možností začlenenia prostriedkov využívajúcich technológiu rozšírenej reality do matematickej edukácie korešpondujú s uvedenými zisteniami. Obsahovo bol predmetný výskum fokusovaný na konkrétnu oblasť elementárnej matematiky, na modelovanie rozvinutého zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave. Limity realizovanej analýzy súvisia s rozsahom výskumného súboru, ako aj s počtom hodín venovaných práci s nástrojmi využívajúcimi technológiu AR. Na základe analyzovaných výstupov, nie je možné formulovať relevantné závery na širšiu populáciu budúcich učiteľov. Ďalšie obmedzenia sa týkajú technického vybavenia inštitúcie, kde bol výskum realizovaný, ako aj výberu len jednej oblasti obsahu matematickej edukácie. Ďalší výskum by mohol byť orientovaný na analýzu percepcie efektivity práce s nástrojmi využívajúcimi technológiu rozšírenej reality v matematickej edukácii, v populácii budúcich učiteľov na primárnom stupni vzdelávania v národnom kontexte.

6. Záver

Súčasťou projektových cieľov (KEGA) bola analýza obsahu predmetov zaradených do pregraduálnej matematickej prípravy budúcich učiteľov elementaristov. V rámci nich boli identifikované tematické oblasti, v ktorých boli do výučby zaradené aktivity využívajúce technológiu AR. Jednou z vybraných tematických oblastí bola problematika zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave. Z pohľadu existencie rôznych typov modelov, na rôznej úrovni abstrakcie, boli pre túto tematiku vytvorené applety na aplikáciu technológie rozšírenej reality. Tie boli postupne zaradené do výučby na PF PU v Prešove so zámerom rozvíjať nielen matematickú, ale aj digitálnu gramotnosť študentov. Študenti vnímajú v nízkej miere potenciál technológie AR z pohľadu možností uplatnenia pri tvorbe modelov matematických konceptov. Uvedená skutočnosť korešponduje s výsledkami výskumov, v ktorých experimentovanie s AR mierne podporilo zvýšenie motivácie študentov, budúcich učiteľov primárneho vzdelávania, ako aj ich záujmu o prácu s novou dostupnou technológiou (Hnatová, 2022; Gómez-García et al., 2021). Výskum autorov Gómez-García et al. (2021), orientovaný na možnosti aplikácie technológie AR do prípravy budúcich učiteľov na základných školách, analyzoval percipovanú užitočnosť tohto prístupu k edukácii. Výsledky deklarujú miernu zmenu v úrovni motivácie študentov.

Na základe vyššie uvedeného sa ukazuje, že je potrebné implementovať didaktické prostriedky využívajúce technológiu AR do prípravy budúcich učiteľov elementaristov, so zámerom tvoriť viac príležitostí na poznanie prínosu a predností AR, čo vedie k efektívnemu využívaniu tejto technológie v pedagogickej praxi. To, akým spôsobom a s akým dopadom bude technológia rozšírenej reality zaradená do vyučovania, do značnej miery závisí od prístupu učiteľov a úrovne ich poznania možností práce s AR. Preto považujeme za dôležité, aby tieto skúsenosti získavali už počas svojho štúdia na vysokej škole.

Acknowledgements

Príspevok je výstupom grantového projektu KEGA 036PU-4/2021 *Technológia rozšírenej reality v profesijnej matematickej príprave budúcich učiteľov elementaristov.*

Literatúra

Afnan, Muhammad, K., Khan, N., Lee, M.-Y., Imran, A. S., & Sajjad, M. (2021). School of the Future: A Comprehensive Study on the Effectiveness of Augmented Reality as a Tool for Primary School Children's Education. *Applied Sciences*, *11*(11), Article 11. https://doi.org/10.3390/app11115277

ARCore. *ARCore supported devices*. https://developers.google.com/ar/devices

Boras, M. (2022). Augmented Reality in the Clasroom. *INTED2022 Proceedings*, 1411–1416. https://doi.org/10.21125/inted.2022.0421

Castaño-Calle, R., Jiménez-Vivas, A., Poy Castro, R., Calvo Álvarez, M. I., & Jenaro, C. (2022). Perceived Benefits of Future Teachers on the Usefulness of Virtual and Augmented Reality in the Teaching-Learning Process. *Education Sciences*, *12*(12), Article 12. https://doi.org/10.3390/educsci12120855

Demitriadou, E., Stavroulia, K.-E., & Lanitis, A. (2020). Comparative evaluation of virtual and augmented reality for teaching mathematics in primary education. *Education and Information Technologies*, *25*(1), 381–401. https://doi.org/10.1007/s10639-019-09973-5

Gómez-García, G., Hinojo-Lucena, F.J., Alonso-García, S., & Romero-Rodríguez, J. M. (2021). Mobile Learning in Pre-Service Teacher Education: Perceived Usefulness of AR *Technology in Primary Education. Education Sciences*, *11*(6), Article 6. https://doi.org/10.3390/educsci11060275

Hnatová, J., & Hnat, A. (2021). Matematický príbeh o mayskom kľúči s využitím AR. In *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let* (s. 1–10). Ústí nad Labem: UJEP.

Hnatová, J. (2022). Komparácia miskonceptov riešenia aplikačnej úlohy z geometrie študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie bez a s použitím technológie rozšírenej reality. In *Edukacja i społeczeństwo* (s. 133–143). Opole: Wyższa Szkoła Zarządzania i Administracji w Opolu.

Hnatová, J. (2023). *Technológia rozšírenej reality v matematickej edukácii: SWOT analýza*. Prešov: Vydavateľstvo PU.

Koparan, T., Dinar, H., Koparan, E. T., & Haldan, Z. S. (2023). Integrating augmented reality into mathematics teaching and learning and examining its effectiveness. *Thinking Skills and Creativity*, *47*, 101245. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2023.101245

Koreňová, L., Severini, E., & Cavojsky, I. (2023). The Use of Augmented Reality in the After School Club From the Point of View of Future Educators. *INTED2023 Proceedings*, 5254–5263. https://doi.org/10.21125/inted.2023.1360

Mena, J., Estrada-Molina, O., & Pérez-Calvo, E. (2023). Teachers' Professional Training through Augmented Reality: A Literature Review. *Education Sciences*, *13*(5), Article 5. https://doi.org/10.3390/educsci13050517

Mokriš, M. (2022). Analýza inkorporácie technológie rozšírenej reality do školskej matematiky – úroveň ISCEDI. In *Annales Paedagogicae Nova Sandes – Presoves.* (s. 136–141). Nowy Sacz: Akademia Nauk Stosowanych w Nowym Saczu

Nevřelová, N., & Koreňová, L. (2022). Usage of Augmented Reality App to Develop the Mathematical Competences of Children in Primary Education. *ICERI2022 Proceedings*, pp. 7553–7560. https://doi.org/10.21125/iceri.2022.1924

Osuna, J. B., Gutiérrez-Castillo, J. J., Llorente-Cejudo, M. del C., & Ortiz, R. V. (2019). Difficulties in the Incorporation of Augmented Reality in University Education: Visions from the Experts. *Journal of New Approaches in Educational Research*, *8*(2), Article 2. https://doi.org/10.7821/naer.2019.7.409

Prídavková, A., Šimčíková, E., Hnatová, J. & Tomková, B. (2021). *Matematika a hudobná výchova – interakčné stimulanty v primárnej edukácii*. Prešov. Pedagogická fakulta PU v Prešove.

Prídavková, A. (2022). Technológia rozšírenej reality a rozvoj matematických schopností. *Elementary Mathematics Education Journal*. *4*(1), 53–63.

Prídavková, A. (2023). Modelling of elementary mathematical concepts using augmented reality technology in primary education. *EDULEARN23 Proceedings*, pp. 7249-7254. https://doi.org/10.21125/edulearn.2023.1893

Radu, I. (2014). Augmented Reality in education: a meta-review and cross-media analysis, *Pers Ubiquit Comput*, *18*, 1533-1543.

Sáez-López, J.-M., Cózar, R., González-Calero, J. A., & Gomez Carrasco, C. (2020). Augmented Reality in Higher Education: An Evaluation Program in Initial Teacher Training. *Education Sciences*, *10*(2):26. https://doi.org/10.3390/educsci10020026

Tiede, J., Förster, K., Grafe, S. & Mangina, E. (2023). Augmented reality in primary education: teachers´ perspectives on potential and barriers. *INTED2023 Proceedings*, pp. 1283-1292. https://doi.org/10.21125/inted.2023.0369

Tzima, S., Styliaras, G., & Bassounas, A. (2019). Augmented Reality Applications in Education: Teachers Point of View. *Education Sciences*, *9*(2), Article 2. https://doi.org/10.3390/educsci9020099

ISSN 2694-8133

VYUŽITÍ VLASTIVĚDY VE VÝUCE MATEMATIKY NA 1. STUPNI

Eva VÁCHALOVÁ[1], Šárka PĚCHOUČKOVÁ[2]
[1] ZŠ Komenského 17, Domažlice (Česká republika)
[2] Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická (Česká republika)
vachalovaev@seznam.cz, pechouck@kmt.zcu.cz

Abstrakt

Propojení matematiky s ostatními předměty může žákům ukázat využití matematiky v jiných oborech lidské činnosti. Ve třetím, čtvrtém a pátém ročníku základní školy proběhla sonda, jejímž cílem bylo připravit, realizovat a reflektovat činnosti propojující historické a geografické poznatky s matematikou. Vycházeli jsme z Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání, konkrétně ze vzdělávací oblasti Člověk a jeho svět, a vytvořili jsme činnosti, které byly koncipovány tak, aby se žáci kromě procvičení matematických poznatků dozvěděli nové informace nebo si upevnili ty známé. V oblasti historie jsme pracovali s tématy pravěk, Řím, Marie Terezie, Rudolf II., v oblasti geografie jsme se zaměřili na Českou republiku a Prahu. Na základě výsledků a reflexí jednotlivých hodin jsme zjistili, že více motivační bylo pro žáky propojení s geografií.

Klíčová slova: matematika, mezipředmětové vztahy, geografie, historie, integrace, primární škola

THE USE OF HOME HISTORY IN THE TEACHING OF MATHEMATICS AT PRIMARY SCHOOL

Abstract

Connecting mathematics with other subjects can show students the use of mathematics in other fields of human activity. In the third, fourth and fifth years of primary school, a survey was conducted, the aim of which was to prepare, implement and reflect on activities connecting historical and geographical knowledge with mathematics. We used Framework Curriculum for Primary Education, specifically the educational area of Man and his world, as our base and we created activities that were designed so that, in addition to practicing mathematical knowledge, pupils would learn new information or consolidate what they already know. In the field of history, we worked with the themes of prehistoric times, Ancient Rome, Maria Theresa, Rudolph II., in the field of geography, we focused on the Czech Republic and Prague. Based on the results and reflections of the individual lessons, we found that the connection with geography was more motivating for the pupils.

Keywords: mathematics, interdisciplinary relations, geography, history, integration, primary school

1. Úvod

Do výuky matematiky na 1. stupni základní školy jsou úspěšně zařazovány aktivizační metody, mezi které patří také využívání mezipředmětových vztahů mezi matematikou a ostatními předměty, jež může zamezovat monotónnosti vyučování. Navazuje se tak na již získané vědomosti žáků nebo na jejich osobní zkušenosti. Tím dochází k odstranění izolovanosti jednotlivých poznatků.

2. Mezipředmětové vztahy

Podle Spousty (In Rakoušová, 2008, s. 16) „vyjadřují mezipředmětové vztahy jakýkoliv druh vzájemného více či méně intenzivního sblížení dvou nebo více objektů." Mezipředmětové vztahy ve výuce jsou založeny na principu prolínání souvislostí mezi jednotlivými předměty. Díky pochopení těchto souvislostí mohou žáci lépe porozumět poznatkům a jsou schopni řešit složitější úkoly (Drahovzal a kol., 1987).

Mezipředmětové vztahy jsou na počátku každé integrace a zároveň tvoří jednu z jejích úrovní. Integraci dělíme na vnitřní a vnější. U vnitřní integrace dochází ke koncentraci a koordinaci učiva (Rakoušová, 2008). Koncentrace je zaměření na jeden určitý problém, na který je nahlíženo z různých hledisek. Je utvořen nový syntetický předmět, díky kterému se na danou skutečnost díváme jako na celek na základě multimediálních mezipředmětových vazeb. Vedle koncentrace řadíme k vnitřní integraci také koordinaci. Hovoříme o provázanosti mezi jednotlivými předměty, jejich obsahy za pomoci mezipředmětových vztahů (Podroužek, 2007). Vnější integrací je konsolidace a komasace učiva. Výsledkem konsolidace je vznik samostatného předmětu. Při komasaci dochází k navýšení hodin pro jednotlivé předměty (Rakoušová, 2008). V našem případě se bude jednat o koordinaci učiva.

3. Sonda na základní škole

Ve třetím, čtvrtém a pátém ročníku základní školy se uskutečnila sonda, jejímž cílem bylo připravit, realizovat a analyzovat činnosti propojující historické nebo geografické poznatky s matematikou. Jednalo se tedy o spojení matematiky s vlastivědou. Vycházeli jsme z Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání, konkrétně ze vzdělávací oblasti Člověk a jeho svět, a vytvořili jsme činnosti, které byly koncipovány tak, aby se žáci kromě procvičení matematických dovedností dozvěděli nové informace nebo si upevnili již ty známé.

