

## VYUČOVÁNÍ PRAVDĚPODOBNOСТИ NA 1. STUPNI ZÁKLADNÍCH ŠKOL V NĚMECKU

Jan FIALA

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Ekonomická fakulta (Česká republika)  
fiala@ef.jcu.cz

### Abstrakt

Kurikulum matematiky v primárním vzdělávání v Německu pružně reaguje na soustavně se měnící stav lidské společnosti a vědy. Příkladem toho je výuka pravděpodobnosti na 1. stupni základních škol. V Německu je učivo pravděpodobnosti díky kvalitní legislativní opoře integrální součástí vzdělávání na všech typech a stupních škol. Didaktici matematiky se věnují výzkumu této problematiky a informují o svých výsledcích převážně v úzce zaměřených studiích. Německé učebnice matematiky pro 1. stupeň obsahují základní učivo pravděpodobnosti. Výuka pravděpodobnosti se na 1. stupni převážně hravou formou zaměřuje na budování prvotních představ žáků o náhodných procesech a pravděpodobnosti jevů. Příspěvek shrnuje podstatné rysy výuky pravděpodobnosti v primárním vzdělávání v Německu a poskytuje množství podnětů pro české učitele při výuce pravděpodobnosti na 1. stupni českých základních škol.

**Klíčová slova:** matematika, vyučování matematice, pravděpodobnost, propedeutika pravděpodobnosti

## TEACHING PROBABILITY AT PRIMARY SCHOOLS IN GERMANY

### Abstract

Mathematics curriculum at primary schools in Germany responds promptly to permanently changing situation of human society and science. Teaching Probability at elementary schools can be set as an example. In Germany the Probability curriculum is owing to fine legislative support an integral part of education at all sorts and stages of schools. The didacticians of Mathematics deal with research of this topic and they inform of their results mostly in narrowly focused studies. The German mathematical schoolbooks for primary schools contain the fundamental curriculum of probability. The Teaching of Probability at primary schools focuses mainly by a playful form to build primal pupil concepts about random processes and probability of phenomena. The article summarizes the fundamental attributes of teaching Probability at primary schools in Germany and it provides a lot of impulses for Czech teachers during teaching Probability at Czech primary schools.

**Keywords:** Mathematics, Teaching Mathematics, Probability, Propedeutics of Probability

### 1. Úvod

Učivo pravděpodobnosti je nedílnou součástí školního vzdělávání v mnoha vyspělých zemích. Rychlost, s jakou si pravděpodobnost získala své místo ve školní výuce<sup>1</sup>, lze považovat

---

<sup>1</sup> V Německu se podle Cordt (2012, s. 4) učivo pravděpodobnosti objevilo ve vzdělávacích plánech pro vyšší ročníky gymnázií již v roce 1901, avšak až do roku 1945 hrály statistika a pravděpodobnost spíše bezvýznamnou roli. V 70. letech 20. století byla pravděpodobnost volitěným učivem k maturitě a vyučovala se během jednoho

za velký úspěch, neboť axiomatická výstavba teorie pravděpodobnosti se objevila až na počátku minulého století<sup>2</sup> a dále se ještě upravovala v padesátých letech.<sup>3</sup> Zatímco zařazení učiva pravděpodobnosti do výuky matematiky pro žáky 2. sekundárního vzdělávání (asi od 11 do přibližně 15 let věku žáků) bývá dnes většinou obvyklé, není jeho zařazení do výuky v primárním vzdělávání<sup>4</sup> samozřejmé. Podrobnější analýzu rozdílů ve vyučování pravděpodobnosti v různých zemích zde neprovádíme a zaměřujeme se pouze na výuku pravděpodobnosti v Německu (kap. 3). Aby mohl čtenář aspoň částečně porovnat vyučování pravděpodobnosti mezi ČR a Německem, připomínáme některé aspekty výuky pravděpodobnosti v ČR (kap. 2). V kapitole 4 a se pak věnujeme propedeutice pravděpodobnosti na 1. stupni německých základních škol.

## 2. Výuka pravděpodobnosti v ČR

Pravděpodobnosti se v českém školním prostředí nevěnuje dostatečná pozornost, jde u žáků i učitelů o méně oblíbené učivo a většinou se jeho důležitost pro budování matematické gramotnosti žáků během školního vzdělávání podceňuje. Učivo pravděpodobnosti je zastoupeno v RVP ZV až pro 2. stupeň ZŠ a v RVP na SŠ. Na 1. stupni ZŠ se s učivem pravděpodobnosti žáci prakticky nesetkají a jeho zařazení záleží čistě na konkrétním učiteli. Pro zařazení učiva pravděpodobnosti do výuky matematiky na 1. stupni chybí legislativní opora, jak pro učitele, tak i např. pro tvůrce učebnic.

Většina dostupných výzkumných příspěvků českých autorů se týká výuky pravděpodobnosti na vyšším než primárním vzdělávání. Autorovi není známa žádná ucelená práce českých autorů, která by se komplexně zabývala zařazením učiva pravděpodobnosti v učebnicích nebo ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ v ČR, ani třeba jen jako součást komplexnějšího pohledu na výuku matematiky na 1. stupni. Okrajově se výuky pravděpodobnosti dotkly snad jen autorky v publikaci (Hošpesová, Stehlíková, Tichá 2007), která se věnuje tématu kultury vyučování matematice. J. Slezáková vytváří *Koncept pravděpodobnosti v prostředí Krokování* (první ročník a vyšší ročníky) (Hošpesová, Stehlíková, Tichá 2007, s. 131-132), ve kterém představuje tzv. krokování k budování propedeutiky pravděpodobnostního myšlení: *...pětice žáků závodí na trase dlouhé 8-12 kroků. První žák hodí hrací kostkou, řekne číslo, které padlo, a udělá příslušný počet kroků. Pak následují další žáci. Kdo je první v cíli? Popsaná hra je hazardní hrou. Autorka dále představuje obtížnější hru, tzv. hru Fáborky, ve které si hráč vytváří pravděpodobnostní intuici. Tu využije ke zvýšení nadějí (šance) na výhru: Žák dostane 4 fáborky a ty položí na čtyři značky krokovacího jeviště. Například na značky vzdálené od začátku jeviště o 2 kroky, 5 kroků, 8 kroků a 12 kroků. Pak se žák postaví na začátek krokovacího jeviště a hodí dvěma kostkami. Souček ok, která na kostkách padnou, odkrokuje. Například, když padne 2 a 6, odkrokuje 8 kroků. Má-li na značce, ke které došel, fáborek, získává bod. Nemá-li, nezíská nic. [...].* Výsledky jsou zaznamenávány do tabulky. Žák si vytváří tzv. klastr<sup>5</sup> budoucího schématu pravděpodobnosti výsledku v jevu „hod dvěma kostkami“, ke kterému se lze vrátit znovu na 2. stupni ZŠ a opětovně na SŠ.

