Elementary Mathematics Education Journal *2022, Vol. 4, No. 2*
ISSN 2694-8133

POROVNÁNÍ EFEKTIVNOSTI RUČNÍCH A POČÍTAČEM PROVEDENÝCH VÝPOČTŮ PŘI ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH NA DĚLITELNOST

Lukáš HOLINKA, Adriana KOLÁŘOVÁ, Veronika FENCLOVÁ, Michaela PIATKOVÁ, David NOCAR, Tomáš ZDRÁHAL
Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta (Česká republika)
lukas.holinka01@upol.cz, adriana.kolarova01@upol.cz, veronika.fenclova01@upol.cz, michaela.piatkova01@upol.cz, david.nocar@upol.cz, tomas.zdrahal@upol.cz

Abstrakt

Smyslem výzkumu, který je v tomto článku popsán, bylo porovnat dobu potřebnou k vyřešení tří klasických úloh školské matematiky, které vedou k nalezení největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku, a to při ručním výpočtu (kontrolní skupina) a při výpočtu v platformě Wolfram Cloud (experimentální skupina). Respondenti neuměli s programem Wolfram Cloud vůbec pracovat, a proto musela experimentální skupina projít nejdříve „proškolením“. Ovšem ne tak, že by jí byly sděleny potřebné příkazy – skupina byla pouze instruována, jak tyto příkazy najít. Čas „proškolení“ byl této skupině připočítán. Výsledkem výzkumu je skutečnost, že nulovou hypotézu o rovnosti průměrných časů obou skupin na hladině významnosti 0,05 zamítáme.

Klíčová slova: Wolfram Cloud, největší společný dělitel, nejmenší společný násobek

COMPARISON OF THE EFFICIENCY OF MANUAL AND COMPUTER PERFORMED CALCULATIONS IN SOLVING WORD PROBLEMS

Abstract

The purpose of the research described in this paper was to compare the time needed to solve the three classical problems of school mathematics, which lead to finding the greatest common divisor and the least common multiple, both in manual calculation (control group) and in calculation in the Wolfram Cloud platform (experimental group). Respondents could not work with the Wolfram Cloud program at all, so the experimental group had to undergo "training" first. However, not by being told the necessary commands – the group was only instructed on how to find these commands. The time of "training" was added to this group. The result of the research is the fact that we reject the null hypothesis about the equality of the average times of both groups at the level of significance of 0.05.

Keywords: Wolfram Cloud, greatest common divisor, least common multiple

1. Úvod

Na 2. stupni ZŠ v rámci tematického okruhu Číslo a proměnná se mimo jiné vyskytuje poměrně mnoho slovních úloh, které vedou k nalezení největšího společného dělitele (NSD) a nejmenšího společného násobku (NSN). Samotný výpočet NSN a NSD se provádí většinou rozkladem čísel na prvočísla, což je postup teoreticky jasný, ale praktické provedení je pro větší čísla pracné. Nabízí se zde tedy možnost nahradit „mechanické“ ruční počítání patřičným příkazem nějakého matematického programu. S tím lze souhlasit, ale s jakým programem žáci na 2. stupni ZŠ umějí pracovat? Při našem výzkumu jsme vycházeli z toho, že žáci ve výuce matematiky dosud nepoužívali žádný matematický software a ani žádný neznají. Vybrali jsme tedy Wolfram Cloud. Je to platforma, na které lze pracovat stejně jako v komerčním programu Wolfram Mathematica s tím, že Cloud běží pouze ve webovém prohlížeči a jediným požadavkem je bezplatná registrace.

V našem výzkumu jsme chtěli zjistit, zda použití platformy Wolfram Cloud ovlivní efektivnost řešení úloh vedoucích na nalezení NSD a NSN z pohledu časové náročnosti. Je na první pohled zřejmé, že použití jakéhokoliv matematického programu výpočty rapidně urychlí – tedy v případě, že dotyčný aktivně zná příkazy, které mu poskytnou hledané výsledky. Toto však nebyl náš případ: Všichni respondenti (tedy i ti žáci 7. a 8. tříd ZŠ, kteří Wolfram Cloud v rámci našeho výzkumu nepoužívali) byli s platformou Wolfram Cloud seznámeni v rámci jedné z hodin matematiky jeden den před výzkumem, a to pouze prostřednictvím odkazu Quick Links/Getting Started (Wolfram, 2022), což je pětiminutový úvod do Wolfram Cloud. A nic víc.

