ISSN 2694-8133

INDUKTIVNÍ POSTUPY A EXPERIMENTOVÁNÍ V MATEMATICE

Jaroslav BERÁNEK
Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

Příspěvek je věnován využití induktivního postupu a experimentování při řešení matematických úloh. V textu je uvedena řada příkladů, při jejichž řešení jsou tyto metody využity ke stanovení hypotéz, včetně jejich důkazů matematickou indukcí. Uvedené příklady lze využít při přípravě budoucích učitelů matematiky na 1. stupni základní školy.

Klíčová slova: matematická úloha, neúplná indukce, matematická indukce, dělitelnost

INDUCTIVE PROCEDURES AND EXPERIMENTS IN MATHEMATICS

Abstract

The article is devoted to the use of the inductive procedure and experiments while solving mathematical problems. The author supplies the number of exercises where these methods are used for stating hypotheses, including their proofs with the use of mathematical induction. The given exercises can be used when teaching future elementary school teachers.

Keywords: mathematical problem, inductive reasoning, mathematical induction, divisibility

1. Úvod

Obsah a výuka školské matematiky se neustále rozvíjí, a to na všech typech a stupních škol. Také na 1. stupni ZŠ se metodické postupy při výuce matematiky ve vzdělávací oblasti „Matematika a její aplikace“ neustále rozvíjejí. Tomu musí odpovídat i neustálá snaha o zkvalitňování přípravy budoucích učitelů 1. stupně ZŠ, a to nejen v matematice.

Tento příspěvek přináší jednu z možností, na kterou studenti nejsou většinou zvyklí a málo jí využívají; jde o experimentování a využití induktivního postupu při hledání řešení. Studenti (a často i žáci ve škole) bývají zvyklí na naučené algoritmy. Pokud zadaná úloha či problém přímo neodpovídá některému z algoritmů, bývají dost často bezradní. Přitom obvykle stačí pomocí experimentu či neúplné indukce vyřešit několik možných případů a v tomto postupu pokračovat tak dlouho, až objeví nějakou zákonitost. Pak lze vyslovit hypotézu a tu následně dokázat matematickou indukcí. Při výuce na 1. stupni ZŠ se pochopitelně důkaz provádět nemůže. Příklady uvedené v textu pocházejí z mnohaletých vlastních autorových příprav do výuky, kam byly převzaty z řady pramenů, různých učebnic, skript či ročenek starších ročníků matematické olympiády (např. [1], [2], [5], [8]). Další zajímavé problémy, resp. teoretické základy matematické indukce, lze nalézt v publikacích [3], [4], [6], [7].

ISSN 2694-8133

2. Soubor úloh

1. Jako první uvedeme zajímavou úlohu, zadanou před lety v MO v kategorii pro 4. ročník.

„Je zadáno slovo RUKA. Z tohoto slova utvoříme další slovo tak, že poslední písmeno přemístíme na začátek a vyměníme souhlásky R a K. Vznikne tak slovo AKUR. Dále pokračujeme stejným způsobem ve tvoření dalších slov. Určete, které slovo je v této řadě slov na 25. místě.“

Řešení: Podle zadání budeme tvořit řadu slov: RUKA, AKUR, KARU, URAK, RUKA, … Je vidět, že první čtyři slova se již budou pravidelně opakovat. Vidíme, že slovo RUKA je na prvním místě, dále na pátém místě, devátém místě atd. Snadno určíme, že na 25. místě bude stát původní slovo RUKA.

2. *Běžně je známá pověst o kladení zrnek obilí na šachovnici (1, 2, 4, 8, ...) jako odměna pro starověkého učence (pokud není, lze ji žákům jako motivaci vyprávět). Nás ale zajímá, jaká je poslední cifra tohoto čísla 2^{63} (začínáme od jednoho zrnka na prvním políčku, tj. čísla 2^0).*

Řešení: Mnoho žáků i studentů by v této chvíli řešení úlohy vzdalo nebo uzavřelo s tím, že to nelze zjistit. Přitom stačí psát postupně po sobě jdoucí mocniny čísla 2 (počínaje 2^1) a sledovat jejich poslední cifry tak dlouho, až objevíme zákonitost. Píšeme tedy