---

pololetí školního roku. Na přelomu tisíciletí se podle Sill a Kurtzmann (2019, s. 11) pravděpodobnost na 1. stupni vyučovala pouze na dvou z 16 spolkových zemích, stochastika jako celek pak na 14 ze všech spolkových zemích.

<sup>2</sup> Axiomatickou výstavbu pravděpodobnosti vytvořil světově známý ruský matematik Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903-1987) v díle *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* v roce 1933.

<sup>3</sup> Kolmogorovou teorii dále rozvíjel např. maďarský matematik Alfréd Rényi (1921-1970).

<sup>4</sup> Jde o primární a sekundární vzdělávání ISCED 1 a 2 podle mezinárodní standardní klasifikace vzdělávání (*International Standard Classification of Education*), který trvá v Německu 4 roky a probíhá v rámci základní školy (*Grundschule*).

<sup>5</sup> Tzv. klastrem se rozumí představeň schématu pojmu, jde o propojení izolovaných informací o daném objektu, procesu, situaci, vztahu v procesu poznávání a učení žáka.

Učivo pravděpodobnosti se v českých učebnicích pro 1. stupeň ZŠ objevuje jen velmi sporadicky. Výjimkou jsou nově např. Hejného učebnice matematiky z nakladatelství Fraus, kde je pravděpodobnost označena jako učivo rozšiřující. Žáci se po řešení vhodně vybraných úloh nejdříve z kombinatoriky, později také z pravděpodobnosti přímo seznamují s výpočtem pravděpodobnosti v Laplaceových pokusech.

Jsme přesvědčeni o zásadním významu zařazení učiva pravděpodobnosti do výuky matematiky na 1. stupni ZŠ a v dalších kapitolách představujeme německé pojetí. Jsme si vědomi toho, že výuka pravděpodobnosti na 1. stupni v Německu je pro české učitele pouhou inspirací a že k této problematice je potřeba vést dlouhodobou odbornou diskusi.

### 3. Výuka pravděpodobnosti v Německu

V Německu je pravděpodobnost spolu se statistikou<sup>6</sup> součástí tzv. stochastiky. V pedagogické literatuře se tak běžně používá označení „stochastické vzdělávání“ nebo „výuka stochastiky“. Z komplexního oboru stochastiky se v dalších kapitolách zaměřujeme pouze na pravděpodobnost. Představíme, jak jsou její základy vyučovány v primárním vzdělávání v Německu, kde se jí ve srovnání s ČR věnuje výrazně větší pozornost. Čerpáme především z monografie (Sill, Kurtzmann 2019)<sup>7</sup> a mnoha jiných především časopiseckých zdrojů.

#### 3.1. Důležitost vyučování a učení se pravděpodobnosti

Význam pravděpodobnosti jako součásti vzdělávání zdůraznila řada osobností z oblasti vědy. Můžeme připomenout maďarského matematika Alfréda Renyia (1921-1970), který zdůraznil užitečnost počtu pravděpodobnosti v běžném životě i v různých oblastech vědy a techniky. Podle něj se žáci učí pravděpodobnost především proto, neboť hraje důležitou roli ve vývoji jejich myšlení. Také se vizionářsky domníval, že je pravděpodobnost nepostradatelná pro další rozvoj matematiky jako vědy.<sup>8</sup> Nemýlil se. Ke všem jeho postřehům se dodnes vracíme. Dokladem toho je zřejmý stále rostoucí význam pravděpodobnosti ve stále širší a pestřejší škále vědních oborů: Znalosti z pravděpodobnosti se využijí v matematické statistice, fyzice, biologii, meteorologii, chemii, medicíně, stavebnictví, ekonomii, finančnictví, pojišťovnictví, farmacii a farmakologii, právu, ale i např. v lingvistice, reklamě aj. Zajímavým příkladem je kryptografie, která přímo využívá nepředvídatelnost nahodilých jevů v šifrování a pomocí posloupnosti (pseudo)náhodných čísel vytváří účinné šifrovací klíče. Německá společnost si uvědomuje tento argument. V roce 2005 byl vyslyšen politický požadavek a s výukou pravděpodobnosti se od té doby začíná v Německu již na 1. stupni ZŠ.

Dalším zásadním argumentem je zkušenost, že téma pravděpodobnosti není ani malým žákům vlastně vůbec cizí. Zřejmě nenajdeme děti, které by se nemusely někdy rozhodovat v situaci, která je (často jen částečně nebo i zcela skrytě) spojena s náhodou. Žáci mladšího školního věku mají naopak s náhodou už řadu zkušeností, jak z předškolních zařízení, tak i z rodinného prostředí. Určitě se setkali s náhodou při různých dětských hrách, které jsou často založeny na principu náhody. Děti tedy vlastně mají i zkušenosti s náhodnými generátory (losovacími zařízeními), jako jsou kostka, pouťové kolo štěstí či losování předmětu z dlaně apod. Při různých hrách (tedy bez pomoci školní výuky) si děti rozvíjí své první představy o náhodě, často si vytváří vlastní animistické představy a marně pátrají po „tajemství“, díky kterému by jim při hodu hrací kostkou zaručeně padla stěna se 6 puntíky. Všechny jejich odhady o nastání toho kterého jevu jsou vždy subjektivní. Pokud nedojde k rozvoji ale i korekci

<sup>6</sup> Někdy také společně s kombinatorikou.

<sup>7</sup> Recenze publikace byla uveřejněna v časopise e-Pedagogium a je dostupná z <https://e-pedagogium.upol.cz/archive.php?filtered=1&mag=epd&year=2018>.

<sup>8</sup> Volně podle Cordt (2002, s. 5).

těchto prvotních intuitivních představ o pravděpodobnosti, zafixují si žáci až do začátku výuky pravděpodobnosti na 2. stupni své chybné představy a nerealistická očekávání, což výrazně ztěžuje výuku pravděpodobnosti na 2. stupni. Prvostupňoví učitelé by měli zavčas využít tento potenciál malých žáků, neboť s každým ročníkem klesá podle psychologů zájem žáků o zkoumání nových věcí i nadšení pro matematiku.