Zájemci o tuto platformu najdou inspirace a odkazy např. v článku autorů (Nocar, D., Vaško, J. & Zdráhal, T., 2022).

2. Výzkum mezi žáky 7. a 8. ročníku

V rámci výzkumu bylo celkem 123 žáků standardním způsobem seznámeno s pojmy NSD a NSN v rámci řádné výuky v 6. ročníku ZŠ. Pro potřeby výzkumu byli žáci 7. a 8. tříd rozděleni do dvou přibližně stejně velkých skupin a řešili tři slovní úlohy – viz níže, přičemž první skupina pracovala ručně a druhá musela použít Wolfram Cloud. Výzkum probíhal na dvou základních školách v ČR, na druhé škole byly z výzkumu vyřazeni žáci z Ukrajiny, kteří jsou v ČR krátce a pochopení slovních úloh v českém jazyce je pro ně zatím velmi obtížné.

Jednalo se o následující tři úlohy. Číselné hodnoty byly takto „nesmyslně“ zvoleny kvůli tomu, aby při závěrečném společném shrnutí celého experimentu bylo možno žákům ukázat výhody, které matematický software poskytuje v porovnání s ručním výpočtem – shrnutí ale není součástí tohoto článku.

ÚLOHA 1: Paní učitelka chce mezi žáky rozdělit ovoce tak, aby měl každý stejný počet jednotlivých druhů. Má k dispozici 8528 ks třešní, 1640 ks jablíček a 3936 ks švestek. Mezi kolik nejvíce dětí může ovoce rozdělit, když víme, že žádné ovoce nezůstane? Kolik jednotlivých kusů ovoce dostane každý žák?

ÚLOHA 2: Obdélníkové dlaždice mají rozměry 6715 mm a 2690 mm, určete, prosím, nejmenší délku strany čtverce, který lze těmito dlaždicemi vydláždit. Kolik dlaždic bude potřeba?

ÚLOHA 3: Z pěti tyčí dlouhých 6636 mm, 2844 mm, 3792 mm, 6004 mm a 1580 mm chceme nařezat stejně dlouhé kusy tak, aby nezůstaly žádné zbytky a bylo jich co nejméně. Kolik budou tyto kusy měřit cm a kolik jich bude?

Excelovská tabulka obr. 1 níže ukazuje počet minut potřebných k vyřešení všech tří úloh dohromady, a to jak ručním výpočtem (toto se týkalo 52 žáků), tak pomocí platformy Wolfram Cloud (jiných 42 žáků). Pouze 3 žáci úlohy nevyřešili; tyto jsme do tabulky nezařadili.

Měřil se čas potřebný k vypracování všech tří úloh dohromady. U skupiny, ve které žáci museli použít Wolfram Cloud, proběhlo desetiminutové „proškolení“, kde jim bylo pouze sděleno, že příkaz pro nalezení např. průměru několika čísel najdou tak, že si nechají přeložit termín „(aritmetický) průměr“ do angličtiny („mean“), následně tento termín zadají do vyhledávajícího okna platformy Wolfram Cloud a že si mají prohlédnout všechny „Basic Examples“, které se jim ukážou (o NSD a NSN ale nebylo zmíněno ani slovo!). Žáci zpravidla pracovali s programem Wolfram Cloud poprvé. Čas se u žáků pracujících s programem začal

ISSN 2694-8133

měřit už v okamžiku začátku „proškolení“, takže skutečný čas potřebný k výpočtu byl vždy o 10 minut kratší, než je uvedeno ve zdrojové tabulce. Zdůrazněme zde, že v „proškolení“ se opravdu nemluvilo o příkazech GCD[] a LCM[] – tyto příkazy si žáci, na základě instrukcí v „proškolení“ našli sami; možnost, že by se je dověděli od spolužáků zde byla prakticky nulová. Nejvíc času žáci strávili hledáním správného příkazu pro výpočet, rychle žáci pochopili, že je potřeba najít anglické označení pro největší společný dělitel a nejmenší společný násobek. Pak už to pro ně bylo snadné, ještě si s vyučující museli vyjasnit zápis (např. jak se na klávesnici píši hranaté závorky). Z úloh rychle identifikovali, který příkaz je potřeba použít. Dopočítání počtu jednotlivých kusů ovoce pro každého žáka, počtu dlaždic a počtu stejných kusů tyčí většinou použili kalkulačku v počítačích, využít i k těmto výpočtům Wolfram Cloud je většinou nenapadlo. Práce je bavila, téměř všichni žáci se dostali ke správnému výsledku.

