

UČÍME BUDOUCÍ UČITELE LOGICKY MYSLET?

Jana PŘÍHONSKÁ, Jiří BŘEHOVSKÝ

Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická (Česká republika)

jana.prihonska@tul.cz, jiri.brehovsky@tul.cz

Abstrakt

V příspěvku se zaměříme na rozvoj schopností učitele porozumět myšlenkám žáka při zadávání a řešení logických úloh. Nezastupitelnou roli při řešení úlohy hraje správný postoj a vedení učitele. Žák potřebuje dostatečný prostor a čas k objevení potřebných postupů a logických závěrů. Východiskem pro přípravu budoucích učitelů je pochopení obtížnosti úlohy z pozice žáka. Na rozboru konkrétní úlohy si ukážeme přístup, jak je možno tyto postupy u budoucích učitelů rozvíjet. Za jednu ze základních činností učitele při hledání fenoménů porozumění, obtížnosti a správné argumentace považujeme rozbor žakovského řešení, proto uvádíme nejprve ukázkou s komentářem k žakovskému řešení dvou kombinatorických problémů.

Klíčová slova: logická úloha, logické myšlení, vyvozování úsudku, řešitelská strategie

DO WE TEACH FUTURE TEACHERS TO THINK LOGICALLY?

Abstract

In this paper we focus on the development of the teacher's ability to understand the pupil's ideas in assigning and solving logical tasks. The right attitude and guidance of the teacher plays an irreplaceable role in solving the task. The pupil needs enough space and time to discover the necessary procedures and logical conclusions. The starting point for the preparation of future teachers is to understand the difficulty of the task from the position of a pupil. In the analysis of a specific task, we will show the approach of how these procedures can be developed with future teachers. The analysis of pupils' solutions we consider as one of the basic activities for teachers for phenomena understanding, difficulty and correct argument. So first we will present a sample with a commentary on pupil's solutions of two combinatorial problems.

Keywords: logical task, logical thinking, inferring judgment, problem solving strategies

1. Úvod

Jedním z cílů matematického vzdělávání je rozvíjet schopnost žáků řešit jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.

I přes běžně přijímaný názor, že matematika přispívá k rozvoji logického myšlení, není naplňování tohoto cíle snadné, na což poukazují také výsledky žáků a studentů ČR v mezinárodních srovnávacích studiích PIRLS a TIMSS (PIRLS & TIMSS, 2011). I když je matematika a její výuka založena na přesné logické výstavbě, mnohdy se zcela tuto skutečnost nedaří při výuce na žáky přenést. Cílem přípravy budoucích učitelů by proto mělo být naučit je správně formulovat a modifikovat úlohy a zamýšlet se nad různými řešitelskými strategiemi. Následně analyzovat řešení žáka a odstranit příčiny jeho chybných úvah

2. Jak rozvíjet myšlení žáků

Název článku úzce koresponduje s otázkou: *Je možné naučit studenty logicky myslet?*, která zazněla na semináři projektu *Logika jako součást pedagogického vzdělávání*. Prof. Kuřina tuto otázku transformuje na poněkud skromnější problém: *Je možné učit mládež myslet?* (Kuřina, 2002).

Myšlení není reprodukční proces a naučit se myslet je v podstatě totéž, jako naučit se řešit problémy. Ve škole učíme žáky řešit určité typy problémů, učíme je pečlivému logickému rozboru jazyka, vedeme je k poznání výrokové a predikátové logiky a aplikace pravidel vyvozování. To však ještě neznamená, že je učíme myslet. Dítě se učí myslet od prvních kontaktů s realitou, při poznávání mateřského jazyka, při řešení životních konfliktů. Naši snahou je přirozeně připravit studenty, budoucí učitele tak, aby svým přístupem rozvíjeli myšlení žáků již od první třídy. Prof. Kuřina (2007) upozorňuje na případy, kdy učitel opraví správné řešení žáka jako chybné jen proto, že se striktně drží výsledku uvedeného v učebnici. Rozvíjet myšlení je možné jen v rozumně koncipovaném vzdělávacím procesu, kde nepůjde jen o předávání hotové struktury jednotlivých disciplín, ale kde bude dán prostor pro vznik poznatků, místo reprodukování hotových schémat, kde žák nebude pouze naslouchat, ale naučí se přemýšlet nad tím, čemu se učí.