Pravděpodobnost je jako matematická disciplína definována axiomatically, což má za důsledek to, že mnoho jejích pojmů zůstává ve výuce dlouhou dobu nedefinováno, a i později jsou tyto základní pojmy ve školním prostředí velmi těžko uchopitelné. To všechno však není překážkou pro zařazení pravděpodobnosti na 1. stupeň! Pravděpodobnost je možné vyučovat jediné tak, že se žáci budou dlouhodobě a opakovaně setkávat s pravděpodobností, a to vhodnou formou. Toto „setkávání“ je proces, který by měl začít již na 1. stupni tak, jak je tomu na německých školách. Pojem pravděpodobnost je potřeba „pěstovat“ a rozvíjet. Experimentování a pozorování – běžné z výuky pravděpodobnosti na 2. stupni – může provádět snadno i prvostupňový žák, používané učební metody, založené na hrách a experimentech také nebrání zařazení tohoto učiva. Naopak budou vzbuzovat u žáků zájem, radost a zvědavost. Výuka pravděpodobnosti na 1. stupni by měla být hravá a měla by umožnit udělat výuku „živou“ a pro žáky zajímavou. Kromě toho se také při experimentech, při zápisech a zpracování výsledků pokusů žáci učí techniky a metody podstatné i pro další oblasti matematiky, např. statistiky.

### 3.2. Odborná literatura a výzkum výuky pravděpodobnosti v Německu

Výuce pravděpodobnosti na primárním vzdělávání se v Německu věnuje mnoho odborných didaktiků matematiky, psychologů, odborníků v oblasti primární i sekundární pedagogiky i učitelů z praxe. Sill a Kurtzmann hned v úvodu své publikace (2019, s. 1) upozorňují, že mezi německými didaktiky existuje více různých představ o smysluplné výuce stochastiky (včetně pravděpodobnosti). V kapitole 4.1 čerpáme především z publikace (Sill, Kurtzmann 2019). Pro hlubší studium problematiky je však možné využít řadu dalších odborných i populárně-naučných publikací, které poskytují ucelený či jen částečný metodologicko-didaktický vhled do tématu výuky pravděpodobnosti v Německu.<sup>9</sup>

Eichler, A. & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Eichler, A. & Vogel, M. (2011). *Leitfaden Stochastik*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Kütting, H. & Sauer, M. J. (2008). *Elementare Stochastik: mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte*. Berlin (aj): Springer.

Kütting, H. (1994). *Didaktik der Stochastik*. Mannheim: BI-Wiss.-Verlag.

Schupp, P. (1979). *Zugänge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Tübingen: DIFF.

Gigerenzer, G., Swijtink, Z., Poter, Th., Daston, L., Beatty, J. & Krüger, L. (1999). *Das Reich des Zufalls. Wissen zwischen Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeiten und Unschärfen*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Grünwald, R. (1989). *Untersuchungen unter Einbeziehung kombinatorischer und stochastischer Aufgaben in den Mathematikunterricht der unteren Klassen (Schulmathematische Forschung)*. Preprint č. 221, Humboldt-Universität zu Berlin: Sektion Mathematik.

<sup>9</sup> Vybíráme jen nejcitovanější publikace, vynechali jsme odborné publikace k teorii pravděpodobnosti a statistiky.

Grünewald, R. (1991). Schwierigkeiten mit der (statistischen) Wahrscheinlichkeit in den ersten Schuljahren. In: Stampe, E., Schulz, W., & et al. *Berliner Tagung zur Didaktik der Mathematik*, s. 49-52.

Grünewald, R. (1991). Zum Unterrichten von Stochastik in der Primarstufe – Standpunkte und erste Erfahrungen. In: R. Grünewald (ed.), *Stochastik im Mathematikunterricht der unteren Klassen; Kolloquium am 4.2.1991 in Berlin*, s. 44-53.

Heitele, D. (1977) Fragmente einer Geschichte der Wahrscheinlichkeitsdidaktik (insbesondere des Primarbereiches). *Didaktik Mathematik*. 12(4), s. 245-262.

Hilsberg, I. & Warmuth, E. (1991). Stochastik von Klasse 1 bis zum Abitur – ein Lehrgangsentwurf. In: R. Grünewald (ed.), *Stochastik im Mathematikunterricht der unteren Klassen; Kolloquium am 4.2.1991 in Berlin*, Preprint Nr. 91-18, (s. 6-14). Humboldt-Universität zu Berlin: Fachbereich Mathematik.

Neubert, B. (2006). Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ in Schulbüchern für den Primarbereich. In Eichler, A., & Meyer, J. (ed.), *Tagungsband 2006/2007 des Arbeitskreises "Stochastik in der Schule" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. Anregungen zum Stochastikunterricht, Band 4* (s. 49-63). Hildesheim: Franzbecker.

Panknin, M. (1974). *Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit und Statistik für die Klassen 1-6*. Bochum: Verlag Ferdinand Kamp.

Sill, H-D., & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Wollring, B. (1994). Fallstudien zu frequentistischen Kompetenzen von Grundschulkindern in stochastischen Situationen – Kinder rekonstruieren verdeckte Glücksräder. In H. Maier & J. Voigt (ed.), *Untersuchungen zum Mathematikunterricht. Verstehen und Verständigung* (s. 144-180). Köln: Aulis Verlag.

Mnoho příspěvků, informací z výzkumných zpráv, zkušeností z realizovaných experimentů ve výuce, různé případové studie a návrhy na realizaci výuky stochastiky lze nalézt především v německých časopisech matematicko-didaktického a pedagogického zaměření, k nimž patří např. *Stochastik in der Schule, Grundschule, Grundschulunterricht Mathematik, Grundschulmagazin, Mathematik lehren, Mathematik in der Schule, Mathematik, Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, Statistik in der Schule* aj.<sup>10</sup>

Převážná část výzkumů výuky pravděpodobnosti v Německu se týká sekundárního vzdělávání I a II, začíná se však také zvyšovat počet příspěvků k tématu pro 1. stupeň ZŠ. Cordt (2012, s. 3) shrnuje výsledky dosud realizovaných výzkumných šetření a zmiňuje především výsledky studie PISA z roku 2003, podle kterých považují němečtí učitelé pravděpodobnost spíše za tzv. „téma na konec školního roku“. Šetření rovněž poukázalo na to, že učitelé v Německu učí pravděpodobnost (stochastiku) často neradi a věnují jí ve výuce na 1. stupni prostor v míře nezbytně nutné. Příčin spíše negativního pohledu na výuku pravděpodobnosti v názorech učitelů může být více: teprve nedávno (přelom 19. a 20. století) byla pravděpodobnost zařazena do výuky na německých školách, více aktivně působících učitelů neprošlo na VŠ odpovídající přípravou v pravděpodobnosti aj. Přesto 42,5 % tázaných učitelů souhlasí s rostoucím významem stochastiky pro běžný život žáků a potřebou zařadit toto učivo do výuky, s výukou pravděpodobnosti na primárním vzdělávání souhlasí 17,5 % respondentů. Přestože působí žáci při výuce pravděpodobnosti jako pozornější a motivovanější,

---

<sup>10</sup> Podrobný přehled lze nalézt v seznamu použité literatury diplomové práce Cordt (2012).

hodnotí učivo jako obtížné.<sup>11</sup> Cordt se domnívá, že příčinou posledního zjištění by mohl být nedostatek vlastních zkušeností žáků z mimoškolního prostředí.