Skupina žáků počítajících příklady ručně byla podstatně méně nadšená. Od začátku jim bylo jasné, co mají k výpočtu použít, ale čísla jim přišla zbytečně velká, nebavily je rozklady na součiny prvočísel. Žáci jsou zvyklí pracovat s tabulkou prvočísel do 1000. Pro rozklady využívali pravidla dělitelnosti, která znají (2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14 a 15). Když po částečném rozkladu nenašli čísla v tabulce prvočísel, snažili se je písemně dělit 7, 11 a 13. Pro další výpočty využívali písemné násobení, slabší žáci měli dovoleno použít kalkulačku. I tak tím strávili téměř celou vyučovací hodinu. Zajímavé bylo, že některé děti při hodnocení aktivity zmiňovaly, že si u třetího příkladu všimly, že počty kusů jsou vynásobená čísla, která jim zůstala v rozkladech na součin prvočísel (viz obr. 4 a 5), to si následně s vyučující vysvětlili. Dopočítali se nakonec všichni, ale bylo na nich vidět, že jim časová náročnost výpočtů nevyhovovala. U 3 žáků došlo k numerickým chybám při výpočtu úlohy 2. Přikládáme jedno z písemných řešení.

Skupina 1 ručně (minut)	Skupina 2 Wolfram (minut)	Skupina 1 ručně (minut)	Skupina 2 Wolfram (minut)
29	20	39	22
30	21	30	22
32	22	30	23
33	22	30	23
33	23	30	24
34	24	31	24
35	24	32	21
38	26	32	21
39	27	34	21
40	29	35	21
41	29	36	22
43	33	38	22
43	34	38	23
43	20	38	23
44	21	39	23
29	21	32	23
30	22	32	25
32	23	34	24
33	23	36	22
35	24	36	18
35	24	40	20
35	19	42	25
35	20	42	23
35	20	43	20
36	21	44	
37	21	44	
35	20	40	
30	20	42	
45	21	45	
41	35	40	
38	35	40	
41	40	41	
41	22	42	

Anova: jeden faktor

Faktor

Výběr	*Počet*	*Součet*	*Průměr*	*Rozptyl*
Sloupec 1	33	1200	36,36363636	21,80113636
Sloupec 2	33	806	24,42424242	29,06439394
Sloupec 3	33	1227	37,18181818	22,40340909
Sloupec 4	24	535	22,29166667	2,737318841

ANOVA

Zdroj variability	*SS*	*Rozdíl*	*MS*	*F*	*Hodnota P*	*F krit*
Mezi výběry	5440,972191	3	1813,657397	89,64463455	2,13019E-30	2,680811088
Všechny výběry	2407,564394	119	20,23163356			
Celkem	7848,536585	122				

Obrázek 1. Excel tabulka s daty

ISSN 2694-8133

$8528 = 2 \cdot 4264 = 2 \cdot 2 \cdot 2132 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1066 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 533 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 41$

$533 : 11 = 4$ se zbytkem $\quad 123 : 41 = 3 \cdot 41$
93
$533 : 13 = 41$
52
13

$1640 = 2 \cdot 820 = 2 \cdot 2 \cdot 410 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 41$

$3936 = 2 \cdot 1968 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 492 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 123$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 41$

$D(8528; 1640; 3936) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 41 = 328$

$x = \underline{328} \quad a = 26 \quad b = 5 \quad c = 12$
$8528 : 328 \quad 1640 : 328 \quad 3936 : 328$