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, …

Je vidět, že se postupně opakují poslední cifry 2, 4, 8, 6. Můžeme vyslovit hypotézu, že čísla 2^1, 2^5, 2^9, … jsou zakončena číslicí 2, čísla 2^2, 2^6, 2^{10}, … jsou zakončena číslicí 4, čísla 2^3, 2^7, 2^{11}, … jsou zakončena číslicí 8 a čísla 2^4, 2^8, 2^{12}, … jsou zakončena číslicí 6. Dává-li tedy exponent při dělení čtyřmi zbytek 1, je poslední cifra 2. Dává-li zbytek 2, je poslední cifra 4, při zbytku 3 je poslední cifra 8 a je-li exponent dělitelný čtyřmi, je číslo zakončeno číslicí 6 (exponent musí být různý od nuly). Exponent čísla 2^{63} dává při dělení čtyřmi zbytek 3, hledaná poslední číslice tohoto čísla je tedy 8.

Poznámka: Výše uvedený verbální popis řešení lze užít i na 1. stupni ZŠ (bez použití mocnin a slova exponent). Při řešení se studenty VŠ je nutno řešení formálně popsat. Po induktivním postupu lze vyslovit čtyři hypotézy ($m \in \mathbf{N}_0$):

$$(i) \quad (\forall n \in \mathbf{N})\ 2^{4n-3} = 10\,m + 2,$$

$$(ii) \quad (\forall n \in \mathbf{N})\ 2^{4n-2} = 10\,m + 4,$$

$$(iii) \quad (\forall n \in \mathbf{N})\ 2^{4n-1} = 10\,m + 8,$$

$$(iv) \quad (\forall n \in \mathbf{N})\ 2^{4n} = 10\,m + 6.$$

Tyto hypotézy je nutno dokázat matematickou indukcí. Dokážeme první z nich, ostatní se dokáží analogicky. Dokazujeme tedy tvrzení $(\forall n \in \mathbf{N})\ 2^{4n-3} = 10\,m + 2$.

Pro $n = 1$ píšeme $2^1 = 2$ ($m = 0$), tedy tvrzení platí. Nyní předpokládáme platnost tvrzení pro $n = 2, 3, 4, \ldots, k;$ dokážeme jeho platnost pro $k + 1$.

$$2^{4(k+1)-3} = 2^{4k+1} = 2^{4k-3} \cdot 2^4 = (10\,m + 2) \cdot 2^4 = (10\,m + 2) \cdot 16 = 160\,m + 32 = 10M + 2.$$

Poznamenejme, že analogická úloha lze formulovat pro mocniny čísla 3, lze tedy hledat poslední cifru např. čísla 3^{63}. Také při zkoumání mocnin čísla 3 dostáváme opakující se cyklus čtyř posledních číslic 3, 9, 7, 1. Uveďme několik mocnin čísla 3, počínaje 3^1:

3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, 177147, 531441….

Poslední číslice čísla 3^{63} je tedy 7. Dále poznamenejme, že studenti odborné matematiky by při řešení těchto úloh zřejmě využili teorie kongruencí, pomocí nichž lze řešit i podstatně složitější problémy teorie čísel. U studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ je však zavádění teorie kongruencí diskutabilní. U jednoduchých úloh, jak bylo ukázáno, se lze použití kongruencí vyhnout.

3. Na dalším příkladu ukážeme, že induktivní postup, tj. zkoušení různých možností a hledání zákonitostí, může vést k úspěchu i tehdy, zdá-li se úloha na první pohled neřešitelná.

„Dokažte, že číslo $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$ je dělitelné třemi.“

Řešení: Jedná se o součet sta čísel, není to tedy nekonečná řada. Je ale zřejmé, že jde o součet prvních sta členů geometrické posloupnosti s prvním členem 2, kvocientem 2 a posledním členem 2^{100}. Pro tento součet existuje obecný vztah $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$, po dosazení a úpravě máme $s_{100} = 2^{101} - 2$. Toto číslo však není možno užít k řešení úlohy, neboť není možno dokázat jeho dělitelnost třemi. Jak tedy nyní postupovat? Začneme postupně počítat částečné součty prvních několika členů a hledat zákonitost. Objevíme hypotézu, že součet dvou po sobě jdoucích mocnin čísla dvě je vždy dělitelný třemi. Dokážeme-li tuto hypotézu, je důkaz snadný. Číslo v zadání je součtem sta (tj. sudého počtu) po sobě jdoucích mocnin čísla dvě. Tento součet rozdělíme na součty dvojic po sobě jdoucích mocnin, $s^{100} = (2^1 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6) + \ldots + (2^{99} + 2^{100})$, číslo v každé závorce je dělitelné třemi, tedy i celkový součet je dělitelný třemi. Zbývá ale ještě důkaz vyslovené hypotézy $\forall n \in \boldsymbol{N}$: $3 \mid (2^n + 2^{n+1})$. Tento důkaz je jednoduchý a využívá běžně známý vztah pro počítání s mocninami:

$$2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^n$$

Číslo $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$ je tedy skutečně dělitelné třemi.