Výuka pravděpodobnosti trpí v primárním i sekundárním vzdělávání podle Sill a Kurtzmann (2019, s.12) dodnes značně tím, že se v různých spolkových zemích dost liší vysokoškolská příprava budoucích prvostupňových učitelů: podíl matematické složky vzdělávání učitelů kolísá mezi 3-33 % celkového obsahu vysokoškolské přípravy!

### 3.3. Učivo pravděpodobnosti v německých legislativních kurikulárních dokumentech

Pravděpodobnost je v Německu zakotvena především ve dvou kurikulárních dokumentech, které jsou závazné pro všechny spolkové země. Jde o tzv. *Vzdělávací standardy matematiky pro primární vzdělávání* (vyd. 2005, dále je *Standardy*)<sup>12</sup> a tzv. *Doporučení k cílům a tvorbě stochastické výuky...* (vyd. 2002, dále jen *Doporučení*).

#### 3.3.1 Učivo pravděpodobnosti ve vzdělávacích standardech

*Standardy* stručně shrnují cílové obsahové kompetence žáků pro oblast *Data, četnost a pravděpodobnost*. Odstavec k pravděpodobnosti začíná heslem *Srovnávat pravděpodobnosti jevů v náhodných experimentech* a je dále upřesněn dvěma body:

- znát základní pojmy (např. jistý, nemožný, pravděpodobný),
- odhadovat šance na výhru v jednoduchých náhodných experimentech (např. hry s kostkou) (2005, s. 11).

Žáci v primárním vzdělávání v Německu by se měli naučit především kvalitativně ohodnocovat pravděpodobnost, a to pomocí přídatných jmen *nemožné, pravděpodobné a jisté*, případně se zdůrazněním jako *spíše nemožné, téměř jisté* apod. Cílem výuky je také naučit se znázorňovat pravděpodobnost výsledků náhodných procesů na tzv. pravděpodobnostní škále. Žáci by se měli dále pokoušet odhadovat šance na výhru v různých hrách o náhodě a přemýšlet o tom, zda je hra spravedlivá či nikoliv. Ze *Standardů* citujeme typové úlohy, které představují cílový standard žáků na konci 4. třídy německé základní školy.

Úloha 1: *U hrací kostky je součet ok proti sobě ležících stěn stále 7. Tedy např. 3 proti ..., ... proti ... apod.*

Úloha 2: *Představ si, že házíš hrací kostkou pětkrát a sčítáš počty ok na vrchní stěně kostky po dopadu. Nejmenší součet je... Největší možný součet je...*

Úloha 3: *Představ si, že házíš dvěma hracími kostkami. Při jednom hodu sčítáš počty ok na vrchních stěnách obou kostek. Jaké součty jsou možné? Všechny vypiš...*

Úloha 4: *Při házení dvěma hracími kostkami je součet 7 ok, která padnou na vrchních stěnách kostek, podstatně častější než součet 12. Čím to je?...*

<sup>11</sup> Více k tomu například v článku Martignon, L. & Wassner, C. (2005). *Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 2/2005, s. 202-222.

<sup>12</sup> Pro dokreslení kompaktnosti systému kurikulárních dokumentů v Německu dodáváme, že oba dokumenty navazují na tzv. *Společný rámec pro spolkové země ve vzdělávání dětí v předškolních zařízeních* (v originále *Gemeinsamer Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen*, vyd. 2004 a dostupné z [https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen\\_beschluesse/2004/2004\\_06\\_04-Fruhe-Bildung-Kitas.pdf](https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_06_04-Fruhe-Bildung-Kitas.pdf)). Dokument naznačuje hlavní směry a cíle vzdělávání žáků v mateřských školách. Každá spolková země kromě toho vydává pro učitele svůj tzv. *Orientační plán pro vzdělávání a výchovu v předškolních zařízeních* (*Orientierungsplan für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen*), který je pro učitele z dané spolkové země k dispozici na <https://www.bildungsserver.de>.

Úloha 5: *Hraješ si s kamarády s hrací kostkou. Každý z hráčů si smí vybrat jedno pravidlo, podle kterého bude získávat body.*

- *Získáš bod, když bude počet ok na vrchní stěně kostky sudý.*
- *Získáš bod, když bude počet ok na vrchní stěně kostky dělitelný třemi.*
- *Získáš bod, když bude počet ok na vrchní stěně kostky menší než pět.*
- *Získáš bod, když bude počet ok na vrchní stěně kostky větší než pět.*
- *Získáš bod, když bude počet ok na kostce nulový.*

*Chceš získat co nejvíce bodů. Které pravidlo bys zvolil? (2005, s. 33-35)<sup>13</sup>*

Z typových úloh vyplývá, že žáci by na 1. stupni měli řešit v hodinách matematiky úlohy, se kterými se setkávají čeští žáci nejdříve na 2. stupni ZŠ! Mezi úlohami rozhodně není úkol vypočítat hodnotu pravděpodobnosti (kvantifikovat ji), ale pouze získávat první zkušenosti s náhodnými procesy a jejich výsledky a pravděpodobnosti výsledků kvalitativně ohodnocovat.

### 3.3.1 Učivo pravděpodobnosti v Doporučeních k výuce pravděpodobnosti

Tzv. *Doporučení* (2002)<sup>14</sup> precizují cíle vzdělávání žáků v pravděpodobnosti na 1. stupni ZŠ v Německu. Ve své úvodní části kladou autoři dokumentu směrem k současné výuce matematiky jasný požadavek: *K úkolům vzdělávání moderní výuky matematiky patří [...] rozvíjet dovednosti žáků rozhodovat se a zdůvodňovat pomocí dat či pravděpodobnostních úvah a soudů.* (2002, s. 22-23) Taková výzva našla v Německu svou odezvu: učivo pravděpodobnosti je zařazeno v učebnicích matematiky pro 1. stupeň a také budoucí prvostupňoví učitelé jsou školeni v propedeutice pravděpodobnosti na VŠ. Autoři dále požadují, aby učivo pravděpodobnosti nestálo ve výuce matematiky osamoceně, ale výhradně propojené s ostatním učivem. V rámci absolventské úrovně ve stochastice na primárním vzdělávání by žáci mimo jiné měli:<sup>15</sup>

- *být konfrontováni s pravděpodobnostními výpověďmi, měli by zkusit hry s generátory náhodných čísel aj.,*
- *odhadnout a kvalitativně srovnávat pravděpodobnosti jednoduchých náhodných jevů na základě dat, zkušeností nebo analýzy podmínek průběhu náhodného procesu,*
- *disponovat prvními zkušenostmi s jednoduchými náhodnými experimenty.* (2002, s. 23)

### 3.4. Sonda zařazení učiva pravděpodobnosti v německých učebnicích<sup>16</sup>

Německé školy si vybírají z široké nabídky učebnic matematiky pro žáky 1. stupně.<sup>17</sup> Každá spolková země nebo jejich skupiny preferují své vzdělávací materiály, které reflektují obsahové požadavky na vzdělávání podle školní legislativy příslušné spolkové země.