Vzdělávací oblast Člověk a jeho svět obsahuje pět témat:

- Místo, kde žijeme
- Lidé kolem nás
- Lidé a čas
- Rozmanitost přírody
- Člověk a jeho zdraví

Stěžejním pro nás bylo téma Lidé a čas, které se zabývá dějinami a časem jako takovým. Žáci se nejen učí orientovat v dějinách, ale zároveň je jim vysvětleno, proč a jak se čas měří, jak události v čase postupují a co utváří historii. Vychází se přitom z nejvýraznějších okamžiků v rodině, obci či regionu a poté se žáci seznamují s nejdůležitějšími událostmi v historii naší země (RVP ZV, 2021).

Pro každý výše uvedený ročník jsme připravili dvě tematicky zaměřené vyučovací hodiny:

- 3. ročník: Pravěk; Prázdniny v Římě
- 4. ročník: Česká republika; Praha
- 5. ročník: Marie Terezie; Rudolf II. Habsburský

Vzhledem k omezenému rozsahu článku podrobněji popíšeme jednu geograficky zaměřenou vyučovací hodinu a jednu hodinu zaměřenou na českou historii.

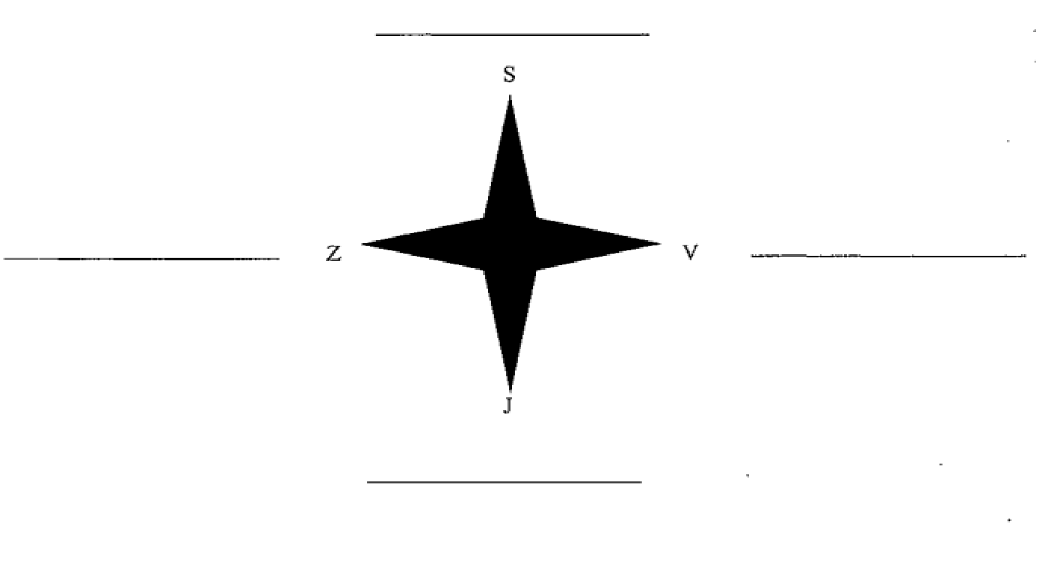
Česká republika (4. ročník)

V motivační části hodiny jsme žákům sdělili, že se budeme věnovat České republice. Zeptali jsme se, zda znají nějakou písničku, ve které se o České republice zpívá. Jeden žák odpověděl, že se o České republice zpívá v hymně. Zazpívali jsme si ji tedy. Poté jsme si připomněli, jak se jmenoval autor hudby, textu a kde poprvé hymna zazněla. Vyjmenovali jsme si rovněž zbylé státní symboly, mezi které kromě státní hymny patří malý a velký státní znak, státní barvy, státní vlajka, prezidentská standarda a státní pečeť.

Položili jsme otázku, zda vědí, jak se jmenuje současný český prezident, a na kolik let je jedno jeho volící období. Jméno současného prezidenta znali všichni žáci. Volebním obdobím si nebyli jisti, tudíž jsme jim objasnili jeho trvání, tedy 5 let. Také jsme si řekli, jak často se konají volby do Poslanecké sněmovny Parlamentu ČR a kolik politických stran je v něm zastoupeno. Na závěr jsme si připomněli, od kolika let mají občané právo volit.

Poté žáci pracovali s pracovním listem. Vždy samostatně vyřešili jeden úkol, který jsme zkontrolovali společně. Pak pokračovali řešením dalších úkolů.

V prvním úkolu (Obrázek 1) si žáci zopakovali znalosti týkající se České republiky. Nejprve doplnili název hlavního města ČR. Poté určovali, kolik států sousedí s Českou republikou. Dle nabídky zakroužkovali správný počet států. Ke správnému výsledku 4 došli až na jednoho žáka všichni. Poslední část tohoto úkolu byla zaměřena na hlavní a vedlejší světové strany. Na základě světových stran se žáci učí orientaci v prostoru, ale také v mapě. Nejdříve si museli vzpomenout, o jaké čtyři státy se jedná, poté určili, na jakou světovou stranu od nás sousední státy leží, a dopsali je na linky k daným světovým stranám. Na závěr do hvězdného kříže doplnili vedlejší světové strany. Po dokončení jsme na tabuli pověsili mapu České republiky a provedli jsme společnou kontrolu. V tomto úkolu chybovalo 5 žáků. Dva kromě špatné světové strany chybovali i při doplnění sousedních států.


Česká republika

1. a) Česká republika leží v samém srdci Evropy, její hlavní město se nazývá

____________ .

b) Víš, kolik států sousedí s Českou republikou? Zakroužkuj správný počet.

4 5 6 7

c) Na jakou světovou stranu od nás leží sousední státy? Napiš je na linky.

Do hvězdného kříže doplň vedlejší světové strany a označ je zkratkami.

Obrázek 1. První úkol (Česká republika)

ISSN 2694-8133

Druhý úkol byl propojen s českým jazykem. Žáci hledali ukrytá čísla ve větách (Obrázek 2). Pokud čísla našli, vyšel jim rok, ve kterém Česká republika vstoupila do Evropské unie. Tento úkol vyřešili všichni bez problémů. Velice je pobavilo jméno Ludva, které už dnes není tak běžné. Vysvětlili jsme jim, že se jedná o jméno německého původu Ludvík. Poté žáci jmenovali významné osobnosti z historie, které se takto jmenovaly (Ludvík Jagellonský nebo Král slunce Ludvík XIV.). Na závěr jsme dopočítali, kolik let uběhlo od vstupu České republiky do Evropské unie. Ke správnému výsledku 2 022 – 2 004 = 18 došli všichni žáci.

2) Česká republika je členem Evropské unie. Najdi ve větách ukrytá čísla a zjistíš, v jakém roce ke vstupu došlo.

- Ludva navštívil babičku v Krumlově.
- Střela minula cíl.
- Ráno jsem si promnula obličej.
- Počty řidičů na silnicích se stále zvyšují.

Obrázek 2. Druhý úkol (Česká republika)

Třetí úkol (Obrázek 3) navazoval na úkol předchozí, ve kterém se žáci dozvěděli, v jakém roce vstoupila Česká republika do Evropské unie. Nyní měli za úkol vypočítat obvod vlajky Evropské unie, která je dlouhá 225 cm a široká 150 cm. Ke správnému výsledku po dosazení do vzorce $o = 2 \cdot (a + b)$, $o = 2 \cdot (225 + 150) = 750\ cm = 7{,}5\ m$ nedošli pouze dva žáci. První chybující si správně napsal vzorec, ale při dosazení do vzorce zapomněl součet vynásobit dvěma, tudíž mu vyšlo číslo 375. Druhý chybující nesprávně převedl metry na centimetry. Vlajka by podle něj měla obvod $0{,}75\ m$.

3) Na obrázku vidíš vlajku Evropské Unie. Vypočítej její obvod, pokud je 225 cm dlouhá a 150 cm široká. Výsledek převeď na metry.

[8]

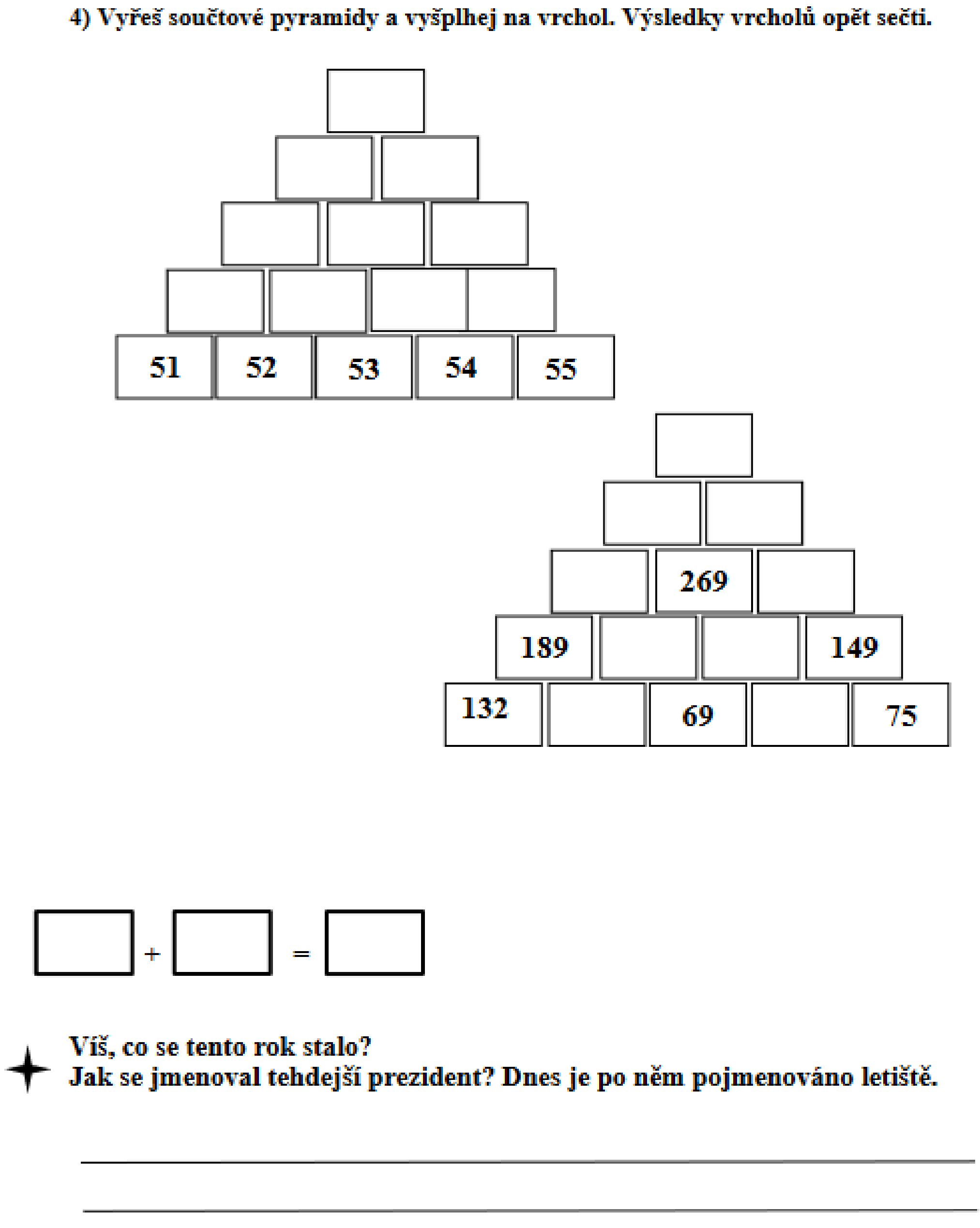
Výpočet:

Odpověď:

Obrázek 3. Třetí úkol (Česká republika)

ISSN 2694-8133

Čtvrtý úkol (Obrázek 4) byl pro žáky poměrně náročný. Sestával se z vyřešení součtových pyramid. První pyramida byla zaměřena na sčítání přirozených čísel v oboru do 1 000. Ve druhé si kromě sčítání procvičili žáci i odčítání, kdy na základě chybějících čísel museli dopočítat součet nebo rozdíl. S první pyramidou neměli žáci problémy, všichni došli k výsledku 848. Avšak s druhou si nevěděli rady. Společně jsme si vysvětlili postup. Po vypočítání jednoho řádku následovala kontrola. Doporučili jsme žákům počítat příklady písemně. Tři žáci se během výpočtů dopustili numerické chyby (např. jeden žák při posledním kroku chybně sečetl 584 + 561 = 1 144), ostatní došli ke správnému výsledku 1 145. Výsledná čísla pyramid opět sečetli, pokud počítali správně, získali číslo 1 993. Všichni věděli, že tento rok došlo ke vzniku samostatné České republiky a prvním českým prezidentem byl Václav Havel.



Obrázek 4. Čtvrtý úkol (Česká republika)

ISSN 2694-8133

Pátým úkolem byla slovní úloha (Obrázek 5). Obsahovala časové údaje, které si žáci museli nejprve převést na hodiny a minuty, aby s časy mohli dále pracovat. Ke správnému řešení (Anička dorazila do Brna ve 13 hodin a 12 minut. Evička dorazila ve 12 hodin a 47 minut. Anička dorazila o 25 minut déle než Evička.) došli všichni žáci.