Myšlení je nejvyšší forma aktuálního obrazu objektivní skutečnosti, spočívající v cílevědomém, zprostředkovaném a zobecněném poznávání podstatných souvislostí a vztahů předmětu subjektem, ve vytváření nových idejí, v předvídání událostí a činů lidí. Vzniká a realizuje se v procesu kladení a řešení praktických i teoretických problémů (Melichar, 2007). Proces myšlení se opírá o určité myšlenkové operace. K základním operacím myšlení patří *srovnávání* a *analogie* (podobnost), *rozlišování*, *generalizace* (zevšeobecnění) a *abstrakce* (myšlenková činnost, při níž se cestou analýzy určitých jevů či pojmů vytvářejí obecné poznatky). Opírá se však i o smyslovou zkušenost, avšak na rozdíl od smyslového obrazu jeho výsledky přepracovává, poskytuje možnost získávat poznatky o takových vlastnostech a vztazích předmětů, jež jsou bezprostřednímu smyslovému poznání nedostupné (Melichar, 2007).

Schopnost provádět logicko-matematické operace se objevuje již při nejjobecnější činnosti v kojeneckém věku a postupně se rozvíjí v prvním a druhém desetiletí života, až obsáhne poměrně velký počet nervových center, která pracují ve vzájemné shodě. I když dojde k poškození některého centra, logicko-matematické myšlení to většinou nezasáhne. Bližší vymezení a vysvětlení psychologických záležitostí logicko-matematického myšlení a schopností můžeme nalézt v rozsáhlém díle Jeana Piageta.

Prof. Rosický (2006) z Přírodovědecké fakulty MU uvádí: „**Matematika má vychovávat k logickému a korektnímu myšlení**“. Matematika poskytuje prostor pro tvůrčí práci – dává prostor pro rozvíjení schopnosti vytvářet úsudky, analytické myšlení, fantazii, dává i prostor jistým estetickým kritériím. Aby však mohla tuto svoji úlohu plnit, je nutné u žáků probudit zájem o matematiku. Určitý estetický moment může v matematickém uvažování hrát jistou roli. Matematik si musí umět vytvořit mentální představu situace, kterou se zabývá, a pracovat s ní jako s realitou. Jinými slovy představit si ten svět, který se pak ve finále zobrazí nějakými

vzorečky a formulkami. Většinou přitom platí, že výsledná řešení jsou jednoduchá, elegantní a krásná. Je to samozřejmě estetika, která není přístupná každému – podobně jako hudba také vyžaduje určitou průpravu (Rosický, 2006).

Jedním z důležitých aspektů vyučování matematice v dnešní době je neustále překonávat formalismus v poznávání ve výuce. Je nutno odpoutat se od transmisivního vyučování, založeného na pouhém předávání poznatků, instrukcí a návodů, jak postupovat. Takovýto formální přístup k poznávání vede pouze k ukládání informací do paměti, pouhému reprodukování poznatků u zkoušení a rychlému zapomínání. Na určité nechuti žáků k matematice se podílí mimo jiné právě způsob, jakým je vyučována. Na tom určitě hodně záleží. Matematické a zejména pak učitelům matematiky se mnohdy daří přehnaně mechanickým způsobem odradit hodně studentů, kteří by o ni mohli mít zájem. Po studentech a žácích by se nemělo chtít jen počítat určité příklady nebo memorovat fakta. Učitel by měl vyvolat zájem, pokusit se ukázat, co je matematické uvažování, čím může být matematika v určitých oblastech prospěšná. Látku často lépe vysvětlí motivační příklady než nějaké formální vysvětlování za pomoci výrazů: „Necht' x je...“. Na druhou stranu se takový výklad nesmí stát pouhým nic neříkajícím „plácáním“ (Rosický, 2006). Rozvíjet myšlení žáků a studentů s cílem procvičovat jejich logické uvažování je nutno již na 1. stupni ZŠ.

3. Podstata matematického myšlení

Matematické myšlení vychází ze znalosti matematických pojmů (definice, věta, axiom, předpoklad a tvrzení věty, věta obrácená, důkaz věty, výrok, výroková forma, množina, relace, operace, rovnice, rovnost, nerovnice, nerovnost, atp.), ze znalostí matematických teorií (matematická logika, teorie množin, statistika, pravděpodobnost, teorie řešení rovnic, infinitesimální počet, geometrie, teorie algebraických struktur, atp.), matematické frazeologie a znalostí matematické symboliky. K tomu, abychom mohli pochopit základní matematické pojmy, je třeba mít dobré základy logiky. Základy logiky jsou nutnou znalostí k tomu, abychom si uvědomili, co je logické myšlení. (Příhonská, 2008)

Logické myšlení je v psychologickém slovníku charakterizováno jako vývojově vyšší forma myšlení, které je založeno na správném usuzování podle zákonů formální logiky. Slovník cizích slov vymezuje formální logiku jako učení o zákonech a pravidlech nutných pro získávání pravdivých závěrů při usuzování. Za jejího zakladatele je považován Aristoteles. Oč cennější je správné řešení problému získané usuzováním podle daných pravidel oproti náhlému nápadu – vzhledu, i když nelze výsledek logicky zdůvodnit? Právě díky druhé variantě řešení problému přeci vzniklo mnoho slavných vynálezů, které lidstvo používá dodnes.