<sup>13</sup> Formulace úloh byly oproti originálu terminologicky mírně zpřesněny.

<sup>14</sup> *Doporučení* vydala v roce 2002 německá Společnost pro didaktiku matematiky (*GDM – Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*). Více informací na <https://didaktik-der-mathematik.de>.

<sup>15</sup> Citujeme pouze část k pravděpodobnosti.

<sup>16</sup> Srovnáním učebnic pro 2. stupeň základních škol (a víceletá gymnázia) se zabývala Jana Vincencová ve své diplomové práci *Pravděpodobnost a statistika v německých, rakouských a českých učebnicích matematiky pro nižší stupeň gymnázia*. (2013) Masarykova univerzita v Brně, Pedagogická fakulta. Dostupné z <https://is.muni.cz/th/fds94/>.

<sup>17</sup> K nejčastěji užívaným učebnicím matematiky pro žáky 1. stupně v Německu patří: *Denken und Rechnen (Ausgabe Ost, Arbeitsheft Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit, Westermann Schulbuchverlag, Braunschweig)*, *Eins zwei drei /Cornelsen verlag, Berlin)*, *Mathefreunde (Volk und Wissen Verlag, Berlin)*, *Mathematikus (Westermann Schulbuchverlag, Braunschweig)*, *Nussknacker (Ernst Klett Verlag, Stuttgart)*, *Rechenwege (Volk und Wissen Verlag, Berlin)*, *Zahlenzauber (Oldenbourg Schulbuchverlag, München)*.

Zdržujeme se úmyslu poskytnout zde přehled o zařazení učiva pravděpodobnosti v učebnicích pro žáky 1. stupně vzdělávání. Na ukázkou ale představujeme zařazení učiva pravděpodobnosti v učebnici *Nussknacker* (2014) z nakladatelství *Ernst Klett Verlag*, která se užívá od roku 2014 v téměř všech spolkových zemích. Učivo pravděpodobnosti se v ní vyskytuje v učebnicích pro 2., 3. a 4. třídu v kapitole s názvem *Náhoda – pravděpodobnost – kombinatorika*<sup>18</sup> a pod heslem *Experimenty s kostkami*.<sup>19</sup> Formálně velmi pěkně zpracované a tvořivě pojaté učebnice obsahují mnoho doprovodných barevných obrázků motivačního i výkladového významu. Průvodcem žáků je havran Trax, jehož rady jim pomáhají při řešení. K učebnici jsou k dispozici pracovní sešity (tištěné nebo na CD ROMu), učebnice pro učitele, učitelský balík s materiály, předlohy ke kopírování rozlišené podle náročnosti pro možnost diferenciaci ve vyučování, motivační sešit a další didaktické materiály do výuky.

V učebnici *Nussknacker* pro 2. třídu je hlavní pozornost věnována porozumění a správnému užívání pojmů *nemožný*, *pravděpodobný* a *jistý*. Slouží k tomu tzv. pravděpodobnostní škála (bez označení krajních bodů čísla 0 a 1 jako mezních hodnot pravděpodobnosti). Žáci na 1. stupni nacvičují pouze kvalitativní ohodnocení pravděpodobnosti. Jedna z prvních úloh využívá házení kostkou, tedy Laplaceův náhodný pokus. Překvapivě následuje úloha na házení připínáčkem, což je ne-Laplaceův pokus. Ta demonstruje žákům, že každý z hodů nenastává při sérii opakování „stejněkrát“.<sup>20</sup> V dalších úlohách žáci procvičují rozhodování o „férových“ hrách, kde se již využívá hodů dvěma kostkami.

V učebnici pro 3. třídu se žáci poprvé seznamují s náhodným procesem losování různě barevných kostek ze sáčku a na řadě úloh trénují své odhady, který výsledek losování je *nemožný*, *pravděpodobný* a *jistý*. Opět tedy jde o nácvik kvalitativního ohodnocení pravděpodobnosti. Dále žáci srovnávají dvě pravděpodobnosti: *V prvním sáčku je 1 červená a 2 modré kostky, v druhém sáčku jsou 3 červené a 2 modré kostky. Ze kterého sáčku je výhodnější losovat, chci-li vylosovat červenou kostku?* Apod. Překvapivě se zde objevuje již také obtížnější úloha na losování dvou kostek bez vracení.

V učebnici pro 4. třídu se nově objevuje losovací zařízení kolo štěstí, také nazývané ruletka, které není v českém prostředí příliš známé a využívané. S koly štěstí lze řešit mnoho různých úloh, velkou výhodou je možnost vyrobit si vlastní ruletku a využít ji např. při rozhodování o férovosti hry. Žáci opět odhadují, zda jsou sledované náhodné výsledky *nemožné*, *pravděpodobné* nebo *jisté*. Na pravděpodobnostní škále přibyl ještě stupeň *nepravděpodobný*, umístěný mezi *pravděpodobný* a *nemožný*. V některých úlohách se využívají strukturně složitější kola štěstí, u nichž jsou jednotlivá pole (výseče kruhové ruletky) odlišena symbolem a zároveň také barvou. Díky tomu lze sledovat i složitější náhodné jevy.

Úlohy z pravděpodobnosti zařazené v učebnicích *Nussknacker* pro 2. až 4. třídu rozvíjí další úlohy v doplňkových učebních materiálech vydávaných k učebnici.

#### 4. Propedeutika pravděpodobnosti v primárním vzdělávání v Německu

*Propedeutikou* zde budeme dále podle Pedagogického slovníku (Průcha, Walterová, Mareš 2003, s. 184) rozumět *průpravu* či *přípravu ke studiu určitého oboru*. Užíváme tento termín ve smyslu přípravy žáků 1. stupně na učení se pravděpodobnosti na 2. stupni ZŠ. Tam žáci navazují na své zkušenosti o náhodných jevech ze tříd 1. stupně, své zkušenosti a představy o matematických fenoménech rozvíjí a zpřesňují obsah dosud používané „dětské“ terminologie. V Německu se tak i v případě učiva pravděpodobnosti dodržuje spirálový princip zařazování

<sup>18</sup> V originálním znění *Zufall – Wahrscheinlichkeit – Kombinatorik*.