4. Dalším zajímavým problémem jsou pro budoucí studenty učitelství pro 1. stupeň ZŠ nekonečné řady a jejich součty. Opět nemáme na mysli seznámit tyto studenty s ucelenou teorií nekonečných řad včetně kritérií konvergence (pouze pojem částečné součty bychom neměli vynechat), avšak některé příklady řad by byla škoda opomenout. Velmi překvapivé je pro ně zjištění, že součet následující nekonečné řady $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ neexistuje.

Vhodným přerovnáním jejích členů lze totiž dostat různé hodnoty. Např. při uzávorkování $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$ dostaneme jako součet číslo 0, avšak při uzávorkování $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots$ bude součtem číslo 1. Existují ale i řady s formálně složitějším zadáním, které tito studenti mohou vyřešit. Vezměme např. řadu $S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-6}\right)$. Induktivním postupem mohou studenti psát postupně jednotlivé členy řady a doufat, že objeví nějakou zákonitost. V tomto případě snadno zjistí, že po jisté době se členy řady začnou postupně navzájem rušit. Platí totiž

$$S = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \ldots = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}.$$

Vezměme nyní jinou nekonečnou řadu $s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. V tomto případě podobný výpis členů řady nepomůže, je nutné počítat částečné součiny. Počítejme tedy: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$, $S_4 = \frac{4}{5}$. Nyní můžeme vyslovit hypotézu $\forall n \in \boldsymbol{N}$: $S_n = \frac{n}{n+1}$. Tuto hypotézu musíme ale dokázat matematickou indukcí. Pro $n = 1$ hypotéza platí, neboť $S_1 = \frac{1}{2}$. Nyní předpokládejme její platnost pro $n = 2, 3, \ldots, k$; dokážeme ji pro $n = k + 1$. Označení a_{k+1} znamená $(k+1)$-ní člen dané nekonečné řady.

$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$. Hypotéza tedy platí. Nyní je úkolem určit součet dané řady. Pro studenty obeznámené s pojmem limity není problém určit, že limita posloupnosti částečných součtů, a tedy i součet řady, je rovna číslu 1. Studenti, kteří se s pojmem limity nesetkali, musí postupovat úsudkem. Vztah $S_n = \frac{n}{n+1}$ mohou postupně upravit do tvaru $S_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, odkud je zřejmé, že vzrůstá-li hodnota n nad všechny meze, platí $S_n = 1$.

Připomeňme, že uvažujeme o studentech učitelství pro 1. stupeň ZŠ, u nichž nelze předpokládat větší znalosti matematické analýzy. Pro studenty odborné matematiky by podobné nekonečné řady byly naprosto triviální.

Při využití induktivního postupu a experimentování při řešení úloh může dojít k situacím, kdy induktivní postup k ničemu nevede, resp. je daná úloha řešitelná podstatně jednodušším způsobem. Uvedeme příklady na obě situace.

5. „*Určete vztah pro počet p_n úhlopříček pravidelného n-úhelníka*."

Řešení: Zkusíme využít induktivní postup, tj. provedeme náčrt daného n-úhelníka a spočítáme jeho úhlopříčky. Pro $n = 3$ (nejjednodušší možný n-úhelník) platí $p_3 = 0$, pro $n = 4$ platí $p_4 = 2$, dále platí $p_5 = 5$, $p_6 = 9$, $p_7 = 14$, ... Po chvíli úvah je možno objevit rekurentní vzorec $p_{n+1} = p_n + (n-1)$, který však nevede k určení přímého výpočtu hodnoty p_n. Studenti odborné matematiky by mohli aplikovat obecnou teorii řešení lineárních rekurentních posloupností, což je ale pro naše účely nevhodné. Proto musíme vzorec pro p_n odvodit přímo. Ukazuje se, že to není příliš obtížné. Z každého vrcholu pravidelného n-úhelníka vychází $n-3$ úhlopříček, každá z nich spojuje dva vrcholy; hledaný vztah je tedy $p_n = \frac{n(n-3)}{2}$. Tento vztah již bez problémů dokážeme matematickou indukcí. Důkaz začínáme pro $n = 3$, kdy vztah platí. Indukčním předpokladem pro $n = k$ je $p_k = \frac{k(k-3)}{2}$, dokážeme platnost vztahu pro $n = k+1$. Z pravidelného k-úhelníka vytvoříme pravidelný $(k+1)$-úhelník „přidáním" jednoho vrcholu. Z tohoto „přidaného" vrcholu vede $k-2$ úhlopříček, o které je nutno zvětšit hodnotu p_k. Musíme ale přičíst ještě jednu úhlopříčku, která přidáním vrcholu vznikla z jedné strany k-úhelníka. Platí tedy po dosazení $p_{k+1} = \frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 = \ldots = \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$. Vzorec jsme tedy dokázali.