Dnešní věda i školství vyžadují řešit problémy pružně, rychle, přesně, dle daných pravidel postupů. Kdo to neumí, mívá při studiu a potom i v mnoha směrech v praktickém životě problémy. Z toho vyplývá, že je prospěšné logické myšlení rozvíjet.

4. Logické myšlení

Jak již bylo řečeno, logické myšlení je takové myšlení, které vychází ze znalostí základů logiky. Úzce souvisí s pojmem výroku a rozhodováním o jeho pravdivosti či nepravdivosti, s mateřským jazykem, vyjadřováním se ve větách a určováním jejich pravdivosti anebo nepravdivosti. Věta je jazykové vyjádření myšlenky. Základním pojmem logiky je pojem *výrok*.

Za výrok považujeme *každou oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco, co může být jen pravdivé anebo nepravdivé*. Většina lidí je v domněnku, že výrok je vždy pravdivý. Výrokem je však i oznamovací věta nepravdivá. Věta „Jedna a jedna rovná se pěti“ je výrokem. Jde o oznamovací větu, která srozumitelně oznamuje něco, co je nepravdivé. Tuto oznamovací větu lze zapsat místo slov číselnými symboly „ $1 + 1 = 5$ “. Zápis je různý, ale slovní vyjádření je stejné. Věty „Přeskoč!“ , „Kolik je hodin?“ nejsou výrokem, neboť nejde o oznamovací věty.

Na druhé straně např. oznamovací věta „Kočka je násobkem psího ocasu“, není výrokem, neboť srozumitelně nic neoznamuje (Melichar, 2007).

U výroků zjišťujeme jejich pravdivost, tj. zda výrok je či není pravdivý. Jak zjišťujeme tuto pravdivost? Je zřejmé, že na základě svých životních zkušeností, z odborné literatury, dnes i z Internetu a na základě informace od věrohodných osob. I zde však může dojít k omylu. Příkladem mohou být rozpory v některých uváděných datech – vynález knihtisku je např. v různé literatuře uváděn různým datem. Je zřejmé, že praxí v takovém případě rozhodnout nemůžeme. Výrokem můžeme tedy rozumět tvrzení (nebo popření), které dává smysl, když si před něj položíme otázku: *Je pravda, že...?* Na tuto otázku můžeme odpovědět buď *ano* (jde o výrok pravdivý) nebo *ne* (výrok nepravdivý), (Melichar, 2007).

Výrok, který něco tvrdí nebo popírá, budeme nazývat *kategorickým*. Pravdivost kategorického výroku je určena vztahem ke skutečnosti. Výrok „Prší“ není pravdivý, pokud nepadne ani kapka. Pravdivostní hodnota kategorického výroku je objektivní záležitost. Není to záležitost toho, kdo to říká. V některých výroky se udává *počet nebo odhad počtu osob, věcí, matematických objektů* apod., které mají jistou vlastnost. Jde o údaje vyjádřené slovy: aspoň jeden, aspoň dva, aspoň tři, ..., právě jeden, právě dva, ..., nejvýše jeden, nejvýše tři, ..., každý, všichni (Melichar, 2007). S přesným chápáním těchto pojmů, resp. s pochopením množství, které vyjadřují, mají žáci i studenti učitelství značné potíže. Ještě větší potíže pak nastávají při negování těchto pojmů. Ve spojení např. ... *alespoň tři jsou*... často dochází k negování nejen kvantifikátoru, ale i příslušného slovesa, jako např. ... *nejvýše dva nejsou* ...

5. Logické úlohy v učebnicích matematiky pro 1. stupeň základní školy

V první fázi řešení projektu jsme se zaměřili na řešící učebnic matematiky pro první stupeň základní školy. Vybrali jsme učebnice, které jsou při výuce nejvíce využívány, a zaměřili jsme se na identifikaci typových úloh, které mají potenciál rozvíjet logické myšlení. U každé učebnice jsme zjišťovali výskyt logických spojek (konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence), dále pak negace a kvantifikátorů. Výstupem z této analýzy je navržená kategorizace úloh, která bude blíže popsána v článku pro Aplimat21 a proto ji na tomto místě nebudeme více rozvádět. Ukazuje se, že největší zastoupení mají úlohy s využitím konjunkce ve smyslu výčtu prvků, úlohy s uvedením pokynů (vypočítej a seřaď), dále pak úlohy s explicitním zadáním (využití logických spojek – nejčastěji implikace). Zvláštní pozornost zasluhuje kategorie logických úloh, které lze zařadit do tzv. „rekreační matematiky“ a při jejichž řešení je nutno z daných předpokladů vyvozovat jisté závěry. Řešitel je vyzván k logickému úsudku na základě jeho předchozích znalostí, dovedností a zkušeností. Např. v učebnici pro 5. ročník je úloha: *Když jsou x a y čísla sudá, pak i $x + y$ je sudé. Je toto tvrzení pravdivé?* (Hejný et al., 2001, 5. ročník). Nezastupitelnou roli při řešení logických úloh hraje správný postoj a vedení učitele, který musí dát žákovi prostor k objevení potřebných postupů a logických závěrů.