5) Česká republika se skládá ze tří historických zemí – Moravy, Slezska a Čech. **Evička s Aničkou jely o prázdninách s rodiči na dovolenou do Brna. Evička vyjela v 8: 30. Anička vyjela za 5 minut 9. V kolik hodin dorazily, jestliže cesta z Domažlic do Brna trvá 4 hodiny a 17 min? O kolik minut dorazila Anička déle než Evička?**

Výpočet:

Odpověď:

Obrázek 5. Pátý úkol (Česká republika)

V rámci výše popsané vyučovací hodiny si žáci upevnili poznatky ze začátku školního roku. První úkol byl koncipován čistě geograficky. Zbylé úkoly byly početní s využitím přesahu do vlastivědy. Ve druhém úkolu můžeme zaznamenat i propojení s českým jazykem, neboť žáci v uvedených větách hledali ukrytá čísla. Žáci pracovali samostatně, pokud si nevěděli rady, byli jsme jim nápomocni. V úkolech s geografickou tématikou chybovalo 5 z 18 žáků. V početních úkolech docházelo k častějším chybám, a to zejména ve čtvrté úloze.

Rudolf II. Habsburský (5. ročník)

Na úvod hodiny jsme zvolili motivační hru Hádej, kdo jsem. Položili jsme žákům hádanku: *„Jsem mužského pohlaví. Řadím se k významným panovníkům konce 16. století. Pocházím z dynastie Habsburků. Jako jediný z tohoto rodu jsem přestěhoval svoje sídlo z Vídně do Prahy. Za mé vlády došlo k velkému kulturnímu a hospodářskému rozkvětu. Jsem velikým milovníkem umění a kultury. Abych měl kam uložit svoje sbírky, nechal jsem vybudovat na Pražském hradě Španělský sál. Kromě umění jsem se zajímal také o vědu. Se svými dvorními alchymisty jsem se snažil vyrobit elixír mládí, kámen mudrců či nápoj lásky. Trpěl jsem schizofrenií. Mým typickým poznávacím znakem je španělský oděv s velikým límcem a kloboukem.“*

Hádanku uhodli všichni žáci. Poté jsme si na interaktivní tabuli promítli nejznámější obrazy z rudolfínské éry, mezi něž patří např. Rudolfův portrét sestavený z ovoce a zeleniny od Guiseppeho Arcimbolda. Na závěr jsme žákům pustili ukázku z filmu Pekařův císař a císařův pekař, abychom jim lépe přiblížili život vědců a alchymistů této doby.

První úkol (Obrázek 6) byl zaměřen na pamětné sčítání, odčítání, násobení a dělení. Pokud žáci správně vypočetli příklady a přiřadili k výsledkům dané písmeno z tabulky, vyšla tajenka Rudolf II. Habsburský. Tento úkol nečinil žákům potíže.

ISSN 2694-8133

1. *Vypočítej a přiřaď k výsledku písmeno z tabulky:*

89 - 17 =
24 . 5 =
18 + 74 =
148 - 36 =
15 . 5 =
8 . 90 =
45 : 9 =
52 + 66 =
200 : 40 =

2 . 48 =
139 - 22 =
46 + 69 =
56 : 8 =
88 - 79 =
6 . 16 =
122 + 48 =
99 : 9 =

Tajenka:

118 - H	7 - U	720 - F	72 – R	5 - A	112 - O	115 – B	9 - R	96 - S
92 - D	75 - L	5 - II.	96 – B	11 - Ý	120 - U	117 – S	170 - K	

[14]

Obrázek 6. První úkol (Rudolf II. Habsburský)

Ve druhém úkolu (Obrázek 7) se žáci seznámili s nejvýznamnějšími vědci působícími na dvoře Rudolfa II. Jejich úkolem bylo zorientovat se v tabulce a na základě výpočtů odpovědět na uvedené otázky. Ke správnému řešení dospělo 11 žáků. Nejčastěji chybovali v otázce, kdo se narodil jako předposlední (Tycho de Brahe, Johannes Kepler).

Třetí úkol (Obrázek 8) byl složen ze tří slovních úloh. V první úloze se žáci dozvěděli další informace ze života Rudolfa II. Seznámili se s významnými malíři a alchymisty této doby. Poté zjistili, o kolik let byl Tycho de Brahe starší než Johannes Kepler. Ke správnému výsledku (25 let) dospěli až na jednoho žáka, který udělal numerickou chybu (1 571 – 1 546 = 26) všichni. Dále měli vypočítat, kolik bylo oběma astronomům let v roce 1583, kdy se Rudolf II. přestěhoval do Prahy. Ke správnému výsledku nedošel ani jeden žák. Mohlo to zapříčinit nadměrné množství textu, které vedlo k přehlédnutí otázky.

V následujícím úkolu se žáci přesunuli do zahrad Pražského hradu, kde byla chována exotická zvířata. Jejich úkolem bylo zjistit, kolik zvířecích nohou se proháněl po Pražském hradě. Ke správnému výsledku (44 nohou) dospělo 20 žáků. Čtyřem žákům vyšly chybné výsledky (40, 188, 54 a 48).

V poslední slovní úloze měli žáci za úkol vypočítat obvod a obsah podlahy Španělského sálu. Výpočet obvodu byl pro žáky snadný. Po dosazení do vzorce $o = 2 \cdot (a + b)$, $o = 2 \cdot (47 + 24)$ došli všichni k výsledku 142 metrů. Při dopočítání obsahu docházelo k častějším numerickým chybám. K chybnému výsledku došlo u 5 žáků (1 138, 1 127, 1 028 a 1 118).

2. Počítání s letopočty

Na dvoře Rudolfa II. žili nejvýznamnější vědci, seznam se s nimi pomocí výpočtů.

JMÉNO	POVOLÁNÍ	ŽIVOT
Rudolf II.	**Český král a německý císař**	**1552 – 1612**
Johannes Kepler	**Německý matematik a astronom**	**1571 – 1630**
Tycho de Brahe	**Dánský astronom a alchymista**	**1546 – 1601**
Guiseppe Arcimboldo	**Italský malíř a portrétista**	**1527 – 1593**

Kdo z těchto mužů se narodil jako první? ________________

Kdo se narodil jako předposlední? ________________

Kdo z nich se dožil nejvyššího věku? ________________

Kdo naopak nejnižšího? ________________

O kolik let se narodil Rudolf II. dříve než ty? ________________

Obrázek 7. Druhý úkol (Rudolf II. Habsburský)

Koncept tohoto pracovního listu se lišil od zbývajících. Byl připraven tak, aby byl pro žáky co nejvíce edukační. Obsahoval dlouhé texty, ve kterých byl podrobně připodobněn život Rudolfa II. Tento záměr shledáváme jako ne příliš úspěšný. Docházelo k tomu, že žáci nedočetli dlouhý text do konce a nezjistili tak informaci, která byla nutná pro splnění daného úkolu. To se projevilo zejména v první slovní úloze (třetí úkol z tématu Rudolf II. Habsburský), kde na druhou otázku neodpověděl ani jeden žák. Dlouhé texty také zapříčinily časovou náročnost vypracování, díky tomu byl pracovní list realizován během dvou vyučovacích hodin. Bylo by vhodné zvolit kratší texty a zmiňovanou edukaci zařadit do motivace před samotnou činností.

3. Vyřeš slovní úlohy:

a) Císař se mimo umění zajímal také o astronomii, matematiku, fyziku, chemii a jeho pozornosti neunikla ani alchymie či černá magie. Ne nadarmo se mu tedy přezdívalo „kníže alchymistů“. Není divu, že měl ve svých službách takové osobnosti, jako byli například astronomové **Tycho Brahe, Johannes Kepler, malíři Hans von Aachen, Arcimboldo, nebo alchymisté Edvard Kelley a John Dee**.
Víme, že Tycho de Brahe se narodil roku 1546, Johannes Kepler roku 1571.
O kolik let byl Brahe starší? V roce 1583 se císař Rudolf II. přestěhoval do Prahy, kolik jim v té době bylo let?

b) Za Rudolfa II. přibyly na Pražském hradě také konírny, ptáčnice a tzv. lví dvůr, kde byla chována následující exotická zvířata: **lev, 3 levharti, 2 tygři a leopard. Dále žilo v ovocném sadu 8 barevných papoušků. Kolik zvířecích nohou se celkem prohánělo po Pražském hradě?**

c) Jak jsme se již dozvěděli, Rudolf II. se mimo jiné zajímal i o umění. Jeho sbírka čítala více než 3 000 exponátů z různých oborů. Bylo tedy třeba najít pro tak velkou sbírku vhodné prostory a nezbývalo mu nic jiného než rozšířit část hradního areálu. Proto nechal postavit Španělský sál, do něhož byla uložena většina jeho obrazů. **Jaký je obvod a obsah podlahy Španělského sálu, jestliže je dlouhá 47 metrů a široká 24 m?**

Obrázek 8. Třetí úkol (Rudolf II. Habsburský)

4. Závěr

Na základě reakcí žáků, kteří se výše popsané sondy zúčastnili, se s integrací matematiky a vlastivědy setkali poprvé. Připravené úlohy je zaujaly, větší zájem však jevily o úlohy, které obsahovaly poznatky z geografie, než o ty, jež využívaly historii. Přes uvedené nedostatky se však ukázalo, že zařazování mezipředmětových vztahů do výuky je velice důležité, neboť může výuku oživit a aktivizovat žáky.

Acknowledgements

Článek vznikl v rámci realizace projektu GRAK č. 10/2023 „Integrace matematiky a dalších vzdělávacích oborů“.

ISSN 2694-8133

Literatura

Drahovzal, J., Kilián, O., & Kohoutek, R. (1997). *Didaktika odborných předmětů.* Brno: Paido.

Jeřábek, J. a kol. (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání RVP ZV: RVP ZV 2021 s vyznačenými změnami.* Dostupné z https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

Podroužek, L. (2007). Integrace poznatků v primární škole a využívání integrované výuky. In *Pedagogická praxe v primární škole* (s. 153-156). Plzeň: Západočeská univerzita.

Rakoušová, A. (2008). *Integrace obsahu vyučování v primární škole.* Praha: Grada.

EU Flag European Union Flag Idea Design [Obrázek]. Dostupné z https://www.publicdomainpictures.net/en/view-image.php?image=331539&picture=eu-flag-european-union-flag-idea-design

Rudolf II. Habsburský na portrétu od Hanse von Aachen [Obrázek]. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Rudolf_II.#/media/Soubor:AACHEN,_Hans_von_-_Portrait_of_Emperor_Rudolf_II_-_WGA.jpg

ZÁSADA NÁZORNOSTI V MATEMATICE S VYUŽITÍM PROGRAMU GEOGEBRA

Jan WOSSALA[1]
[1]Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)
jan.wossala@upol.cz

Abstrakt

Didaktické zásady jsou jednou z klíčových oblastí vzdělávacího procesu. Bez jejich dodržování mohou nastat problémy při dosahování vymezených cílů vzdělávání. Ve výuce matematiky lze názornost podpořit mnoha způsoby – různými modely, schématy, ilustracemi, obrázky. Digitální technologie nám nabízí další úroveň rozvoje názornosti při hodinách matematiky. V tomto článku jsou prezentovány příklady dobré praxe využitelné ve výuce matematiky s využitím programu GeoGebra. Tyto náměty mohou být inspirací pro vyučující, kteří zakomponování programu GeoGebra do své pedagogické praxe teprve zvažují.

Klíčová slova: matematika, dynamická geometrie, GeoGebra, názornost, konstruktivismus, síť tělesa, rozšířená realita

THE PRINCIPLE OF VISUALIZATION IN MATHEMATICS USING GEOGEBRA

Abstract

Didactic principles are one of the key areas of the educational process. Without adherence to them, problems may arise in achieving the defined educational objectives. In mathematics education, visualisation can be supported in many ways - by various models, diagrams, illustrations, pictures. Digital technologies offer us another level of development of visualisation in mathematics lessons. This article presents examples of good practice used in mathematics teaching using GeoGebra. These ideas can be an inspiration for teachers who are still considering incorporating GeoGebra into their teaching practice.

Keywords: mathematics, dynamic geometry, GeoGebra, visualization, constructivism, solid net, augmented reality

1. Úvod

Odborníci v oblasti pedagogiky po staletí usilovali o formulaci základních pravidel pro zajištění maximální efektivnosti výuky. Postupně tedy vznikal systém pedagogických zásad (principů). Někteří z autorů, kteří formulovali pedagogické zásady, byli J. A. Komenský, J. H. Pestalozzi a další.

Např. Jan Amos Komenský ve svém díle Analytická didaktika formuluje zásady takto:

- *Učitel nechť neučí, kolik sám může učiti, nýbrž kolik může žák pochopiti.*
- *Vždy postupně, nikdy skokem.*

- *Všemu, čemu se musíme učiti, nechť se učíme vlastní prací.*
- *Vše vlastními smysly, vždy a rozmanitě.*
- *Všemu se vyučuje a učí příklady, ukázkami a cvičeními.*
- *Nechť se vyučuje a učí: Nečetným před četnými. Krátkým před obšírnými. Jednoduchým před složenými. Obecným před zvláštními. Blízkým před odlehlejšími. Pravidelným před nepravidelnými (čili normálním před nenormálními).* (Kalhous, Obst, 2002).

Didaktické zásady jsou tedy obecné požadavky určující charakter výuky. Jsou formulovány v souladu se základními zákonitostmi výuky a s výchovnými a vzdělávacími cíli.