6. *„Zkoumejte hodnoty f(n) polynomu $n^2 + 17n + 11$, vyslovte hypotézu a dokažte ji."*

Řešení: Induktivním postupem nalezneme hodnoty polynomu pro $n = 1, 2, 3, \ldots$. Zjistíme, že jedinou možnou hypotézou je tvrzení, že $f(n)$ je liché číslo obecného tvaru $2p + 1$ ($p \in \mathbf{N}$). Formálně zapsáno $\forall n \in \mathbf{N}$: $n^2 + 17n + 11 = 2p + 1$.

Tuto hypotézu opět lze dokázat matematickou indukcí. Pro $n = 1$ platí $f(1) = 29$, což je liché číslo. Z předpokladu platnosti hypotézy pro $n = 2, 3, \ldots, k$ dokážeme platnost pro $n = k+1$. Platí: $f(k+1) = (k+1)^2 + 17(k+1) + 11 = \ldots = (k^2 + 17k + 11) + 2k + 18 = (2p+1) + 2(k+9) =$
$= 2(p+k+9)+1 = 2q+1$.

Tvrzení tedy platí. Pozorný student by ale měl zjistit, že tento postup je zbytečný. Přímo ze zadání polynomu $n^2 + 17n + 11$ plyne, že $f(n)$ je vždy liché číslo. Lze psát $f(n) = n(n + 17) + 11$, přičemž v součinu $n(n + 17)$ je vždy jedno z čísel n, $n+17$ liché a druhé je sudé, tento součin je tedy vždy sudé číslo. Po přičtení čísla 11 je $f(n)$ vždy liché číslo. Lze se tedy obejít bez induktivního postupu, stačí využít základní znalosti z teorie dělitelnosti.

7. V tomto příkladu ukážeme, že každá hypotéza se nedá jednoduše dokázat matematickou indukcí.

„Zkoumejte součty prvních po sobě jdoucích lichých čísel, vyslovte hypotézu a dokažte ji".

Řešení: Induktivním postupem určíme $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, atd. Vyslovíme hypotézu $\forall n \in \mathbf{N}$: $1 + 3 + 5 + (2n-1) = u^2$, tedy že každý takový součet je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Důkaz matematickou indukcí by byl zřejmě teoreticky možný, ale velmi komplikovaný. Tento příklad je přitom ideální ukázkou na motivační využití prvků z historie matematiky. Studenty lze seznámit se čtvercovými čísly, užívanými ve starověku, dále s trojúhelníkovými čísly atd. Zakreslíme-li nyní postupně součty prvních po sobě jdoucích přirozených čísel do čtvercové sítě, uvidíme, že tento součet je vždy čtvercové číslo, tzn. druhá mocnina nějakého přirozeného čísla. Číslo 1 je jeden čtverec, číslo 3 zakreslíme tak, že „obalíme" první čtverec shora a zprava dalšími třemi čtverci, dostaneme tedy čtverec 2×2. Tento čtverec opět „obalíme" shora a zprava 5 čtverci, vznikne čtverec 3×3. Takto lze postupovat pořád. Tvrzení tedy platí, neboť každý další „obal" vyjadřuje číslo o 2 větší než poslední sčítané liché číslo, tedy další liché číslo v pořadí.

8. V tomto příkladu ukážeme tři různé typy důkazů obecné hypotézy.

„Určete největšího společného dělitele čísel $n^3 + 17n$ pro všechna přirozená čísla n."