6. Logické úlohy v přípravě budoucích učitelů

V další části se zaměříme na rozvoj schopností učitele porozumět žákovi, resp. jeho myšlenkám při zadávání a řešení logických úloh. Východiskem pro přípravu budoucích učitelů je pochopení obtížnosti úlohy z pozice žáka, které je charakterizováno následujícími prvky (Příhonská, 2008):

- Porozumění úloze – úloha se jeví obtížná z hlediska intelektuálního
- Užití konkrétní řešitelské strategie
- Možné propojení shledaných prvků – žák něco ví a něco ne

- Úmornost řešení – obtížnost je spojována s úmornou a titěrnou prací, která je časově náročná nebo jen s kvantitou použitých znaků nikoli ve smyslu kombinování různých možností
- Evidence řešení – problémem je volba vhodného jazyka k vyjádření vlastních myšlenek

S výše uvedenými prvky úzce souvisí vytváření správných úsudků, které následně vedou k volbě vhodné řešitelské strategie, která ve finále nevede do slepé uličky a probouzí u žáků objevitelskou zvědavost.

6.1. Tvorba úsudků

Logický úsudek, jinými slovy, logická úvaha je velice účinnou strategií při řešení úloh. Spočívá ve vyvození soudu z jiných soudů. Je používán většinou s jinými strategiemi řešení k dosažení platného závěru ze série tvrzení. Základními pravidly správného myšlení jsou pak logické zákony, které musíme při přemýšlení dodržovat – zákon totožnosti, zákon sporu, zákon vyloučení třetího a zákon dostatečného důvodu. Správné a jednoduché usuzování je velice důležité např. při řešení kombinatorických problémů a na ně navazujících problémů z pravděpodobnosti, které rozvoj logického myšlení významně podporují. Uvedme ukázky problémů, které lze řešit pouhou logickou úvahou bez využití hlubších znalostí z kombinatoriky, a jejichž rozmyšlení ponecháme čtenáři:

V obchodě měli 5 druhů lízátek. Kolika způsoby mohla Katka koupit 3 lízátka?

Určete počet anagramů, které lze získat z písmen slova ACONCAGUA (nejvyšší hora Jižní Ameriky).

Ve skupině 9 mincí osm váží stejně a devátá je těžší. Na pohled jsou mince stejné. Použitím miskových vah určete nejmenší počet vážení potřebných na označení těžší mince.

Komentář

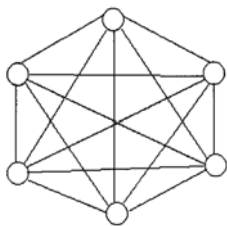
První dva problémy nejsou záměrně blíže specifikovány z hlediska možnosti opakování lízátek (stejná, či různá) a smysluplnosti vytvořených slov v případě anagramů. Před vlastním řešením by měly předcházet rozbor zadání a diskuze se žáky, případně následná diskuze k nalezenému řešení.

6.2. Rozbor žákovských řešení

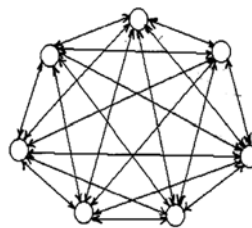
Pokud chceme naučit žáky na prvním stupni využívat logickou úvahu, jako jednu z řešitelských strategií, pak musíme tímto způsobem vést i studenty, budoucí učitele, při jejich přípravě na vysoké škole. Na rozboru konkrétní úlohy si ukážeme přístup, jak je možné tyto postupy rozvíjet. Začneme však nejprve ukázkou a rozbořem žákovského řešení dvou kombinatorických problémů (P1, P2). Rozbor žákovského řešení považujeme za jednu ze základních činností učitele při hledání fenoménů porozumění, obtížnosti a správné argumentace.