Obrázek 2. Žákovské řešení úlohy 1

$6715 = 5 \cdot 1343 = 5 \cdot 17 \cdot 79$

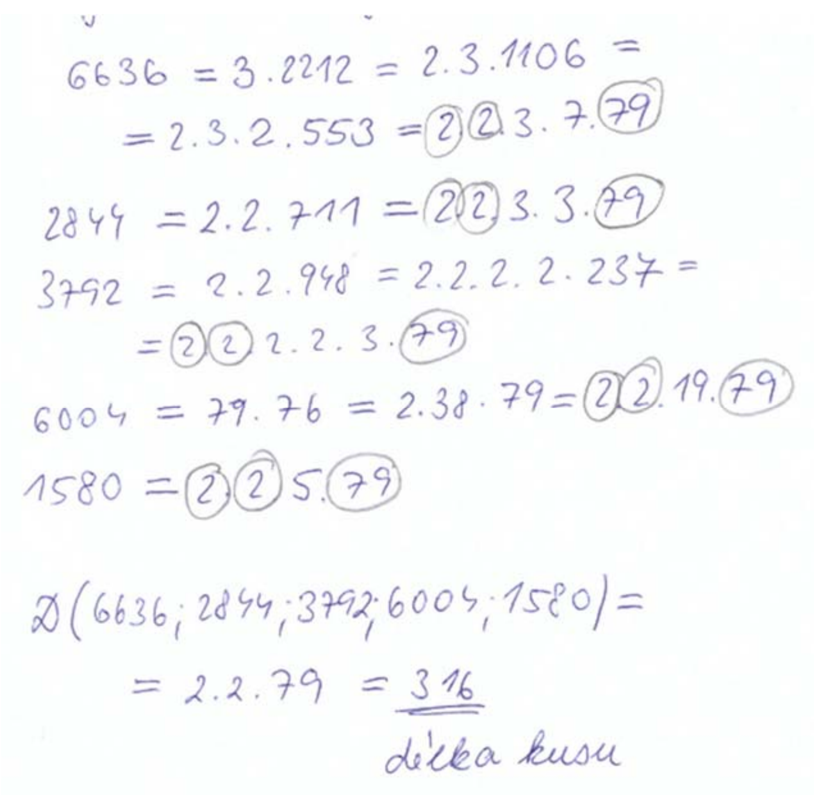
$1343 : 13 = 103$ se zbytkem
43
$1343 : 11 = 122$ se zbytkem
24
23
$1343 : 17 = 79$
153

$2690 = 2 \cdot 5 \cdot 269 = \cancel{2 \cdot 5}$ → podle tabulky je to prvočíslo

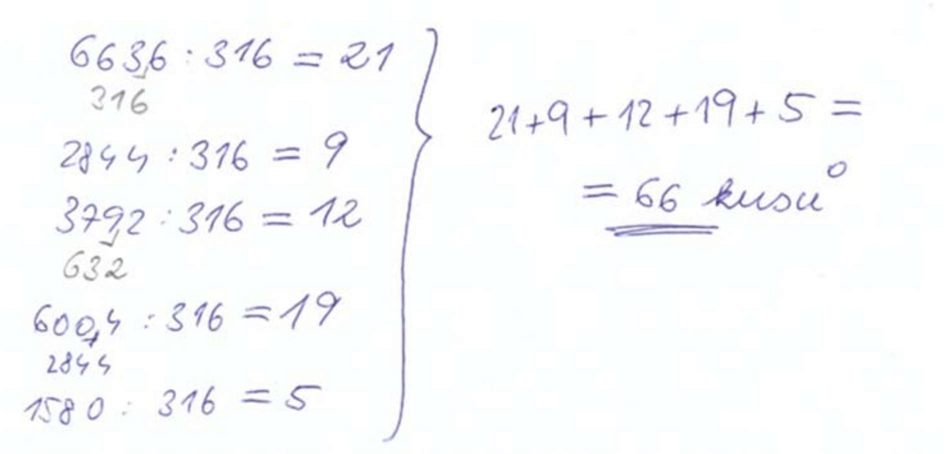
$n(6715; 2690) = 5 \cdot 17 \cdot 79 \cdot 2 \cdot 269 =$
$= 170 \cdot 79 \cdot 269$