Jak je vidět na formulaci zásad J. A. Komenského, učení se všemi smysly, ukázkami apod. je jedním z důležitých aspektů vzdělávacího procesu.

Obecně můžeme shrnout didaktické zásady do těchto bodů:

- zásada komplexního rozvoje osobnosti žáka,
- zásada vědeckosti,
- zásada individuálního přístupu k žákům,
- zásada spojení teorie s praxí,
- zásada uvědomělosti a aktivity,
- zásada názornosti,
- zásada soustavnosti a přiměřenosti. (Kalhous, Obst, 2002).

V rámci zásady názornosti by tedy vyučující měl žákům či studentům umožnit vnímat předkládaný obsah, je-li to alespoň trochu možné, všemi smysly. Takovýto prožitek usnadní jejich rozumové poznávání (Kantorová a kol., 2008).

2. Názornost v matematice

Ilustrace či vizualizace nějaké situace je v matematice velmi důležitá. Jak uvádí Coulon a kol. (2023), za ilustraci lze považovat jakýkoli způsob, jakým lze přenést matematickou myšlenku do fyzické podoby nebo zkušenosti, včetně ručně vytvořených diagramů nebo modelů, počítačové vizualizace, 3D tisku nebo virtuální reality a mnoha dalších. Ač se ve svém článku o důležitosti ilustrace/vizualizace pro matematiku věnují složitějším problémům, jako např. Poincarého domněnce a tzv. Thurstonově geometrii, vyzdvihují důležitost dobrých ilustrací pro rozvoj matematických znalostí. Současně však upozorňují na složitost vytváření takovýchto silných a důvěryhodných ilustrací.

2.1. GeoGebra v matematice

Využití GeoGebry se věnuje celá řada odborných článků a výzkumů. Jak prezentují ve své studii Gökce a Güner (2022), GeoGebra bývá často využívána pro matematické modelování, vizualizaci, řešení problémů atd. Za jedny z hlavních předností bývá uváděna její dynamičnost, tedy možnost pohybu vstupních objektů. Také upozorňují na snahu přechodu studia GeoGebry od vyšších stupňů škol k nižším. Témata zkoumaná s využitím GeoGebry byla podle jejich studie publikovaných článků skutečně široká, od algebry, euklidovské geometrie, přes modelování, funkce, až po dokazování tvrzení.

Některé výzkumy navíc propojují matematiku s informatickým myšlením, jako např. výzkum autorů Yunianto, Prodromou a Lavicza (2023). Ve svém výzkumu se věnovali schopnosti studentů odlaďovat chyby v programech či matematických zápisech. GeoGebru vyzdvihují jako jeden z nástrojů, který umožňuje studentům naučit se odhalovat chyby při vytváření objektů a vkládání správné syntaxe.

Přínos využití GeoGebry ve výuce matematiky dokumentují ve svém výzkumu i Rahadyan, Kurniawan a Halimatussa (2023), kteří připravili kurz využívání tohoto programu ve výuce pro učitele a sledovali zlepšení některých jejich kompetencí. Věnovali se mimo jiné i řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, případně řešení kvadratických rovnic v programu GeoGebra. Zúčastnění učitelé vnímali, že získali praktické a cenné poznatky a dovednosti uplatnitelné v jejich pedagogické praxi.

Autoři Nocar a Zdráhal (2016) také prezentovali výsledky výzkumného projektu realizovaného na vzorku více než 70 studentů zaměřeného na efektivitu využívání programu GeoGebra, ale po samostudiu tímto způsobem se u studentů neprokázaly vždy lepší výsledky. Jako efektivnější považují využívání těchto nástrojů v rámci řízené výuky, kdy je stále důležitá role vyučujícího, který daný proces usměrňuje a vede žáky či studenty k jejich vlastnímu objevování. Tento trend je označován jako badatelsky orientovaná výuka a právě dynamičnost a interaktivita programu GeoGebra představuje ve výuce matematiky velký potenciál k samostatnému bádání a objevování.

2.2. Ukázky využití GeoGebry v pedagogické praxi

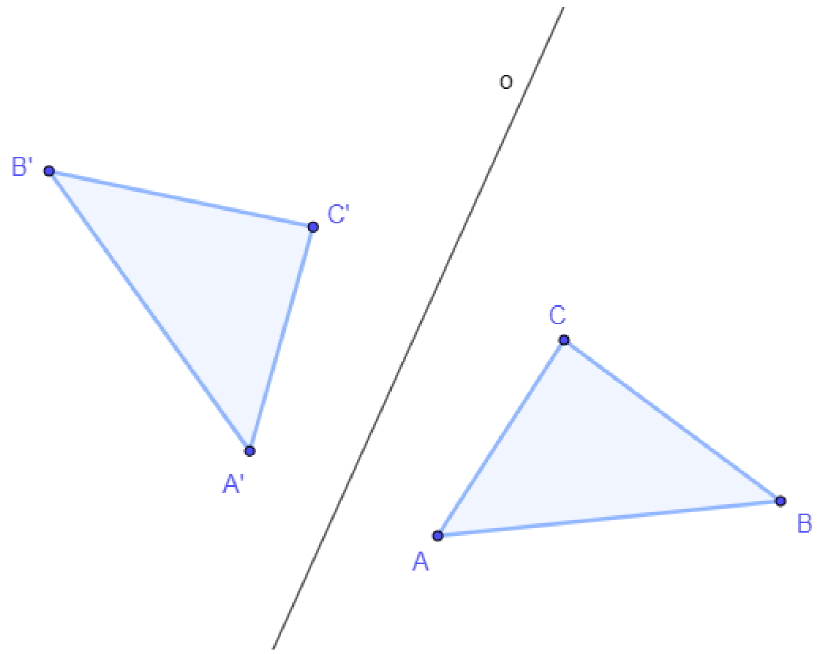
Ač mnoho lidí vnímá GeoGebru stále jako program „pouze pro rýsování", opak je pravdou. GeoGebra je dynamicky se rozvíjející program umožňující kromě řešení úloh z oblasti konstrukční geometrie i např. vykreslování grafů, využívání rozšířené reality apod.

Z oblasti geometrie bylo publikováno mnoho prací prezentujících efektivitu dynamických geometrií ještě i před vznikem programu GeoGebra, jako je např. Cabri, s ukázkami samostatného objevování žáky 1. stupně ZŠ na příkladech množin bodů dané vlastnosti (Nocar & Novák, 2015) nebo na příkladu konstrukce ortocentra u trojúhelníku a jeho polohových vlastností v závislosti na typu trojúhelníku (Nocar & Zdráhal, 2015).

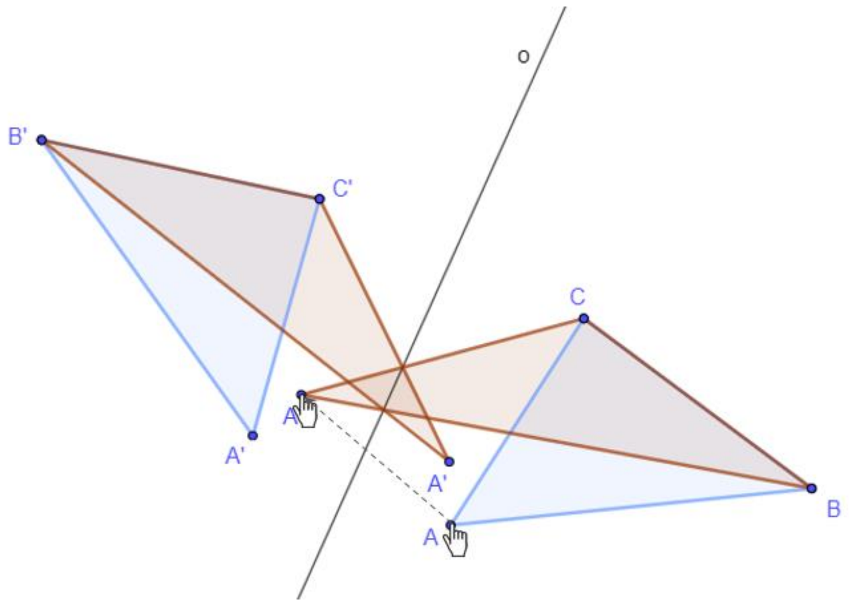
Pojďme se nyní podívat na několik příkladů využití programu GeoGebra pro řešení úloh z matematiky pro 2. stupeň ZŠ. Všechny uvedené úlohy byly vyzkoušeny v praxi se žáky základních škol v rámci projektových dnů s matematikou, případně se studenty učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

Jedním z témat, vhodných pro využití softwaru pro dynamické zobrazení geometrie, jsou osová a středová souměrnost. Po tom, co si žáci osvojí základní princip konstrukce úloh zaměřených na tato témata, potřebuje někdy vyučující rychle zobrazit různé situace, na jejichž konstrukci již není dostatek času v hodině. Může tedy sestrojit např. trojúhelník prostřednictvím funkce *mnohoúhelník*, pomocí tlačítka *přímka* pak osu souměrnosti a volbou funkce *osová souměrnost* v kategorii *zobrazení* pak sestrojí obraz trojúhelníka v osové souměrnosti.

Celý tento proces nezabere více jak půl minuty a pomocí tlačítka *ukazovátko* pak lze pohybovat vstupními objekty (tedy např. vrcholy trojúhelníka). Lze tak během pár kliknutí, které nezaberou více než několik sekund, zobrazit různé situace, které mohou nastat (např. osa souměrnosti leží vně trojúhelníka, osa souměrnosti prochází zadaným trojúhelníkem, některý z vrcholů trojúhelníka leží na ose souměrnosti, některá ze stran trojúhelníka leží na ose souměrnosti apod.) a při samostatných konstrukcích by bylo třeba jim věnovat velkou část vyučovací hodiny.



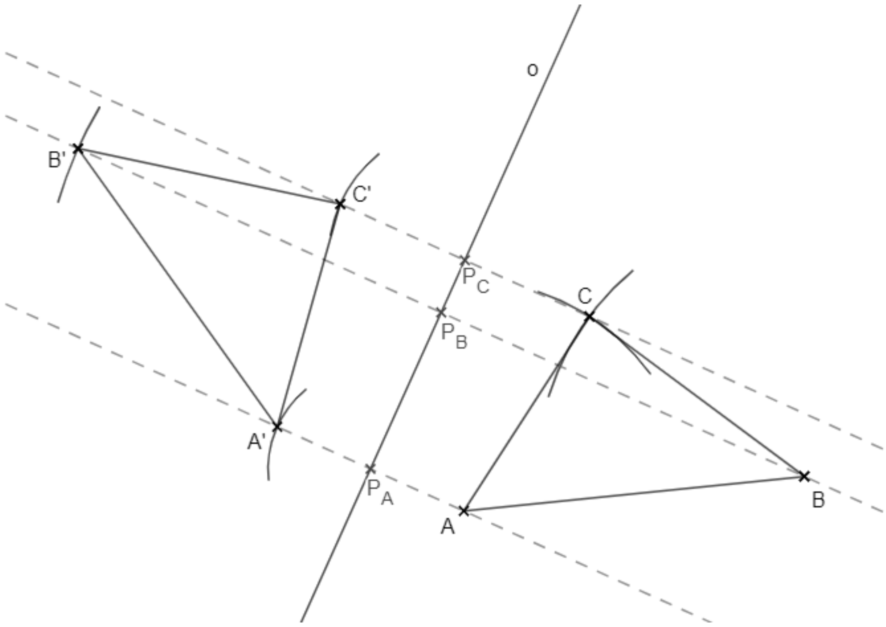
Obrázek 1. Ukázka konstrukce v programu GeoGebra
(vzor a obraz trojúhelníka v osové souměrnosti)



Obrázek 2. Ukázka dynamické úpravy konstrukce v programu GeoGebra
(změna pozice vrcholu A)

Současně však lze GeoGebru v rámci stejných úloh využít i jako „rýsovací papír“, přičemž žáci veškeré kroky konstrukce sestrojí jako na papíře s využitím kružítka a pravítka. Hlavním rozdílem je to, že využívají digitální technologii a zlepšují tak nejen své kompetence v oblasti matematiky, tak i své digitální kompetence.

Při takovémto řešení obdobné úlohy by se tak využila např. funkce *úsečka s pevnou délkou, kružnice daná středem a poloměrem, průsečík dvou objektů, kolmice, kružnice daná středem a bodem* apod. Dynamické prvky tak jsou v tuto chvíli pouze body *A* a *B*, resp. body určující přímku *o* (na obrázku deaktivována viditelnost těchto objektů).



Obrázek 3. Ukázka konstrukce v programu GeoGebra stejným postupem jako při konstrukci „na papíře“

Další výhoda konstrukcí v GeoGebře je pak to, že vyučující (resp. i žáci) mohou sestrojené úlohy exportovat jako obrázek a vložit si je do „digitálního sešitu“, resp. jakéhosi portfolia, případně vytisknout a zařadit do tradičního sešitu.