<sup>19</sup> V originálním znění *Würfelexperimente*.

<sup>20</sup> Připínáček je tzv. asymetrický náhodný generátor.



učiva do výuky, který navrhl vývojový psycholog J. Bruner (1915-2016) na základě objevu spirálového vývoje dětského myšlení.

První propedeutiku pravděpodobnosti v Německu, avšak pro nižší třídy gymnázia (v ČR by šlo o nižší třídy 4letého gymnázia) zpracoval A. Engel v roce 1966<sup>21</sup>, která se však pro primární vzdělávání kvůli své náročnosti nehodí. Reformní hnutí v 60. a 70. letech „New Math“ v mnoha zemích změnilo učební plány matematiky, v jejímž duchu napsali V. Lindenau a M. Schindler učebnici *Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe I*<sup>22</sup>. Koncepti jejich vyučování pravděpodobnosti lze považovat za možnou, Sill a Kurtzmann (2019, s. 8-9) však pouze komentují její výhody a nevýhody. Didaktiku stochastiky rozvíjeli také např. H. Kütting (1994) či D. Heitele (1977) v dílech uvedených v kapitole 3.2 aj.

Ve svém konceptu výuky pravděpodobnosti na 1. stupni ZŠ v Německu (kap. 4.1 a 4.2) Sill a Kurtzmann (2019, s. 4) dokládají, že zařazení učiva pravděpodobnosti na 1. stupeň je v souladu s konstruktivistickou teorií učení švýcarského filozofa a psychologa J. Piageta (1896-1980).

#### **4.1. Koncept propedeutiky a výuky pravděpodobnosti v 1. a 2. ročníku ZŠ v Německu podle Sill a Kurtzmann (2019)**

Výchozím pojmem koncepcí výuky stochastiky (jejíž součástí je pravděpodobnost) jsou pro Sill a Kurtzmann (2019, s. 18) *stochastické situace*, kterými rozumí „jednak situace v realitě, ve kterých vznikají a z nichž mohou být zpracovávána data, ale také situace, v nichž jsou možné různé výsledky, ale ve kterých není s jistotou dáno, který z výsledků nastane.“ Stochastické situace lze nalézt všude v přírodě i společnosti: stavy počasí, růst rostlin, tělesný vývoj člověka a zvířat, produkce výrobku, změny ve volnočasových aktivitách dětí, průběh spánku, realizace snídaně, cesta do školy, psaní testu atd. Typické stochastické situace vznikají při hodech mincí nebo jinými předměty, točení kolem štěstí, losování z osudí apod.

Na stochastické situace nahlíží Sill a Kurtzmann (2019, s. 21-29) jako na každý proces, děj, který označují za „náhodný proces“, má-li při své realizaci více možných (navzájem různých) výsledků. Přitom který z výsledků nastane, rozhoduje náhoda. Sill a Kurtzmann (2019, s. 22) rozlišují procesy, které už byly ukončeny (např. Arne již napsal test.), které ještě trvají (např. růst stromu) nebo procesy, které teprve očekáváme (např. házení mincí). Některé procesy trvají velmi krátce (např. házení mincí), některé trvají déle (např. napsání testu) a některé velmi dlouho (např. růst stromu). Rozlišit lze také stochastické děje, u kterých výsledek neovlivníme (např. házení mincí) a u jiných zase ano (např. napsání školního testu). Výsledkem každého stochastického děje jsou určité výsledky (stavy, objekty nebo myšlenky) vybavené určitými znaky. Chceme-li proces studovat prostředky statistiky či pravděpodobnosti, je důležité se pro určitý znak rozhodnout, stejně jako metody, pomocí nichž zjistíme jeho hodnotu. Podstatné je také zjistit, za jakých podmínek děj probíhá a jaké faktory mají na výsledek vliv. Ne samozřejmou vlastností procesu je jeho opakovatelnost za stejných podmínek, jak jsme tomu zvyklí u náhodných experimentů. Jako stochastické situace jsou označovány tedy i takové, které proběhnou jen jedenkrát, bez možnosti svého opakování (např. fotbalový zápas). Většina stochastických procesů v přírodě, společnosti a v životě člověka proběhne pouze jedenkrát, málokdy se dají opakovat a většinou mají více možných výsledků.

<sup>21</sup> Engel, A. (1966). Propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie. *Mathematikunterricht* 12(4), s. 5-20.

<sup>22</sup> Lindenau, V., & Schindler, M. (1978). Neuorientierung des Mathematikunterrichts. 1. vyd. Studentexte zur Grundschuldidaktik. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Koncept zprostředkování základních obsahů z pravděpodobnosti v počáteční výuce na 1. stupni (v 1. a 2. ročníku ZŠ) rozdělili Sill a Kurtzmann (2019, s. 59, 60) do 5 fází, které v dalších kapitolách stručně okomentujeme a doložíme úlohami:

- *Rozpoznání možných výsledků procesu*
- *Porovnávání (Srovnávání) pravděpodobností*
- *Popis a interpretace pravděpodobností*
- *Znázornění pravděpodobností na škále*
- *Zkoumání vlivu podmínek procesu na pravděpodobnost výsledků*

#### 4.1.1 Rozpoznání možných výsledků procesu

Prvním krokem k získávání prvotních zkušeností s výpověďmi o pravděpodobnostech je podle Sill a Kurtzmann (2019, s. 62-70) dovednost rozpoznat možné výsledky stochastického procesu, přičemž je s tím podle jejich názoru spojena řada problémů a úskalí.

Předně problémy terminologické: zatímco jsou pojmy *jistý jev* a *nemožný jev* definované pojmy z teorie pravděpodobnosti, používá se běžně při výuce také hovorové spojení *možný (výsledek)*. *Náhodný jev*, který se jako termín na 1. stupni nepoužije, je chápán jako libovolná podmnožina množiny všech možných výsledků nebo také jako výpověď o výsledku náhodného procesu. Je proto potřeba rozlišovat mezi *náhodným jevem* a *výsledkem náhodného procesu*, často označovaným jako *elementární jev*. *Jev* označuje v hovorové řeči něco výjimečného, zatímco v teorii pravděpodobnosti je to pojem zcela neutrální. Pojmy *jistý*, *možný* a *nemožný* by se měly používat pouze ve spojeních s *výsledkem*: *jistý výsledek* (ve významu *bezpečný, spolehlivý, bezproblémový, zaručený* apod.), *možný výsledek*, *nemožný výsledek* (ve významu *neproveditelný, nemyslitelný* apod.). Za vhodná lze považovat synonymní zdůraznění slov *jistý* a *nemožný*: *Je jediná možnost, že...* *Je absolutně jisté, že...* *Je zcela jisté, že...* *Bez pochyby nastane, že...* *Není žádná možnost, že...* *Vůbec není možné, aby...* *Je úplně nemožné, aby...* *Je vyloučeno, aby...* Apod. Porozumění „mezím“ kvalitativního ohodnocení pravděpodobnosti se opírá o skutečnosti, že výsledek nastane jistě (s jistotou) tehdy, když může nastat jediný tento výsledek jako možný, naopak výsledek je *nemožný*, když nemůže nastat žádný možný výsledek. Znak sledovaný v procesu má jedinou hodnotu, nebo žádnou hodnotu, nemají tedy charakter náhodnosti a nepůjde o stochastický proces, neboť každý stochastický proces má aspoň dva (spíše více) různých výsledků. Autoři v tomto případě doporučují vynechat úlohy o losování předmětu z osudí, v němž jsou pouze tytéž identické předměty. Důvodem je hlavně to, že takové losování nedává smysl a ani neodpovídá praxi, kde je většinou více možných výsledků.