Obrázek 3. Žákovské řešení úlohy 2

ISSN 2694-8133



Obrázek 4. Žákovské řešení úlohy 3 – 1. část



Obrázek 5. Žákovské řešení úlohy 3 – 2. část

Na obr. 2, 3 a 4 jsou části řešení úloh jednoho žáka 8. třídy. Žáci jsou ze 6. třídy zvyklí hledat největší společný dělitel a nejmenší společný násobek pomocí rozkladu na součin prvočísel. V hodinách pracují s tabulkou prvočísel. Běžně využívají pravidla dělitelnosti, pokud nějaké větší číslo mezi prvočísly nenajdou, snaží se číslo vydělit 11, 13, 17 atd. Pokud jim dělení vyjde se zbytkem, dělí dál, dokud se nedostanou k číslu, které je dělitelem čísla původního. To je ostatně vidět v ručním řešení na obr. 3. Při hledání největšího společného dělitele čísel si žáci v rozkladech zakroužkují stejná čísla, nakonec je mezi sebou vynásobí. Pokud hledají nejmenší společný násobek, využijí rozklad na součin prvočísel prvního čísla (ve 2. úloze 5; 17; 79) a jen k němu přidají čísla z dalších rozkladů, která v prvním rozkladu nejsou (2; 269), nakonec je opět vynásobí.

Hledání NSD a NSN bylo hlavním úkolem při řešení všech tří úloh. Následně už jen písemně (či s kalkulačkou) násobili či dělili, podle požadovaného výpočtu, jako např. výpočet počtu kusů z úlohy 3 na obr. 5.

3. Závěr

Oba postupy měly své výhody i nevýhody. U postupu s využitím programu Wolfram Cloud bylo nutné věnovat čas seznámení se s programem, jak pracuje, jak se na klávesnici zapisují hranaté závorky apod. Dále bylo pro žáky obtížné identifikovat správné příkazy v angličtině. Velkou výhodou byla následná rychlost vypočítání NSD a NSN. U druhé (ruční, písemné) varianty byl postup práce žákům jasný ihned po přečtení úloh. Ale velkou nevýhodou byla zadaná (čtyřciferná) čísla. Ruční postup byl zdlouhavý a nudný. V následném násobení velkých čísel žáci i chybovali. Dopočítali se téměř všichni, ale hodina je celkově nebavila.

Vzhledem k tomu, že jsme porovnávali efektivnost ručních a počítačem provedených výpočtů, formulovali jsme nulovou hypotézu tak, že průměrná doba ručních výpočtů a výpočtů na počítači pomocí Wolfram Cloud je stejná:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$.

Zopakujme zde, že jsme časy výpočtů na počítači zvýšili o čas věnovaný proškolením žáků tak, aby byli schopni sami nalézt potřebné příkazy; v tomto případě se jednalo zhruba o jednu třetinu doby potřebné k ručnímu vyřešení úloh.

Alternativní hypotéza H_1 pak byla dvoustranná:

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.

Na pravé straně tabulky obr. 1 je v MS Excel provedená jednofaktorová analýza, z které je vidět, že hodnota testového kritéria *F* je větší než kritická hodnota *F krit* a dále je vidět že *Hodnota P* je (mnohem) menší než 0,05.

Můžeme tedy prohlásit, že nulovou hypotézu zamítáme ve prospěch hypotézy alternativní na hladině významnosti 0,05.

Je samozřejmé, že tento výsledek nelze jednoduše zobecnit na všechny úlohy; zatím jsme se zabývali jenom úlohami vedoucími na nalezení NSD a NSN. Vždy to totiž záleží na tom, jak dlouhé by muselo být „proškolení“ žáků v příslušné partii platformy Wolfram Cloud. Na druhé straně je ale patrné, že s rostoucím počtem takových „proškolení“ se vyšší efektivita výpočtů pomocí této platformy v porovnání s ručními výpočty nutně projeví.

Acknowledgements

Článek byl připraven v rámci realizace projektu *Počítačem podporovaná výuka matematiky – Computer-Based Mathematics Teaching (IGA_PdF_2021_002)* a projektu *Computer-Based Mathematics na základní škole (IGA_PdF_2022_002).*

Literatura

Nocar, D., Vaško, J. & Zdráhal, T. (2022) WOLFRAM CLOUD AS AN INTERACTIVE TOOL TO SUPPORT SECONDARY SCHOOL TEACHING, *ICERI2022 Proceedings*, pp. 3133-3137. IATED Academy. DOI 10.21125/iceri.2022.0783.

Jančařík, A. *Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek*. Metodický portál RVP.CZ. 2010. https://clanky.rvp.cz/clanek/c/g/7341/NEJVETSI-SPOLECNY-DELITEL-A-NEJMENSI-SPOLECNY-NASOBEK.html.

Wolfram. (2022). *Wolfram Language & System: Documentation Center*. Wolfram Research. https://reference.wolfram.com/language/tutorial/GettingStartedOverview.html.