Řešení: Induktivním postupem určíme hodnoty dvojčlenu pro několik prvních přirozených čísel n: Pro $n = 1$ vychází 18, pro $n = 2$ vychází 42, pro $n = 3$ potom číslo 78. Je zřejmé, že jediné „podezřelé číslo", které hledáme, je číslo 6 (je největším společným dělitelem 18, 42, 78). Podaří-li se nám dokázat hypotéza $\forall n \in \mathbf{N}$: $6 \mid (n^3 + 17\,n)$, bude číslo 6 největším společným dělitelem všech hodnot $n^3 + 17n$.

První možnost důkazu, která studenty napadne, je opět matematická indukce. Skutečně, pro $n = 1$ hypotéza platí (číslo 18 je dělitelné číslem 6), dále předpokládáme platnost hypotézy pro $n = k$ a dokážeme ji pro $n = k+1$. Platí: $(k+1)^3 + 17(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 17k + 17 =$
$= (k^3 + 17k) + 3k(k+1) + 18$.
První závorka je dělitelná šesti podle indukčního předpokladu, výraz $3k(k+1)$ obsahuje dvě čísla jdoucí po sobě (jedno z nich musí být sudé), je tedy rovněž dělitelný šesti, číslo 18 je také násobek šesti. Tvrzení tedy platí.

Druhá možnost důkazu využívá zbytkových tříd podle modulu 6. Každé přirozené číslo n musí mít při jeho dělení šesti jeden ze tvarů $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$. Dosadíme-li každé z těchto vyjádření čísla n do výrazu $n^3 + 17n$, dostaneme po úpravě číslo dělitelné šesti. Např. pro $n = 6k+5$ máme $(6k+5)^3 + 17(6k+5) = 216k^3 + 540k^2 + 450k + 125 + 102k + 85 =$ $= 216k^3 + 540k^2 + 552k + 210$. Všechny koeficienty jsou dělitelné šesti, tedy i číslo $(6k+5)^3 + 17(6k+5)$ je dělitelné šesti. Ostatní případy se dokáží analogicky rozepsáním.

Třetí důkaz hypotézy $\forall n \in \mathbf{N}$: $6 \mid (n^3 + 17n)$ je důkazem velmi elegantním, který však obsahuje umělý krok, na který studenti nemající potřebné zkušenosti s těmito důkazy, nemusí přijít. Uvedeme jej bez komentáře: $n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n+1)(n-1) + 18n = 6K$, protože součin $n(n+1)(n-1)$ je součinem tří po sobě jdoucích čísel, z nichž alespoň jedno je sudé a jedno je dělitelné třemi. Tento součin je proto dělitelný šesti.

9. Následuje poslední úloha, při jejímž řešení si studenti procvičí počítání s velkými čísly i jistou představivost při jejich zápisu.

„Je dáno číslo 16. „Doprostřed" tohoto čísla vložíme číslo 15, dostaneme číslo 1156. Doprostřed vzniklého čísla opět vložíme číslo 15 a obdržíme číslo 111556. Takto postupujeme

pořád dál a dál a dostáváme čísla 11115556, 1111155556 atd. Dokažte, že každé z těchto čísel je druhou mocninou některého přirozeného čísla.“

Řešení: Využijeme induktivní postup. Budeme postupně počítat druhé odmocniny vzniklých čísel (pomocí kalkulačky) a hledat zákonitost. Dostáváme:

$\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{1156} = 34$, $\sqrt{111556} = 334$, $\sqrt{11115556} = 3334$, $\sqrt{1111155556} = 33334$, ….

Před vyslovením hypotézy zavedeme vhodné označení. Výrazem $n\text{---}\boxed{p}\text{---}n$ budeme rozumět číslo zapsané p ciframi rovnými n, např. $4\text{---}\boxed{7}\text{---}4$ označuje číslo *4444444*. Hypotéza nyní zní takto:

$$\forall n \in \mathbf{N}\text{: } (3\text{---}\boxed{n}\text{---}34)^2 = 1\text{---}\boxed{n+1}\text{---}15\text{---}\boxed{n}\text{---}56.$$

Důkaz matematickou indukcí je v tomto případě pro studenty příliš formálně složitý. Provedeme tedy důkaz hypotézy přímo písemným násobením. I tento postup, jak uvidíme, vyžaduje značnou představivost při sledování řádů cifer při výpočtu. Poznamenejme, že tento způsob důkazu je zřejmě poněkud problematický, protože využívá názoru a není formálně popsán, pro studenty učitelství pro 1. stupeň ZŠ je však postačující. Nejprve je vhodné pro získání vhledu provést důkaz hypotézy pro několik malých čísel n, například 1, 2, 3, 4.