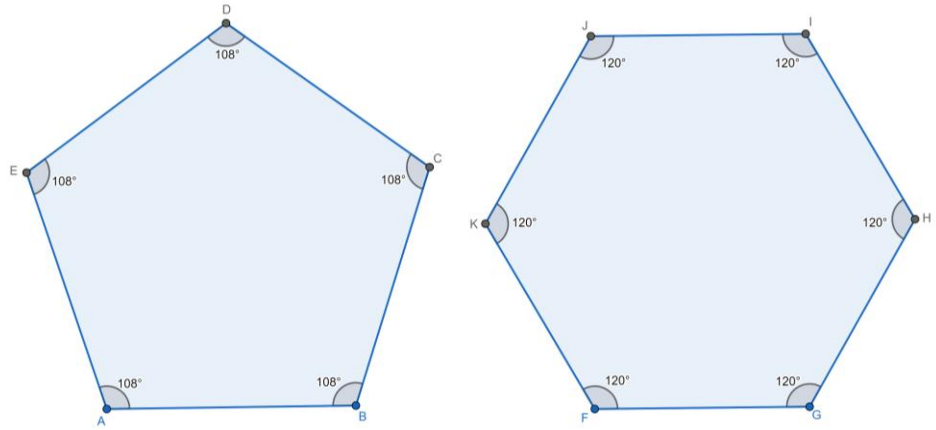
Dalším zajímavým způsobem využití GeoGebry je pomoc při řešení některých úloh, které využívají konstruktivistický přístup. Uveďme si jeden z mnoha případů – budeme-li s žáky probírat téma pravidelných *n*-úhelníků, zkusíme si určitě i konstrukce některých z nich. Po tom, co si žáci zkusí sestrojit pravidelný (rovnostranný) trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník a šestiúhelník, můžeme jim zadat k řešení úlohu „Určete způsob, jak bychom mohli určit součet velikosti vnitřních úhlů pro libovolný pravidelný *n*-úhelník, aniž bychom jej museli sestrojit.“

Při řešení takovéto úlohy mohou žáci postupovat různě, zkusme se podívat na jednu možnou úvahu. Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku a ve čtverci žáci znají již z hodin matematiky na 1. stupni ZŠ. Tyto údaje si mohou zapsat např. do tabulky (viz Tabulka 1). Do té si mohou vepsat počet vrcholů pravidelného *n*-úhelníku, pak velikost jednotlivých vnitřních úhlů, a nakonec součet velikosti vnitřních úhlů v uvedeném geometrickém útvaru.

Tabulka 1. Ukázka tabulky pro řešení úlohy na odvození součtu velikosti vnitřních úhlů

Počet vrcholů pravidelného *n*-úhelníku	**Velikost vnitřních úhlů**	**Součet velikostí vnitřních úhlů**
3		
4		
5		
6		

První dva řádky, pro výše uvedené útvary, by měli žáci tedy určit bez větších problémů i bez konstrukcí. Pro vypozorování zákonitosti (odvození vzorce) by bylo vhodné si určit ještě uvedené vlastnosti u několika následujících n-úhelníků. Zde již pravděpodobně žáci narazí na to, že si velikost vnitřních úhlů u pravidelného pětiúhelníku a šestiúhelníku již neurčovali. A zde přichází ke slovu opět možnost využití programu GeoGebra. Zde si mohou během několika kliknutí sestrojit oba uvedené geometrické útvary za pomoci funkce *pravidelný mnohoúhelník*. Funkce *úhel* pak okamžitě zobrazí velikosti vnitřních úhlů v obou útvarech.



Obrázek 4. Zobrazení velikosti vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku a šestiúhelníku v programu GeoGebra

Zjištěné údaje pak mohou žáci zapsat do připravené tabulky (viz Tabulka 2).

Tabulka 2. Ukázka tabulky pro řešení úlohy na odvození součtu velikosti vnitřních úhlů

Počet vrcholů pravidelného n-úhelníku	**Velikost vnitřních úhlů**	**Součet velikostí vnitřních úhlů**
3	60°	180°
4	90°	360°
5	108°	540°
6	120°	720°

Pro žáky by pak již mělo být snadné odvození, že obecně mohou součet vnitřních úhlů v pravidelném n-úhelníku určit pomocí vztahu:

$$s_u = (n-2) \cdot 180°$$

V takovémto typu úlohy tak žáci mohou využít mnoho oblastí matematiky od témat geometrie v rovině (žáci by si mohli uvědomit souvislost vnitřních úhlů zadaného n-úhelníku a jeho rozdělením na $n-2$ trojúhelníků), dále přes práci s daty, až po využití digitálních technologií v podobě „usnadnění si práce“ programem GeoGebra. Možných postupů řešení této úlohy je samozřejmě více, pro ilustraci zde uvádím pouze tento.

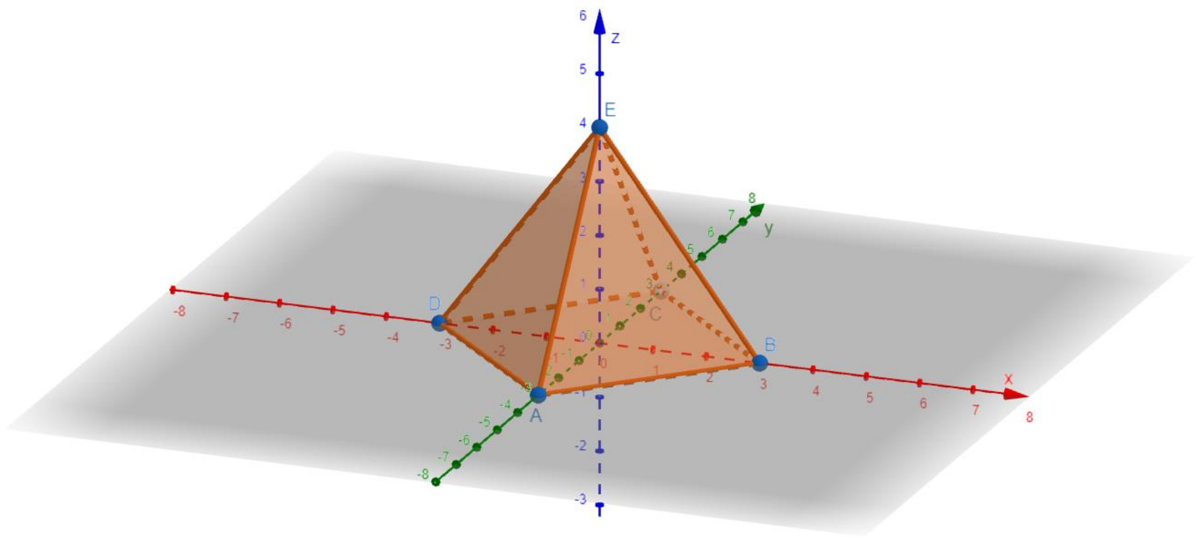
Další zajímavou oblastí, kde může GeoGebra zaujmout žáky a zvýšit názornost v hodinách matematiky, jsou např. sítě těles. Ve výuce lze často narazit na problémy žáků či studentů v této oblasti. Jejich hlavním argumentem často bývá, že nemají dobrou prostorovou představivost nebo že se této problematice nedostatečně věnovali při dřívějším vzdělávání. Navíc žáci i studenti si často pletou pojmy „obsah“ a „povrch“ a při řešení stereometrických úloh je zaměňují. Často pak nesprávně používají termín „obsah“ při výpočtu povrchu, přičemž pojem „obsah“ je pouze rovinný. Představa sítě tělesa je důležitá při výpočtu povrchu tělesa, neboť povrch tělesa lze ztotožnit s obsahem jeho sítě.

Pojďme se tedy podívat na další ukázku, jak GeoGebra může zvýšit názornost při probírání těchto témat.

Pro tento účel je třeba si zvolit 3D verzi programu GeoGebra. Tato aplikace nabízí kromě vykreslování grafů také konstrukci mnoha těles.

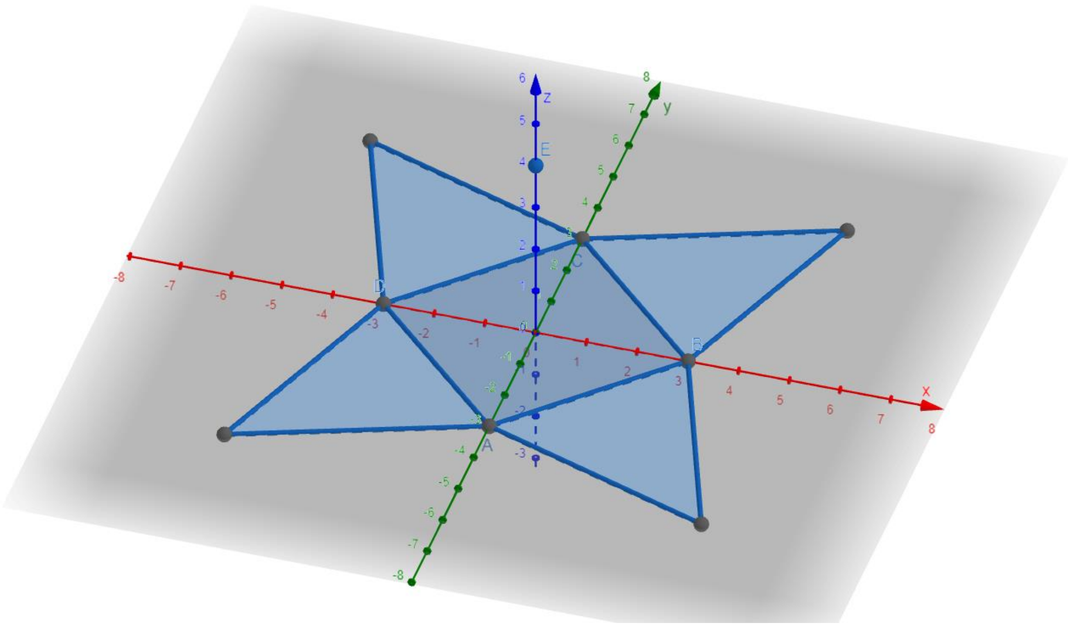
Obrázek 5. Nabídka těles v 3D verzi programu GeoGebra

Po volbě příslušného tělesa, které chceme prezentovat, ho během několika sekund sestrojíme. Zobrazené těleso pak můžeme pomocí ukazovátka zobrazovat ze všech možných úhlů a zlepšit tedy prostorovou představivost žáků.



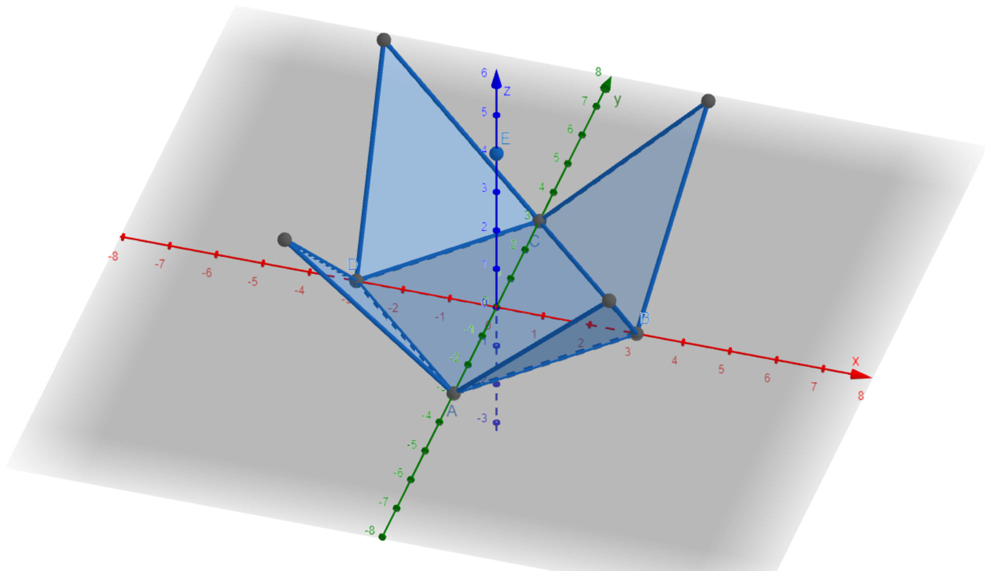
Obrázek 6. Jehlan v 3D verzi programu GeoGebra

Prostřednictvím funkce *síť* pak lze jednoduše zobrazit síť příslušného tělesa (mnohostěnu, GeoGebra prozatím neumí zobrazit síť tělesa, jako je např. válec či kužel). Síť tělesa si mohou žáci či studenti opět prohlédnout z libovolných úhlů, poslat do tisku či uložit si v podobě obrázku.



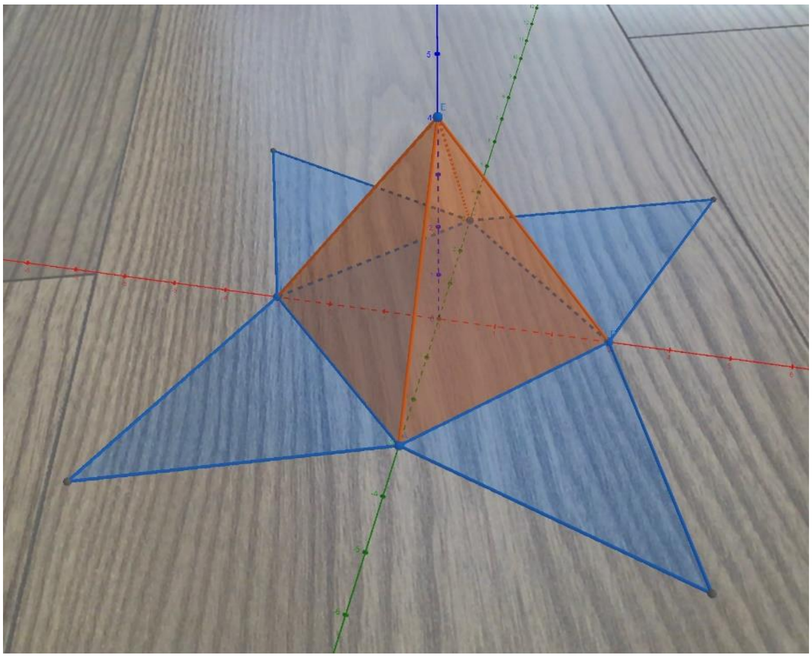
Obrázek 7. Pohled na síť jehlanu

Síť tělesa lze také jednoduše skládat, což opět přispívá k vyšší názornosti a rozvoji prostorové představivosti.