- | | |
|----|---|
| P1 | <i>Na turnaji ve volejbale hraje šest družstev systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?</i> |
| P2 | <i>Do soutěže v košíkové bylo zapojeno 7 družstev ze 7 různých měst. Kolik zápasů bylo sehráno, když se hrálo v sídelním městě každého družstva?</i> |

Řešení pomocí grafů ukazuje Obrázek 1. a Obrázek 2.:



Obrázek 1. Řešení P1



Obrázek 2. Řešení P2

Nicméně žáci využívají nejvíce grafické znázornění pro dílčí zápasy (Obrázek 3.)

Ukázka žakovského řešení

Problém 1:
Na turnaji ve volejbale hraje šest družstev systém každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?

Handwritten student solution for Problem 1 shows a diagram of a complete graph K_6 with 6 vertices labeled 1 through 6. Each vertex is connected to 5 other vertices. The number of edges (matches) is calculated as 18 matches.

Problém 2:
Do soutěže v košíkové bylo zapojeno 7 družstev ze 7 různých měst. Kolik zápasů bylo sehráno, když se hrálo v sídelním městě každého družstva?

Handwritten student solution for Problem 2 shows a diagram of a complete graph K_7 with 7 vertices labeled 1 through 7. Each vertex is connected to 6 other vertices. The number of edges (matches) is calculated as 42 matches.

Obrázek 3. Ukázky žakovských řešení

Komentář

Zadané problémy se ukázaly jako problematické pro studenty učitelství z hlediska pochopení rozdílnosti v zadání a způsobu řešení. Jejich řešení vyvolalo diskuzi, v jejímž závěru se objevily náměty pro novou formulaci úlohy a byly formulovány návody pro řešení a porozumění textu pro žáky. Např. místo formulace ...v sídelním městě **každého** družstva... použít: ...v každém městě každý s každým... nebo ...v každém městě vzájemná odvetná utkání... Je však na zvážení, zda nová formulace nedává již přímý návod pro řešení, zatímco původní formulace vybízí k důkladnějšímu zamyšlení. Přestože se graf u obou problémů liší pouze svojí orientovaností, působí řešení potíže.

Diskuze k předloženým žakovským řešením zaznamenala následující tvrzení.

U problému 1:

- Není pravda, že když první hrál s druhým, tak druhý hrál s prvním.
- Není pravda, že jestliže hrál první s druhým, tak druhý s prvním nehrál.

U problému 2 naopak:

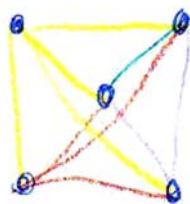
- Co znamená v sídelním městě každého družstva: nejdříve tam a pak ve druhém městě?
- Otázka byla těžší: v čem je rozdíl od předchozího problému?

Uvedená tvrzení byla ve shodě se zaznamenanými výroky žáků ve škole. Daná problematika velice úzce souvisí se slovním vyjádřením myšlenky a usuzováním, jinými slovy odvíjí se od jazykových schopností a schopností porozumět psanému či mluvenému slovu a tedy s integrací českého jazyka.

Analogická úloha byla zadána v rámci diplomové práce (Vilimovská, 2016):

Ve škole se koná florbalový turnaj. Přihlásilo se do něj pět družstev: TUČŇÁCI, MISTŘI, PARTIČKA, SPRÁVNÁ PĚTKA a NEBOJSOVÉ. V turnaji si zahrají všechny týmy navzájem (každý s každým jednou). Kolik bude celkem zápasů?

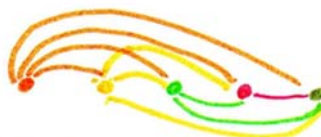
Ani v tomto případě žáci nevyužívají prioritně uzlový graf jako jednu z možných strategií řešení. Přijatelné se pro ně jeví řešení pomocí tabulky, výpisu všech možností nebo grafického znázornění. Využití grafu ilustruje obrázek 4, obrázek 5a,b ilustruje řešení, kde žák na základě grafického znázornění objevuje kombinatorický princip součtu (Melichar, 2007).



Obrázek 4. Využití grafu v řešení žáka



$$4+3+2+1=10$$



$$4+3+2+1=10$$

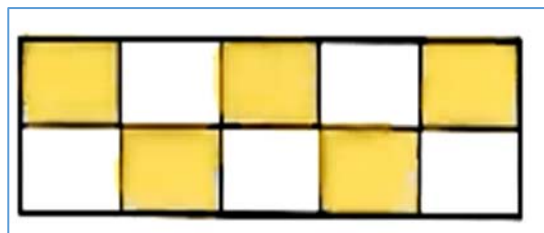
Obrázek 5a,b. Grafické znázornění – kombinatorické pravidlo součtu

6.3. Ukázka rozboru vybrané úlohy studentkou učitelství 1. stupně základní školy

Poslední ukázka se týká samotné činnosti učitele při přípravě na zadání úlohy žákům – rozbor, formulace, modifikace úlohy pro využití ve výuce, v neposlední řadě zamyšlení se nad různými řešitelskými strategiemi. Úloha byla zadána v rámci předmětu *Matematika pro praxi*. Studenti měli nejen úlohu vyřešit, ale zamyslet se nad možnou modifikací na prvním stupni a využít tak vhodné metody řešení.