Přebíráme úlohy podle Sill a Kurtzmann (2019, s. 67, 68).

**Úloha 1.** S využitím obrázku<sup>23</sup> doplň do vět jistý, možný, nemožný. a) Je..., že Natálka poběží rychleji. b) Je..., že se Dilara potí. c) Je..., že Timo vstřelí gól. d) Je..., že Mateo upadne. e) Je..., že Emira dá gól.

**Úloha 2.** Doplň do věty jistý, možný, nemožný. Je..., že o Velikonocích postavím sněhuláka.

**Úloha 3.** Při školním sportovním dnu se koná běh na 50 m. Rozhodni, jestli jsou následující výsledky možné, jestli mohou nastat s jistotou nebo jsou zcela nemožné. A. Vítěz potřebuje méně než 5 sekund. B. Jeden žák odstoupí ze závodu. C. Vítěz potřebuje víc než 5 sekund.

**Úloha 4.** Jaké bude u nás zítra počasí? Co jistě nastane, co je možné a co vůbec není možné? A. Zítra bude pršet. B. Zítra bude sněžit. C. Zítra znovu vyjde slunce. D. Zítra bude velmi větrno. E. Zítra budou padat kroupy.

<sup>23</sup> Obrázek zde neuvádíme. Obrázek znázorňuje hřiště, na kterém si hrají děti. Dětem na obrázku byla před řešením úlohy přiřazena jména.

Aby se učitel vyhnul pojmu *výsledek*, spojí žáci ve svých výpovědích kvalitativní ohodnocení přímo se sledovaným jevem: *Děšť je zítra pravděpodobný. Vyšplhat do 10 s je nemožné.* Apod. Nebo také jednoduše: *To je jisté. To je nemožné.*

#### 4.1.2 Porovnávání pravděpodobností

Jestliže se ve výuce naváže na dosavadní zkušenosti žáků s hovorově užívaným slovem *pravděpodobný*, měli by se žáci naučit rozhodovat a vyjadřovat svá přesvědčení o tom, že jeden možný výsledek je *pravděpodobnější* než druhý a ve speciálním případě že může být první výsledek *stejně (přibližně stejně) pravděpodobný* jako druhý. Pravděpodobnosti se tedy buď sobě blíží (nebo jsou si zjevně rovny), nebo jsou (značně) rozdílné.

Při porovnávání pravděpodobností dvou výsledků téhož procesu se musí zjistit, který z obou výsledků má *větší* a který má *menší* pravděpodobnost. Slouží k tomu připojení příslovce *spíše*, případně *víc*, jako např. *Králík sežere spíše mrkev než bramboru.*, nebo druhý stupeň *pravděpodobnější*, jako např. *Je pravděpodobnější, že králík sežere mrkev nebo bramboru?*

Porovnání pravděpodobností výsledků má zvláštní význam, když se při sledovaném procesu mění podmínky, jako např. *Kdo se pilně učí, dostane dobrou známku.* Tedy dobrou známku dostane s větší pravděpodobností ten, kdo se pilně učí. Změna v přístupu žáka k učení zřejmě ovlivní kvalitativní hodnotu pravděpodobnosti, která se sníží: *Nebude-li se žák pilně učit, je méně pravděpodobné, že dostane dobrou známku.*

Podle Sill a Kurtzmann (2019, s. 72) je možné porovnat i dvě malé pravděpodobnosti a uvádí tento příklad: *Co je pravděpodobnější? Že zítra odpadne vyučování, protože bude učitelka nemocná, nebo kvůli tomu, že budou vyhlášeny prázdniny z důvodu nadměrného horka?*

Porovnávání pravděpodobností by samozřejmě bylo snazší, pokud bychom mohli pravděpodobnosti obou výsledků číselně vyjádřit zlomkem nebo desetinným číslem a čísla jednoduše porovnat. To je však možné až po zavedení kvantitativního hodnocení pravděpodobnosti, což se stane až na druhém stupni ZŠ. Na 1. stupni tuto cestu tedy využít nelze.

**Úloha 1.** *Představ si, že se při hodině tělocviku učíš skok do dálky s rozběhem. Jaký výsledek je pro tebe pravděpodobnější, je-li skok platný?*

*A. Skočíš více než 2 m. B. Neskočíš dál než 2 m.*

**Úloha 2.** *Potřebuješ do školy ještě jednu knížku. Kde ji pravděpodobněji koupíš?*

*A. V supermarketu. B. V knihkupectví.*

**Úloha 3.** *Jsi na cestě do školy. Co spíše uvidíš? A. Autobus. B. Kočár.*

**Úloha 4.** *Kdy je pravděpodobnější, že bude u nás teplo? A. V červenci. B. V prosinci.*

**Úloha 5.** *Kdy budeš mít spíše úpal od slunce?*

*A. Při jízdě na kole v říjnu. B. Při slunném letním dni v červnu.*

**Úloha 6.** *Co si pes spíše vybere? Co je pravděpodobnější? A. Kost. B. Okurku.*

**Úloha 7.** *Co je pravděpodobnější? A. Vyšplháš nahoru do 10 s. B. Nevyšplháš do 10 s?*

#### 4.1.3 Popis a interpretace pravděpodobností

Potom co žáci porovnali pravděpodobnosti výsledků daného stochastického procesu, musí je kvalitativně ohodnotit. Slovo *pravděpodobný* je používáno ve svém hovorovém významu a vyjadřuje, že nějaký výsledek nastane s velkou jistotou, jako např. *Pravděpodobně bude zítra pršet.* Podobné výpovědi žáci sami bez problémů vytvářejí již v 1. ročníku ZŠ. (Sill, Kurtzmann 2019, s. 75) Pod popisem pravděpodobnosti výsledku se na 1. stupni ZŠ rozumí výhradně její kvalitativní popis pomocí *pravděpodobný* a *nepravděpodobný*. Synonymy mohou být pro