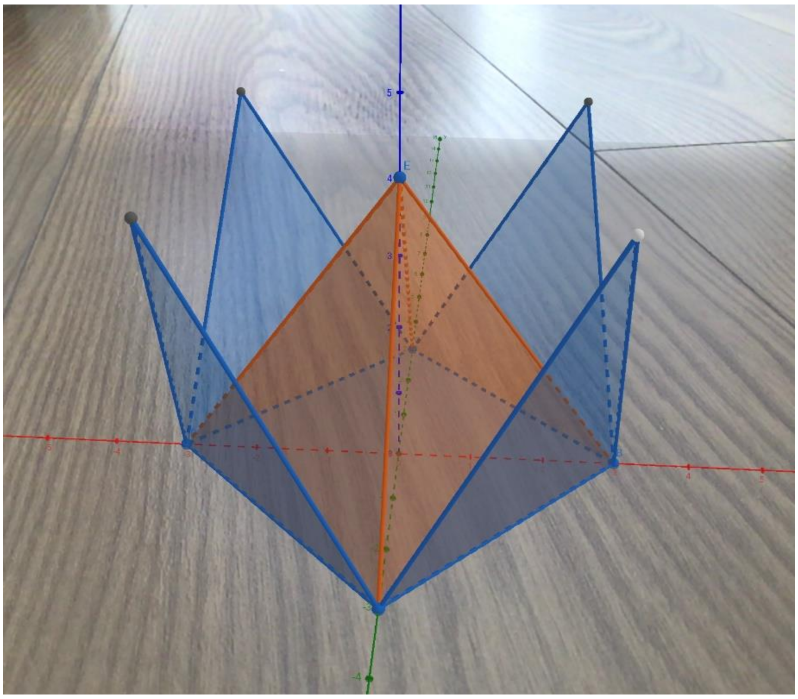


Obrázek 8. Skládání sítě tělesa

Pro zvýšení zájmu a názornosti pak je možné tyto funkce využívat i v rozšířené realitě. Je zapotřebí mít zařízení s kamerou, pak lze tlačítkem *AR* (augmented reality) aktivovat snímání obrazu kamerou, program si načte rovnou plochu, na kterou lze virtuálně umístit těleso. Pak už jen stačí na tuto plochu kliknout a těleso či síť tělesa se zobrazí v rozšířené realitě. Pohybem zařízení lze virtuálně prohlížet těleso či jeho síť ze všech možných úhlů, což může v některých žácích vzbudit větší zájem o tuto oblast matematiky.



Obrázek 9. Jehlan se sítí tělesa v rozšířené realitě



Obrázek 10. Skládání sítě tělesa v rozšířené realitě

3. Závěr

Využívání digitálních technologií je nejen užitečnou pomocí při řešení mnoha problémů běžného života, v kontextu současné společnosti a trhu práce se jedná také o jednu z klíčových dovedností, bez které se téměř nikdo neobejde. Tento faktor se čím dál častěji projevuje a taktéž požaduje ve vzdělávání. V hodinách matematiky je možnost využívat nepřeberné množství běžně dostupných programů, např. Microsoft Excel, Wolfram Cloud, PhotoMath, GeoGebra či další. Právě poslední zmíněná aplikace byla hlavním tématem tohoto článku a měla ilustrovat několik příkladů využití GeoGebry v pedagogické praxi. Tyto příklady mohou být inspirací pro ty vyučující, kteří zařazení GeoGebry či obecně digitálních technologií do hodin matematiky teprve zvažují.

Acknowledgements

Článek vznikl v rámci realizace projektu *Matematická gramotnost v kontextu digitálních kompetencí* (č. proj. IGA_PdF_2023_010) realizovaného na Katedře matematiky PdF UP v Olomouci.

Literatura

Coulon, R., Dorfsman-Hopkins, G., Harriss, E., Skrodzki, M., Stange, K., & Whitney, G. (2023). On the importance of illustration for mathematical research. *Notices of the American Mathematical Society, 71*(1). https://doi.org/10.1090/noti2839

Gökçe, S., & Güner, P. (2022). Dynamics of GeoGebra ecosystem in mathematics education. *Education and Information Technologies. 27*. https://doi.org/10.1007/s10639-021-10836-1.

Kalhous, Z., & Obst, O. (2002). *Školní didaktika*. Praha: Portál.

Kantorová, J. a kol. (2008). *Vybrané kapitoly z obecné didaktiky I.* Olomouc: Hanex.

Nocar, D. & Novák, B. (2015). Objevujeme s Cabri. *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Universitatis Catholica Ružomberok 2015, No 2*. Ružomberok: Verbum – vydavateľstvo Katolickej univerzity

Nocar, D., & Zdráhal, T. (2015) The potential of dynamic geometry for inquiry based education, *EDULEARN15 Proceedings*, pp. 4992-4998, Barcelona: IATED

Nocar, D., & Zdráhal, T. (2016). Efektivita softwaru dynamické geometrie při samostudiu na příkladě jednoho geometrického konceptu. *Trends in Education, 9*(1), 198-204. https://doi.org/10.5507/tvv.2016.027

Rahadyan, A., Kurniawan, I., & Halimatussa'diah. (2023). Implementation of Geogebra in Mathematics to Improve the Skills of Teachers. *Jurnal Masyarakat Mandiri, 7*, 530. https://doi.org/10.31764/jmm.v7i1.12352

Yunianto, W., Prodromou, T., & Lavicza, Z. (2023). Debugging on GeoGebra-based Mathematics+Computational Thinking lessons. In *The Electronic Proceedings of the 28th Asian Technology Conference in Mathematics*. Pattaya, Thailand.

ISSN 2694-8133

MODELOVÁNÍ ZLOMKŮ V PŘEDMATEMATICKÉ PŘÍPRAVĚ

Renáta ZEMANOVÁ[1]
[1]Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
renata.zemanova@osu.cz

Abstrakt

Ve většině učebnicových řad matematiky pro 1. stupeň ZŠ je téma zlomků zařazeno až do 4. ročníku, a to v kompletním pojetí modelování, čtení modelů, formálního zápisu a operací se zlomky se stejným jmenovatelem ve formálním zápisu. Jedná se o kritické místo ve výuce matematiky (Rendl, Vondrová, 2013), kdy žák velmi rychle přechází k formálnímu zápisu a jeho vizualizace se ztrácí. Zlomek pak po celou dobu chápe jako symbolický zápis, nikoli část reálného celku a operace provádí podle naučených algoritmů. Když tyto algoritmy zapomene, není schopen zlomky s různým jmenovatelem ani sečíst. Přitom se ukazuje, že téma kmenového zlomku je snadno uchopitelné už pro předškolní děti a že jejich zkušenosti jim umožňují s modely kmenových zlomků pracovat. Dlouhodobou přípravou založenou na manipulativních činnostech a vizualizaci pak tyto ve školním vzdělávání téma zlomků uchopují s velmi dobrým porozuměním. Analyzujeme porozumění zlomkům polovina a třetina u dětí ve věku 4–7 let. V sérii návazných činností identifikujeme způsoby vizualizace zlomků, schopnost různého vyjádření stejného zlomku, vazbu mezi uchopením izomorfních úloh na různých modelech zlomku a s ohledem na výsledky diskutujeme další možnosti budování porozumění zlomkům u dětí předškolního věku.

Klíčová slova: zlomek, modely zlomku, didaktické prostředí, genetický konstruktivismus, genetická metoda výuky matematiky, izomorfismus úloh

MODELING OF FRACTIONS IN PRE-MATHEMATICS PREPARATION

Abstract

In most mathematics textbook series for the 1st grade of elementary school, the topic of fractions is included up to the 4th grade, namely in the complete concept of modeling, reading models, formal notation, and operations with fractions with the same denominator in formal notation. This is a critical point in the teaching of mathematics (Rendl, Vondrová, 2013) when the student very quickly moves to formal notation and his visualization is lost. It then understands the fraction all the time as a symbolic notation, not a part of a real whole, and performs operations according to learned algorithms. When he forgets these algorithms, he is unable to even add fractions with different denominators. At the same time, it is shown that the topic of stem fractions is already easy to grasp for preschool children and that their experience allows them to work with stem fraction models. Through long-term preparation based on manipulative activities and visualization, they grasp the topic of fractions in school education with a very good understanding. We analyze the understanding of the fractions half and third in children aged 4–7 years. In a series of follow-up activities, we identify ways of visualizing fractions, the ability to express the same fraction in different ways, the connection between grasping isomorphic tasks on different models of fractions, and with regard to the results, we discuss other possibilities for building understanding of fractions in preschool children.

Keywords: fraction, fraction models, didactic environment, genetic constructivism, genetic method of teaching mathematics, task isomorphism

1. Úvod

Výuka zlomků na 1. stupni ZŠ prošla v České republice dynamickým vývojem. Aktuálně má žák v souladu s Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (RVP ZV) v očekávaných výstupech 5. ročníku modelovat a určit část celku (1), používat zápis ve formě zlomku (2), porovnat, sčítat a odčítat zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel (3). V očekávaných výstupech 3. ročníku zlomky nejsou zastoupeny v žádné podobě. Mnoho učitelů tak často zařadí celé téma zlomků až do 4.–5. ročníku, bez předchozích zkušeností žáků s dělením celku zavede formální zápis zlomků a současně sčítání a odčítání takto zapsaných zlomků. Znalosti žáků jsou pak formální, nedovedou si ve formálním zápisu zlomků představit reálný model a pracují jen podle algoritmů. Obtíže českých žáků dokumentuje Jirotková, Peclinovská (2015) v reálných úlohách TIMSS (2011, 2015), kdy více než 60 % žáků 4. ročníků ZŠ z nabídky $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ jako největší vybere $\frac{1}{5}$ a zdůvodňuje např. tak, že je „číslo 5 největší, celek rozdělen na největší počet dílů“.

Praxe ukazuje, že téma zlomku, a to zejména kmenového, je v didakticky příznivém prostředí snadno uchopitelné již pro dítě předškolního věku. Rozdělování celku na stejné části prostřednictvím výzvy ke spravedlivému dělení je dětem blízké a mají s ním reálné zkušenosti. Pokud učitel téma buduje kontinuálně prostřednictvím vhodných modelů, dokáže žák na výstupu z 5. ročníku nejen splnit očekávané výstupy RVP, ale jít hlouběji – např. s porozuměním sčítat a odčítat zlomky s různým jmenovatelem a později poznatky zobecnit do standardního „převodu na společného dělitele“.

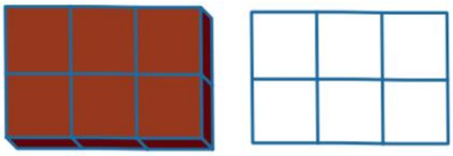
Stavíme na genetickém konstruktivismu (Kvasz, 2016), principech genetické metody výuky matematiky (Hejný, 2014) a didaktických prostředích (Hejný, 2012). Využíváme Vygotského teorie zóny nejbližšího vývoje (Vygotskij, 1970), přičemž výzvy k modelování zlomků směřujeme do individuální zóny každého žáka. Ve výzkumné části pracujeme pouze s kmenovými zlomky v souladu s principem genetické paralely, když nekmenové zlomky jsou ve vývoji lidstva využívány mnohem později a velmi krátce v porovnání se zlomky kmenovými.

2. Metodologie šetření

Připravili jsme gradovanou sérií činností, kdy zlomek modelujeme na obdélníku (čokoláda), kruhu (pizza), úsečce (tyč) a počtu (bonbóny). Používáme pojmy polovina a třetina. Vždy začínáme činností, kterou má dítě propojenou na mimoškolní prostředí (rozděl čokoládu, pizzu, bonbóny…), následuje grafický záznam (vybarvi, odděl čárou…).

<u>Čokoláda</u>

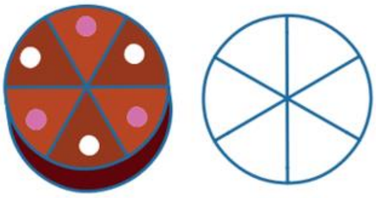
- Spravedlivě rozděl (reálnou) čokoládu mezi Adama a Blažeje a urči, kolik čtverečků dostane Adam, kolik Blažej. Použili jsme čokoládu Kámoši (výrobce Orion), která má 3×6 čtverečků. Důvodem volby byla dostupnost pro experiment, snadné rozdělení a malý počet čtverečků pro činnost s předškolními dětmi.
- Spravedlivě rozděl mezi Adama a Blažeje, vybarvi Adamovu část modře, Blažejovu část červeně (urči, kolik čtverečků dostane Adam, kolik Blažej), Obrázek 1.
- Spravedlivě rozděl (reálnou) čokoládu mezi Adama, Blažeje a Cyrila a urči, kolik čtverečků dostane Adam, kolik Blažej, kolik Cyril.
- Spravedlivě rozděl mezi Adama, Blažeje a Cyrila, vybarvi Adamovu část modře, Blažejovu část červeně, Cyrilovu část žlutě (urči, kolik čtverečků dostane Adam, kolik Blažej, kolik Cyril), Obrázek 1.