Úloha (Koman & Dřízal, 1995)

Doplňte na všechna pole šachovnice na Obrázku 6 čísla 1, 2, 3, 4, ..., 9, 10 (na každé právě jednou) tak, aby čísla ve žlutých polích byla vždy součtem čísel v přilehlých bílých polích.



Obrázek 6. Magická šachovnice

Poznámka:

Stejná úloha byla zadána v rámci zkoumání rozdílů ve strategiích u devítiletých žáků a identifikaci nadprůměrných žáků, které popisuje Kaslová (2007). Ukazuje se, že u zdánlivě jednoduché úlohy zůstalo řešení u některých žáků ve fázi úporného, víceméně systematického zkoumání pokusů. Úloha je opakovaně zadávána i studentům učitelství 1. stupně a i pro ně se ukazuje jako celkem obtížná – nejen z hlediska porozumění zadání, ale i z hlediska pochopení matematických vztahů a vlastního řešení. Zaměříme se na logickou úvahu při zpracování této úlohy, s ohledem na její využití na prvním stupni.

První metoda řešení: Pokus – ověření – korekce

Strategie je zdokonalením strategie pokus-omyl, která vede k řešení často až po mnoha pokusech, mnohdy i neúspěšných, které k řešení nemusí vést vůbec. Metoda pokus-ověření-korekce obsahuje určité zákonitosti. Řešitel nejprve odhadne řešení, ověří ho a nový odhad dělá již na základě předchozího výsledku. (Eisenmann at al., 2015)

Dále uvádíme postup, který zvolila studentka, přímo s komentáři k řešení. Zde je vidět prvopočáteční odhad a uvědomění si souvislostí mezi čísly, které vedou k dalším úvahám a nalezení správného řešení.

- Vezmeme čísla 1-10 a zkusíme doplňovat/dosazovat do zadání, aby byla splněna všechna pravidla – viz Obrázek 7.

6	5	10	3	7	7	3	10	5	6
1	8	2	9	4	4	9	2	8	1

6	4	10	5	8	8	5	10	4	6
2	7	1	9	3	3	9	1	7	2

Obrázek 7. Nalezené řešení

Studentka: ...když jsem je blíž zkoumala, tak jsem zjistila, že jak jsou vedle sebe v řádku, tak jsou akorát zrcadlově převrácená přes prostřední sloupec...

Poznámka:

V souvislosti s uvedenou metodou se nabízí několik otázek, které by si měl učitel položit:

- *Uvědomění si souvislosti s geometrickým zobrazením..... didaktický vhled do situace – vede k dalším úvahám: Jsou to různá řešení?*
- *Jak jinak by se dalo řešení objevit?*
- *Jakou metodu zvolit?*
- *Je něco, co si můžeme matematicky vyjádřit a spočítat?*
- *Existují nějaké vztahy, nad kterými by mohly přemýšlet i děti a usnadnit si tak řešení?*

Druhá metoda řešení je založena na logickém vyvození „lepšího“ začátku vyplňování tabulky. Na základě znalostí z aritmetiky si žák logicky vyvodí, která čísla mohou/nemohou být v daných polích. To potom urychlí cestu k nalezení správného řešení, neboť se redukuje počet možností k vyplnění tabulky. Studentka si ve fázi řešení toto vše neuvědomuje, což vyplynulo až z následné diskuze s vyučujícím či ostatními studenty.

Logické a matematické postupy v kombinaci s metodou pokus-ověření-korekce

Postupné úvahy studentky byly následující:

- *Jelikož ve žlutých polích má být součet čísel v přilehlých bílých polích, tak by děti mělo napadnout, že ve žlutém poli nikdy nemůže být číslo 1, protože to už nijak nerozdělíme*
- *Nemůže tam být ani číslo 2, neboť ho nelze rozdělit na součet dvou různých čísel (každé číslo mohu použít pouze jednou)*
- *Stejně tak např. číslo 10 nemůže být v žádném bílém poli, protože největší číslo, které máme do tabulky umístit je právě 10.*

Tímto způsobem se dají najít všechna pravidla pro jednotlivá čísla.