$$\begin{array}{r}
34\\
34\\
\hline
136\\
102\\
\hline
1156
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
334\\
334\\
\hline
1336\\
1002\\
1002\\
\hline
111556
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3334\\
3334\\
\hline
13336\\
10002\\
10002\\
10002\\
\hline
11115556
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
33334\\
33334\\
\hline
133336\\
100002\\
100002\\
100002\\
100002\\
\hline
1111155556
\end{array}$$

Nyní již můžeme přikročit k obecnému důkazu:

$$\begin{array}{r}
3\text{---}\boxed{n}\text{---}34\\
3\text{---}\boxed{n}\text{---}34\\
\hline
13\text{---}\boxed{n}\text{---}36\\
10\text{---}\boxed{n}\text{---}02\\
10\text{---}\boxed{n}\text{---}02\\
\vdots\\
10\text{---}\boxed{n}\text{---}02\\
\hline
1\text{---}\boxed{n+1}\text{---}15\text{---}\boxed{n}\text{---}56
\end{array}$$

Studenti se v rámci experimentu mohou pokoušet provést důkaz pomocí teorie dělitelnosti. Čísla *1156, 111556* atd. mohou rozkládat na prvočinitele a doufat, že objeví nějakou zákonitost. Postupně s pomocí kalkulačky obdrží:

$1156 = 2^2 \cdot 17^2 = 34^2$, $111556 = 2^2 \cdot 167^2 = 334^2$, $11115556 = 2^2 \cdot 1667^2 = 3334^2$, atd.

Z těchto vztahů je možné odvodit hypotézu:

$$\forall n \in \mathbf{N}\colon 1\text{---}\boxed{n+1}\text{---}15\text{---}\boxed{n}\text{---}56 = 2^2 \cdot (16\text{---}\boxed{n-1}\text{---}67)^2.$$

Důkaz této hypotézy lze provést jako výše analogicky pomocí přímého vynásobení. Každé přirozené číslo tvaru $1\text{---}\boxed{n+1}\text{---}15\text{---}\boxed{n}\text{---}56$ je tedy skutečně druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Pokusy studentů provést rozklad na prvočinitele čísel $16\text{---}\boxed{n-1}\text{---}67$ již obecně nelze provést. Ze znalosti teorie prvočísel lehce ukážeme, že čísla *17, 167, 1667* jsou prvočísla. Hypotézu, že každé z čísel $16\text{---}\boxed{n-1}\text{---}67$ je prvočíslem, však není zřejmě možné obecně dokázat.

3. Závěr

V příspěvku jsme předložili devět úloh a problémů, při jejichž řešení lze využít induktivní postup a experimentování. Cílem je mj. upozornit studenty, budoucí učitele na 1. stupni základní školy, aby nepropadali malomyslnosti, když ze zadání úlohy nevidí ihned postup řešení; že i zkoušení různých možností teprve může vést k objevení nějaké zákonitosti, která pak povede k řešení úlohy. Problémem může pak být důkaz objevených hypotéz, který již často vyžaduje hlubší matematické znalosti. V příspěvku jsme rovněž ukázali několik možných využití důkazu matematickou indukcí i případ, kdy důkaz indukcí není příliš vhodný (poslední příklad 9). Některé z uvedených úloh lze užít přímo ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ. Tam samozřejmě důkazy neprovádíme. Tím studentům ukazujeme, že matematika není „suchá“ věda, kde na vše existuje algoritmus, ale že může obsahovat i „hravé“ prvky.

Literatura

[1] *Archiv ročníků Matematické olympiády pro základní školu.* http://www.matematickaolympiada.cz /cs/olympiada-pro-zakladni-skoly.

[2] Beránek, J., & Hájek, J. (1991). *Úvod do studia matematických disciplín.* Brno: Masarykova univerzita v Brně.

[3] Beránek, J. (2019). Vybrané problémy rekreační matematiky. *Učitel matematiky (UM),* 27 (4), 237-243.

[4] Larson, L. C. (1990). *Metódy riešenia matematických problémov*. Bratislava: Alfa.

[5] Odvárko, O., & Šedivý, J., & Calda, E (1990). *Metody řešení matematických úloh.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

[6] Vrba, A. (1977). *Princip matematické indukce*. Praha: Mladá fronta.

[7] Výborný, R. (1963). *Matematická indukce*. Praha: Mladá fronta.

[8] Kolektiv autorů (1982). *Vybrané úlohy z matematické olympiády: kategorie Z: sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.