Obrázek 1. čokoláda

Pizza

- Spravedlivě rozděl (reálnou kruhovou) pizzu mezi Adama a Blažeje a ukaž, jakou část dostane Adam, jakou Blažej.
- Spravedlivě rozděl mezi Adama a Blažeje, vybarvi Adamovu část modře, Blažejovu část červeně (urči, kolik dílků dostane Adam, kolik Blažej), Obrázek 2.
- Spravedlivě rozděl (reálnou kruhovou) pizzu mezi Adama, Blažeje a Cyrila a ukaž, jakou část dostane Adam, jakou Blažej, jakou Cyril.
- Spravedlivě rozděl mezi Adama, Blažeje a Cyrila, vybarvi Adamovu část modře, Blažejovu část červeně a Cyrilovu část žlutě (urči, kolik dílků dostane Adam, kolik Blažej, kolik Cyril), Obrázek 2.



Obrázek 2. pizza

Tyč

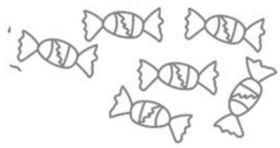
- Polovinu tyče vybarvi červeně, zbytek zeleně. Jakou částí tyče je zelená část? Obrázek 3.
- Třetinu tyče vybarvi červeně, zbytek zeleně. Jakou částí tyče je zelená část? Obrázek 3

Obrázek 3. tyč

Bonbóny

- Spravedlivě rozděl (reálné) bonbóny mezi Adama a Blažeje a urči, kolik bonbónů dostane Adam, kolik Blažej. Použili jsme postupně čtyři, osm a deset balených bonbónů.
- Spravedlivě rozděl šest bonbónů mezi Adama a Blažeje, vybarvi Adamovu část modře, Blažejovu část červeně (urči, kolik bonbónů dostane Adam, kolik Blažej), Obrázek 4
- Spravedlivě rozděl (reálné) bonbóny mezi Adama, Blažeje a Cyrila a urči, kolik bonbónů dostane Adam, kolik Blažej, kolik Cyril. Použili jsme postupně devět, dvanáct a patnáct balených bonbónů.

- Spravedlivě rozděl šest bonbónů mezi Adama, Blažeje a Cyrila, vybarvi Adamovu část modře, Blažejovu část červeně, Cyrilovu část žlutě (urči, kolik bonbónů dostane Adam, kolik Blažej, kolik Cyril), Obrázek 4.



Obrázek 4. bonbóny

Série úlohy na obdélníku a kruhu byly doplněny překládáním obdélníkového a kruhového papíru. Pro tyč a bonbóny tyto aktivity zadávány nebyly, ačkoli například k tyči jsme zvažovali aktivitu dělení provázku. Výzvy pro polovinu byly formulovány takto:

- přelož napůl,
- vybarvi polovinu,
- urči, jaká část zůstala nevybarvena,
- hledej jiné řešení, jak přeložit.

Výzvy pro třetinu byly formulovány takto:

- přelož na tři stejné části,
- vybarvi třetinu,
- urči, jaká část zůstala nevybarvena,
- hledej jiné řešení, jak přeložit.

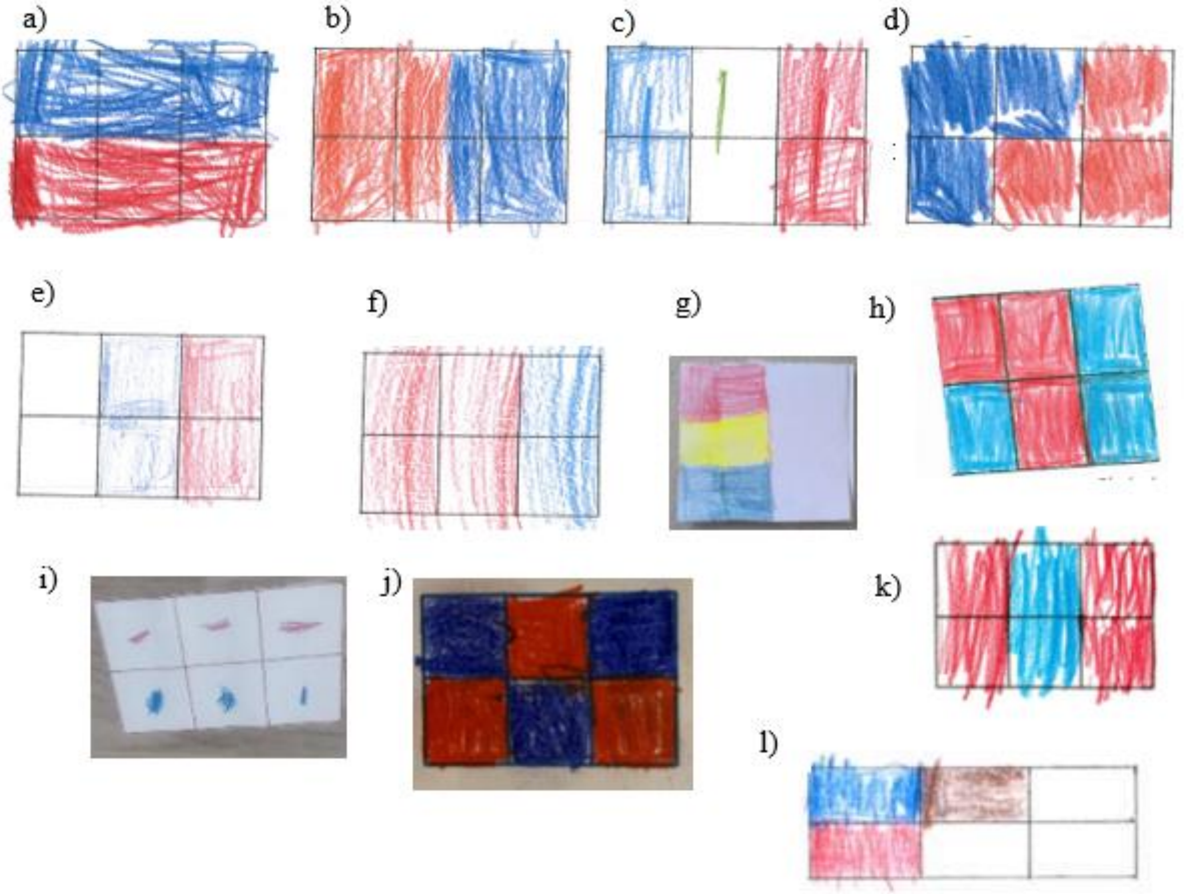
V roli proškolených experimentátorů vystoupilo 24 studentů programu Předškolní pedagogika Pedagogické fakulty Ostravské univerzity, experiment provedli v březnu 2023. Nejprve činnosti sami vyzkoušeli, poté připravili predikci výsledků dětí. Experiment realizovali s dětmi v předškolním vzdělávání, ve věku 4–7 let. Výběr dětí byl dán možnostmi experimentátorů, od dětských skupin v mateřských školách po jednotlivé děti z rodiny experimentátora. Výsledky manipulativních činností s reálnými předměty popisovali a komentovali experimentátoři slovně, grafické zpracování vyfotili a komentovali. Zaměřili jsme se na výsledky s ohledem na uchopení úlohy a strategie řešení, tyto jsme analyzovali.

Kvalita některých obrázků není dobrá, ale jedná se o autentické fotografie dětských řešení. Děti často vybarvovaly velmi slabě, což způsobilo tuto obtíž. Strategie na prezentovaných méně kvalitních obrázcích jsou však natolik důležité pro naši analýzu (často jediný typ strategie), že tyto fotografie prezentujeme.

3. Analýza řešení

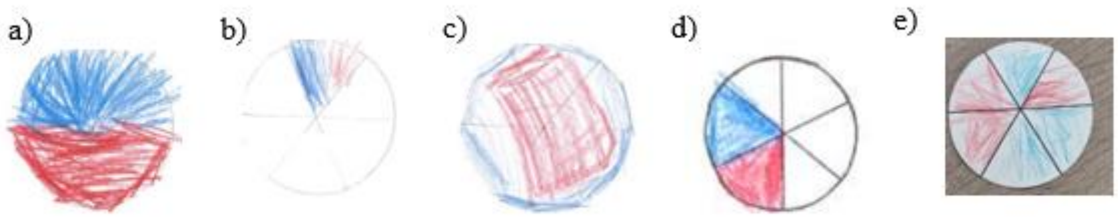
V dělení čokolády na poloviny se vyskytlo dvanáct různých řešení, Obrázek 5 a–l. Zajímavé by bylo sledovat, v jakém pořadí děti čtverce vybarvovaly, ale tyto záznamy nemáme kompletní. Např. v případě videozáznamu dítěte 11-1, které postupuje způsobem h) víme, že dítě vybarvovalo po jednotlivých čtvercích se slovy „jeden, jeden, jeden – jeden, jeden, jeden – jeden, jeden, jeden“. Řešení i odpovídá řešení a, změnila se jen konvence záznamu. Řešení a, b, d, h, i, j byly ochotny přijmout ostatní děti a některá z nich později napodobovat. Řešení c, e, g, l byla odmítnuta s argumentem, že část obrázku zůstala nevybarvena. V řešení g zůstala nevybarvena polovina, v řešeních c, e, třetina obrázku. Nevíme, proč autor použil třetí barvu (c – zelenou, g – žlutou, l – hnědou).

ISSN 2694-8133



Obrázek 5. Ukázka strategie – poloviny čokolády

V dělení kruhu na poloviny se vyskytlo pět různých řešení, Obrázek 6 a–e. Řešení a, e byly ochotny přijmout ostatní děti a některá z nich později napodobovat. Řešení 6e korespondovalo s řešením 5j, h. Řešení b, c, d byla odmítnuta s argumentem, že část obrázku zůstala nevybarvena. Zajímavé je, že děti, které pracovaly postupem 5e (namísto poloviny vybarvily $\frac{2}{6}$), pokračovaly postupem 6d (namísto poloviny vybarvily jen $\frac{1}{6}$).

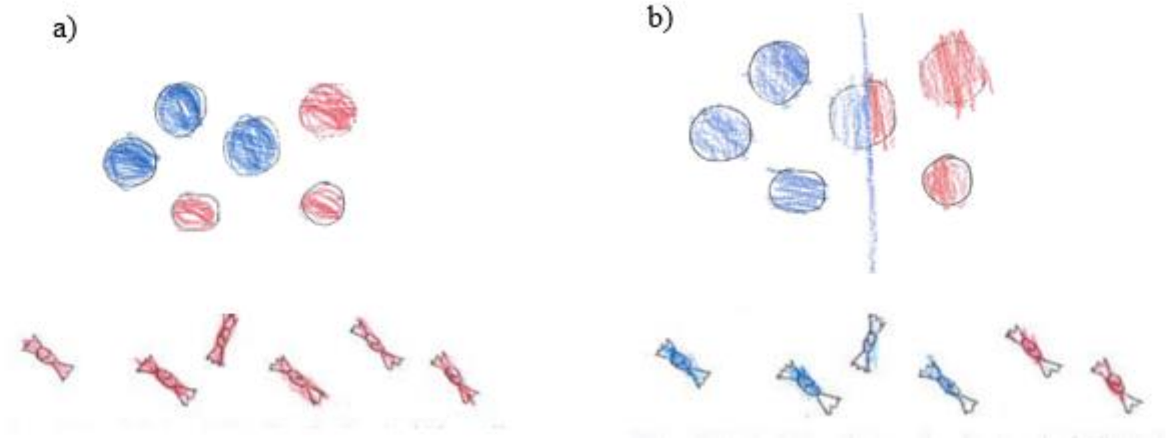


Obrázek 6. Ukázka strategie – poloviny kruhu

V dělení tyče na poloviny se vyskytla dvě různá řešení, Obrázek 7 a–b. Většina dětí použila řešení 7a, úlohu považovaly za nejjednodušší.

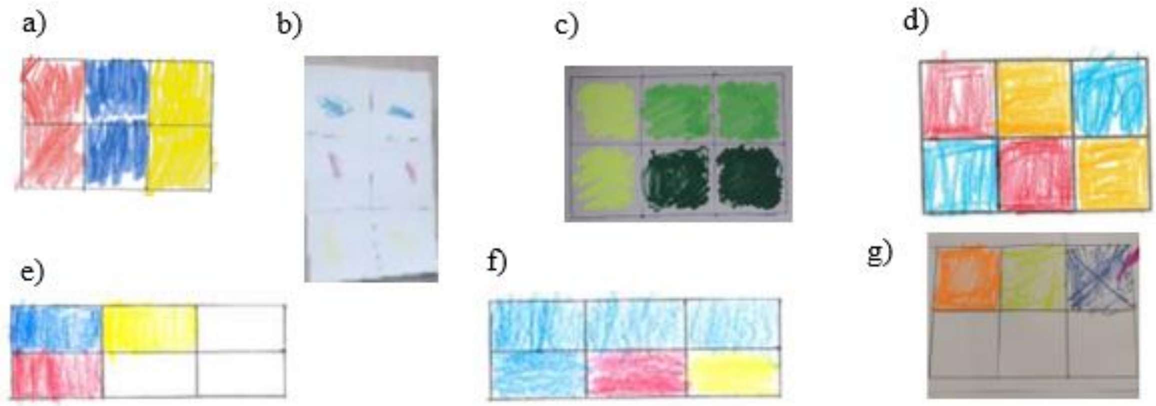
Obrázek 7. Ukázka strategie – poloviny tyče

V dělení bonbónů na poloviny se vyskytla čtyři různá řešení, Obrázek 8 a–d. Některá řešení děti nezaznamenávaly do předtištěného obrázku, Obrázek 4, ale nakreslily si samy symboly bonbónů, Obrázek 8 c, d. Proč tomu tak bylo, nevíme.