- *Dále si uvědomíme, že u tří žlutých polí uprostřed tabulky, budeme vždy sčítat tři bílá pole; znamená to, že v těchto třech žlutých polích musí být čísla, která se dají rozložit na tři **různé** sčítance (čísla se nesmějí opakovat)*
- *Vypíšeme všechny možné rozklady... skončíme u čísla 6 (5 nelze již rozdělit na tři různé sčítance ... tím nalezneme čísla, která mohou ležet ve třech bílých polích (Obrázek 8)*

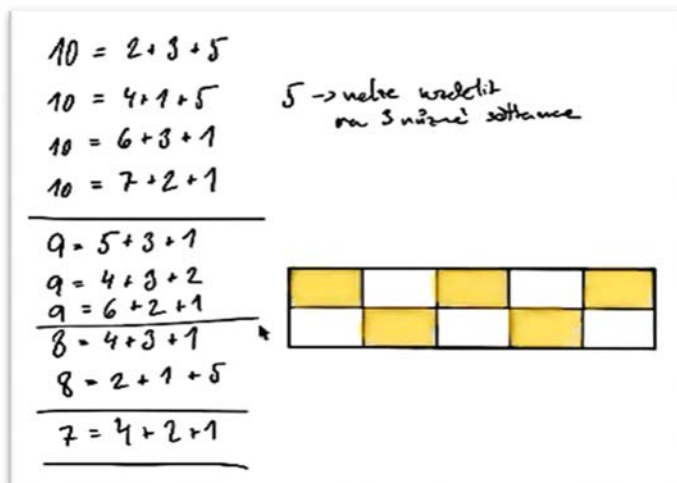
Při bližším zaměření se na řešení si všimneme, že

- *ve žlutých polích jsou vždy čísla 6 až 10*
- *v bílých polích jsou vždy čísla 1 až 5*

Tím, že si toto uvědomíme, můžeme pomocí strategie pokus-ověření-korekce rychleji objevit všechna řešení, nebo ověřit pouze jedno správné.

Poznámka:

Sdělení, která čísla se mohou vyskytovat v bílých, resp. žlutých polích, je jednou z možností, jak usnadnit zadání pro děti. Studentka považovala celý uvedený postup za metodu pokus-omyl a položila si otázku, zda neexistuje nějaký postup, který by byl více matematicky podložený. Na navrženém postupu je možné ilustrovat přesah úlohy na vyšší úroveň.



Obrázek 8. Rozklady čísel

Studentka:

- ... zkoušela jsem různě čísla sčítat...
- ... takže když sečteme čísla 1 až 10, dostaneme 55...
- ... poté jsem si zapsala vztahy, které vyplývají z té šachovnice...
- ... po označení všech políček a naznačení uvedených součtů jsem dosadila do původní rovnice....
- ... vznikla mi rovnice: $a + b + c + \dots + j = 4b + 4d + 4h + 3f + 3j$
- ... následně už jsem pracovala jen s informací, že v bílých polích jsou čísla 1 až 5, kde je tedy součet 15... a na základě toho jsem si dokázala určit možnosti, co může ležet v krajních polích ...
- ... Našla jsem f, j všimla jsem si, že v řešení je tam vždy buď 1 a 4 nebo 2 a 3, čísla mají vždy součet 5
- ... Když dosadím ta čísla 1 a 4/resp. 2 a 3, usnadní se mi další řešení

Myšlenkové procesy studentky ukazují Obrázek 9 a Obrázek 10.

Možnosti řešení

- logické a matematické postupy v kombinaci s metodou pokus omyl

a	b	c	d	e
f	g	h	i	j

$a + b + c + \dots + j = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$
 $a = b + f$
 $g = b + f + h$
 $c = b + d + h$
 $i = d + h + j$
 $e = d + j$

$a + b + c + \dots + j = 4b + 4d + 4h + 3f + 3j$
 $4(b + d + h) + 3(f + j) = 55$
 $4x + 3y = 55$
 $(b + d + h) + (f + j) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
 $x + y = 15$

Obrázek 9. Algebraické řešení

Handwritten algebraic solution for a 5x5 magic square problem. The solution involves setting up equations for the sum of numbers in rows and columns, leading to a system of linear equations. The final solution is $x=10$ and $y=5$.

Diagram of a 5x5 grid with letters:

a	b	c	d	e
f	g	h	i	j

Equations derived from the grid:

$$a+b+c+d+e = 1+2+3+4+5 = 55$$

$$f+g+h+i+j = 1+2+3+4+5 = 55$$

$$a+b+c+d+e = 4x + 3y = 55$$

$$f+g+h+i+j = x + y = 15$$

Solving the system:

$$4x + 3y = 55$$

$$x + y = 15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}$$

Final solution sets:

$$x = \{b, d, h\} = \{1, 4, 5\}$$

$$y = \{f, i\} = \{2, 3\}$$

or

$$x = \{b, d, h\} = \{2, 3, 5\}$$

$$y = \{f, i\} = \{1, 4\}$$

Obrázek 10. Algebraické řešení - pokračování

Možné problémy řešení:

- Neporozumění zadání
- Opakování čísel v šachovnici
- Chyby ve sčítání
- Nedostatečná časová dotace

Usnadnění řešení na 1. stupni:

- Kartičky s čísly 1 až 10 (žáci nezapisují do šachovnice, ale pokládají kartičky – tím nedojde k chybě, že dané číslo bude využito vícekrát)
- Označení žlutých a bílých čísel (v souvislosti se sdělením, která čísla se mohou vyskytovat v bílých a která ve žlutých polích)
- Vepsání některých čísel do šachovnice
- Zmenšení šachovnice (méně políček) a poté navázat touto šachovnicí

S ilustrovaným přístupem studentky korespondují i výsledky šetření, které uvádí Kaslová (2007) a které potvrzují, že se jako metoda řešení úlohy se šachovnicí objevuje zkusmé doplňování čísel do tabulky a ověřování podmínek, třídění na větší-menší, úvahy o potenciálních sousedech (rozklady čísel na dvojice či trojice sčítanců), práce s charakteristikami čísel (sudost-lichost) či jisté zkoumání, které vede k systematičnosti v hledání všech možností, aby nebyla některá vynechána.

7. Závěr

Přechod od tradičního transmisivního pojetí vyučování s předáváním hotových poznatků učitelem ke konstruktivnímu pojetí vybízí k navození příznivé situace, kdy se poznatků zmocňují samotní žáci. Toto pojetí více respektuje individuální zvláštnosti jednotlivých žáků, lépe je motivuje a aktivizuje. Proto vystupuje do popředí potřeba tvořivého přístupu učitele, vytváření příznivého učebního klimatu a rozvíjení samostatnosti a tvořivosti žáků.

Z těchto důvodů je potřeba studenty-budoucí učitele matematiky na toto pojetí připravovat, využívat a rozvíjet jejich tvůrčí potenciál, předkládat jim dostatek námětů a příkladů tvořivých aktivit, metod a forem práce. Vést je ke zveřejňování vlastních námětů a vzájemně výměně zkušeností a realizovaných produktů. Jsou to úkoly především pro didaktickou přípravu studentů. Avšak i v odborné matematické přípravě by mělo být učivo předáváno tak, aby použité metody a formy práce přispívaly k tomuto pojetí, aby docházelo ke zdůraznění aplikací teorie ve vyučovací praxi a k výraznějšímu propojení odborných předmětů s didaktikou matematiky.

Acknowledgements

Príspevek je jedním z výstupů vědeckého projektu SGS 21374 „*Matematika jako účinný nástroj k rozvoji logického myšlení žáků primární školy*.“

Literatura

- Eisenmann, P. et al. (2015). *Pokus – ověření – korekce*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem. <http://trilian.ujep.cz/~pribylk/souby/pok.pdf>.
- Hejný, M. et al. (2005). *Matematika 5: učebnice pro základní školy*. Plzeň: Fraus.
- Kaslová, M. (2007). Rozdíly ve strategiích řešení u devítiletých žáků. In: *Ani jeden matematický talent nazmar*. Sborník příspěvků 3. ročníku konference učitelů matematiky a přírodních oborů na základních, středních a vysokých školách. Praha: Univerzita Karlova.
- Koman, M, Dřízal, V. (1995). *Dejte hlavy dohromady a řešte úlohy*. Praha: Prometheus.
- Kuřina, F. (2002). Učíme myslet v matematice? *Miscellanea logica, 2018 (tom iv)*, 51-59. <http://logika.ff.cuni.cz/papers/misclogiv.pdf>.
- Melichar, J. (2007). *Matematika a její aplikace – utváření a rozvoj klíčových kompetencí*. Ústí nad Labem: Pedagogické centrum Ústí nad Labem, o.p.s.
- PIRLS 2011 & TIMSS 2011, Vybraná zjištění*. (2013). Praha: Česká školní inspekce.
- Příhonská, J. (2008). Tvořivost učitele ve vztahu k rozvoji myšlení žáka. In: *Sborník příspěvků z konference didaktika řečové a neřečové výchovy v mateřské škole a na 1. stupni základní školy* (s. 135-149). Ústí nad Labem: Pedagogická fakulta UJEP v Ústí nad Labem.
- Rosický, J. (2006). *Matematika má vychovávat ke korektnímu myšlení*. Magazín M. Masarykova univerzita. <https://www.em.muni.cz/veda-a-vyzkum/260-matematika-ma-vychovavat-ke-korektnimu-mysleni>.
- Vilimovská, L. (2016). *Aktivizující činnosti pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků 1. stupně ZŠ*. [Diplomová práce]. Technická univerzita v Liberci.