Obrázek 8. Ukázka strategie – poloviny bonbónů

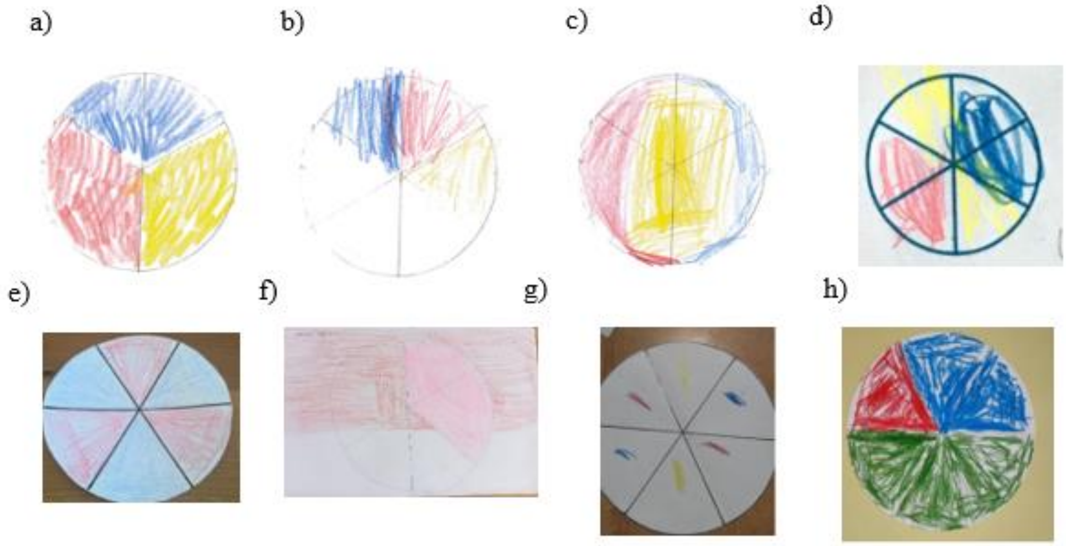
V dělení čokolády na třetiny se vyskytlo sedm různých řešení, Obrázek 9 a–g. V dělení tyče na jednu a dvě třetiny sedm různých řešení, Obrázek 11 a–g. Záznam dítěte 11–l ukazuje, že rozdělení způsobem e bylo dáno jeho zkušeností s dělením na poloviny po jednotlivých dílech „jeden, jeden, jeden – jeden, jeden, jeden – jeden, jeden, jeden“. V dělení bonbónů na třetiny pět různá řešení, Obrázek 12 a–e.



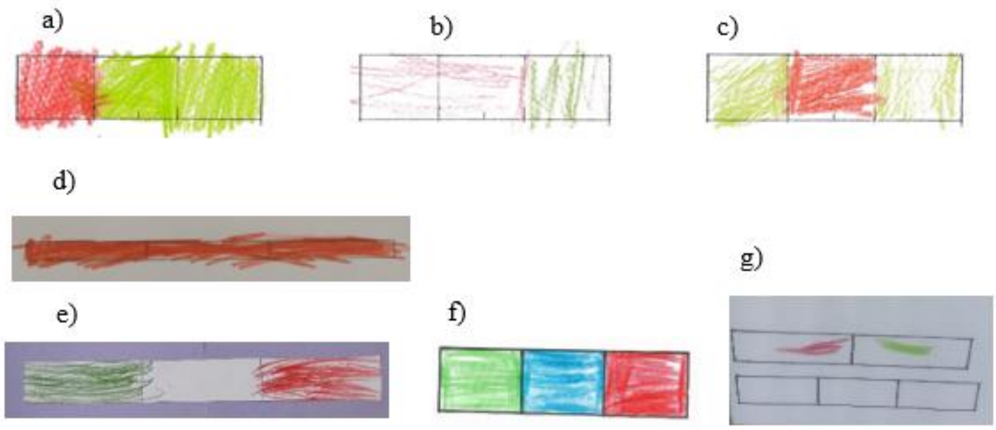
Obrázek 9. Ukázka strategie – třetiny čokolády

ISSN 2694-8133

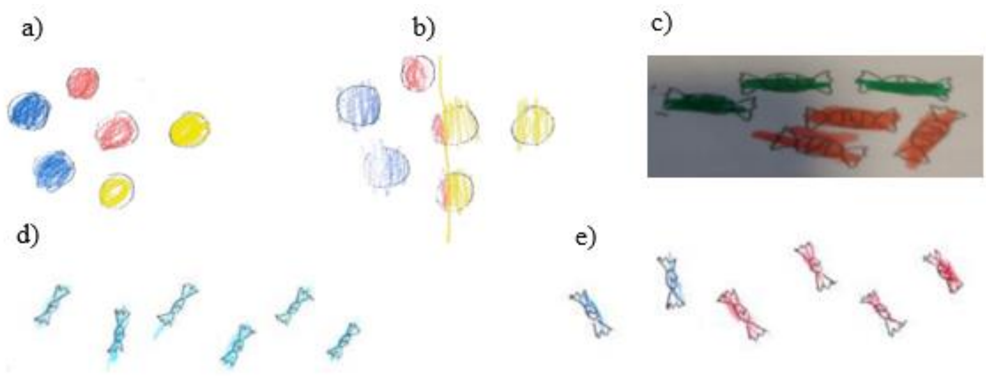
V dělení kruhu na třetiny se vyskytlo osm různých řešení, Obrázek 10 a–h, v dělení tyče na třetiny sedm různých řešení, Obrázek 11 a–g, a v dělení bonbónů na třetiny pět různých řešení, Obrázek 12 a–e.



Obrázek 10. Ukázka strategie – třetiny kruhu



Obrázek 11. Ukázka strategie – třetina a dvě třetiny tyče



Obrázek 12. Ukázka strategie – třetiny bonbónů

Strategie řešení jsme zpracovali tabelárně, ukázka (14 dětí ze stejné mateřské školy). Ve sloupci „dítě" identifikujeme dítě číslem x–y, kde x popisuje zařízení (mateřskou školu) a y dítě. Identifikátor x–y znamená, že se jedná o dítě y z mateřské školy x. Ve sloupci „zlomek" uvádíme, jakou část mělo dítě modelovat. Ve sloupcích „čokoláda, kruh, tyč, počet" uvádíme pro konkrétní typ modelu, který mělo dítě použít, jeho řešení z přehledu na obrázcích 9–12.

Tabulka 1: Záznam způsobu zakreslení v jednotlivých modelech zlomku

dítě	zlomek	čokoláda	kruh	tyč	počet
1-1	polovina	d	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-2	polovina	c	b	a	a
	třetina	a	a	x	x
1-3	polovina	a	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-4	polovina	c	c	a	a
	třetina	a	e	a	a
1-5	polovina	a	a	b	a
	třetina	g	e	d	c
1-6	polovina	a	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-7	polovina	b	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-8	polovina	c	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-9	polovina	c	a	a	a
	třetina	a	a	f	a
1-10	polovina	d	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-11	polovina	f	a	a	a
	třetina	a	h	a	a
1-12	polovina	e	a	a	a
	třetina	a	a	a	a
1-13	polovina	a	a	a	b
	třetina	c	a	x	a
1-14	polovina	a	a	a	a
	třetina	a	a	a	a

Takto jsme zpracovali výsledky všech dětí.

Problematická je pro děti formulace odpovědi na otázku „Jakou částí celku je vybarvená/nevybarvená část?" Většinou odpovídají barvou: „zelenou/nevybarvenou částí", tvarem „půlkruh", pozicí „pravá/levá část" nebo „většina" namísto vyjádření zlomkem (částí celku) „polovina, třetina, dvě třetiny". Toto však z našich zkušeností činí potíže i žákům 1. stupně ZŠ.

Téměř všechny děti nezvládly složit obdélník ani kruh na třetiny. Objevovala se řešení složení napůl a znovu napůl, tedy na čtvrtiny, obrázky 13–14, na tři nestejně velké části, Obrázek 15.

Zajímavé výsledky jsme zaznamenali v zadání „*Přelož papír napůl, jednu polovinu vybarvi*." U některých dětí se objevila řešení, kdy přeložily papír napůl a vybarvily polovinu v tomto složení, tedy čtvrtinu celku. Jiné děti přeložily papír napůl, rozložily a vybarvily polovinu celku. Ze správného řešení jiné úlohy „vybarvi polovinu" vidíme, že děti z první skupiny nemají problém polovinu vidět správně. Důvodem neočekávaného je porozumění textu – děti této skupiny chápaly, že mají vybarvit polovinu složeného papíru, děti druhé skupiny, že mají vybarvit polovinu nesloženého papíru. Jistě by bylo vhodnější přeformulovat zadání tak, aby bylo jednoznačné, např. „*Přelož papír napůl, rozlož a jednu polovinu papíru vybarvi".*

Obrázek 13. Slož na třetiny – obdélník

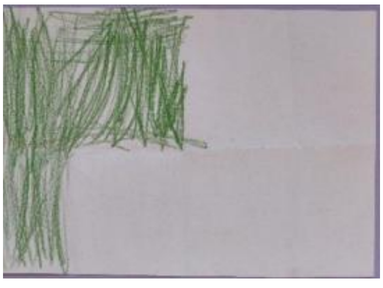
Obrázek 14. Slož na třetiny – kruh

Přikládáme zajímavé komentáře experimentátorů.

Dítě 12-3: „*U tyče zničehonic použil výraz, že zelené zůstaly 2/4. Když jsem se ho zeptala proč 2/4, tak mi řekl, že to se tak říká. Když jsem se ho pak zeptala, kolik je těch dílů celkem, tak řekl 3 a já na to, takže jsou to 2 ze tří, což bys řekl 2/3 a on – aha, já myslel, že to je vždy čtvrtina*."

Dítě 13-1: „*Na výzvu Přelož na tři stejné části přeložila obdélník pouze napůl. Následné zadání „Vybarvi jednu třetinu" nedokázala. Měla jsem pocit, že jí překáží ono přeložení papíru, a tak jsem zkusila předložit čistý papír. Anet následně vybarvila opravdu zhruba třetinu*." Následovalo vybarvení 1/3, Obrázek 15.

Dítě 1-5: „*Přelož na 3 stejné částí"- přeložila bez váhání obdélník nikoliv na 3 části, ale 3x – jednou napůl, vzniklou polovinu znovu napůl a tuto ještě do třetice znovu přehla*".



Obrázek 15. Slož na třetiny – obdélník

4. Shrnutí, závěr

V dalším výzkumu by bylo přínosem ověřit vazbu mezi výsledky jednotlivých dětí u dělení na poloviny a na třetiny (zda dítě používá stejnou strategii), a mezi výsledky dělení na poloviny a na třetiny v rámci jednotlivých modelů (zda dítě používá stejnou strategii na stejném modelu při dělení na poloviny a na třetiny). Dělení na poloviny je pro děti snazší, můžeme sledovat, zda se při dělení na třetiny využívá metakognice.

Další možností se stejným zadáním by bylo sledovat slovní vyjádření dětí výzvou „*pojmenuj vybarvené části*“, identifikovat způsoby vyjádření v případě dvou třetin (použijí děti dvě šestiny nebo jedna třetina), popsat skládání papíru na dvě/tři stejné části.

Výsledky výzkumu používáme pro výuku budoucích učitelů matematiky 1. stupně, kdy cílíme na analýzu strategií řešení úloh. Modely zlomku (obdélník, kruh, tyč, počet) jsou studentům zřejmé, ale rozmanitost způsobů modelování jejich částí je překvapí. Materiál je cenným podkladem pro diskuzi, jaké úvahy vedly dítě ke zvolené strategii a v případě chyby kde leží potenciál její reedukace.

V dalším zpracování žákovských záznamů zlomků bychom se rádi zaměřili na porovnání studentské predikce s reálným řešením žáků, na souvislosti mezi použitými strategiemi u různých modelů, na význam práce s reálnými modely pro práci s obrázky a na porovnání studentských predikcí se skutečnými výsledky žáků.

Literatura

Hejný, M. (2004). Zlomky. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. *1. díl.* Praha: UK v Praze, PedF, 343-356.

Hejný, M. (2012). Exploring the cognitive dimension of teaching mathematics through scheme-oriented approach to education. *Orbis Scholae, 2*(6), 41-55.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: UK v Praze, PedF.

Kvasz, L. (2016). Princípy genetického konštruktivizmu. *Orbis scholae 2016, 10*(2) 15-45.

Rendl, M., Vondrová, N. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: UK v Praze, PedF.

Vygotskij, L. S. (1970). *Myšlení a řeč*. Praha: SPN

ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL

Editorial Office: Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

Address: Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Phone: +420 58 563 5709

E-mail: emej@upol.cz

Electronic edition: http://emejournal.upol.cz/issues

2023

Vol. 5, No. 2

ISSN 2694-8133