pravděpodobný (resp. nepravděpodobný) Nastane to s (poměrně) velkou pravděpodobností. Očekává se, že to nastane. Spíše to nastane. apod. (resp. S (poměrně) velkou jistotou to nenastane. Neočekává se, že to nastane. Spíše to nenastane.). Výpovědi o pravděpodobnostech jsou předpovědi (prognózy, odhady, domněnky) o budoucích výsledcích, kterými žáci vyjádří, do jaké míry očekávají „nastoupení“ daného výsledku. Zdůvodnit zvolené subjektivní kvalitativní hodnocení pravděpodobnosti lze odkazem na zkušenosti či znalosti o větší skupině stejných objektů, jak vysvětluje příklad, ve kterém se označí výpověď *Je možné, že zajíc doskočí dál než morče.* jako *pravděpodobná*, neboť spíše nastane, výpověď platí pro většinu zajíců, zatímco výpověď *Je možné, že morče doskočí dál než zajíc.* se ohodnotí jako *nepravděpodobná*, neboť nastane jen zřídka. Sill a Kurtzmann (2019, s. 80) nedoporučují užívat formulaci *Jak (Do jaké míry) pravděpodobné je, že...?*, neboť žáci znají odpovědi jen *pravděpodobný* a *nepravděpodobný*, a tak otázka ztrácí smysl.

**Úloha 1.** Zakřížkuj. Dítě přijede do školy kočárem.  Pravděpodobné.  Nepravděpodobné.

**Úloha 2.** Zakřížkuj. Dítě hází míčem do koše.  Pravděpodobné.  Nepravděpodobné.<sup>24</sup>

**Úloha 3.** Vyber. Lev vyhraje nad slonem v přetahování pomocí lana.

A. Pravděpodobné. B. Nepravděpodobné.

Na místo *spíše pravděpodobný* se pokoušeli Sill a Kurtzmann používat se žáky ve výuce spojení *více pravděpodobný*, ale ukázalo se, že pro většinu žáků byla sice nová formulace srozumitelná, avšak ne pro všechny. Podobně tomu bylo u formulace *méně pravděpodobný*. Zkušenosti z výuky nakonec potvrdily, že postačuje pro porovnání a popis pravděpodobnosti výraz *pravděpodobnější*.

#### 4.1.4 Znázornění pravděpodobnosti na škále

Dalším krokem je vyznačování (subjektivního odhadu) pravděpodobnosti na tzv. pravděpodobnostní škále.<sup>25</sup> Pravděpodobnostní škála (také pruh, pás, někdy také pravděpodobnostní barometr) je lineární ohraničený útvar, jehož geometrickým modelem je úsečka (v případě pruhu by to byl rovinný omezený útvar, jehož geometrickým modelem by byl obdélník). Jako vhodná reprezentace škály se Sill a Kurtzmann (2019, s. 81) osvědčilo použít pravítko délky 30 cm a pro vyznačení zvolené hodnoty pravděpodobnosti velkou kancelářskou sponku nebo prádelník kolíček, kterým lze snadno posouvat a polohu měnit. K výrobě škály lze použít také pruh tvrdého kartonu či ji jen nakreslit na tabuli. Při znázornění škály do sešitu se upřednostňuje vertikálně umístěná škála, což má výhodu i pro pozdější znázornění rozdělení pravděpodobnosti. Jedním modelem škály byl i tzv. pravděpodobnostní žebřík se žábou, která využívá mýtu o tom, že žába pozicí na žebříčku předpovídá počasí. Škála jako žebřík je jakousi diskrétní<sup>26</sup> škálou, kde jsou k volbě pouze body škály vymezené příčkami žebříku (samozřejmě bez udané kvantifikace). Škály se později doplňují různými pomocnými výpověďmi, jako např. *jistý, pravděpodobný, nepravděpodobný a nemožný* a dále *To se stane zřídka*, *To se nemůže stát.* *To se stane v každém případě.* a *To se stane často.* Na pravděpodobnostní škálu doporučují Sill a Kurtzmann (2019, s. 84) vyznačovat hodnotu pravděpodobnosti křížkem, v některých úlohách se místo křížku objevuje např. znak pro smajlík nebo šipka ukazatele.

První dvě úlohy jsou formální, další tematicky čerpají ze života žáků. (Sill, Kreutzmann 2019, s. 84, 85)

<sup>24</sup> K úloze je připojen obrázek, na kterém dítě hází míč do basketbalového koše. Koš je však umístěn na druhé straně zdi, kam dítě nevidí.

<sup>25</sup> Jako první použil tento termín maďarský matematik Tamás Varga v roce 1972.

<sup>26</sup> Přídavné jméno „diskrétní“ zde není užito ve významu celočíselný, nýbrž ve významu „nespojité, nabývající jen určitých hodnot z intervalu“.

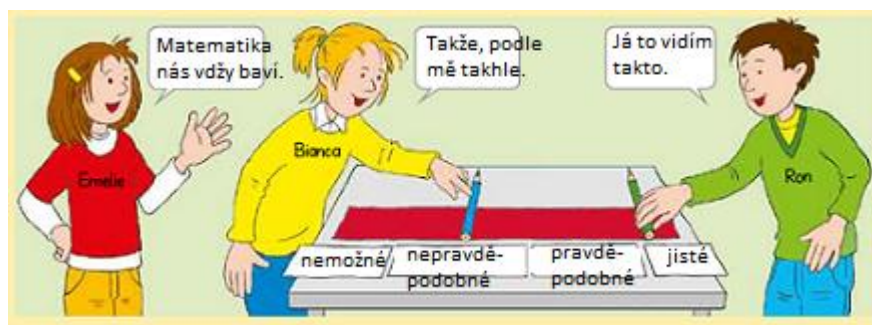
- Úloha 1.** K dané pravděpodobnostní škále s vyznačenou hodnotou pravděpodobnosti přiřaď správnou slovní charakteristiku: jistý, nepravděpodobný, nemožný, pravděpodobný.
- Úloha 2.** Na pravděpodobnostní škálu vyznač křížkem hodnotu pravděpodobnosti výsledku, který byl označen jako pravděpodobný, jistý, nemožný, nepravděpodobný.
- Úloha 3.** Když prší a současně svítí slunce, uvidím duhu. Doplň: A. To je..., protože...  
B. Zajáci žerou rádi trávu. To je..., protože...
- Úloha 4.** Zkontroluj, jestli je pravděpodobnost správně vyznačena. Pokud ne, vylepši!  
Při bouřce jsou blesky a hromy. A. Souhlasí. B. Nesouhlasí. Proč? ...  
Na podzim opadají listy z našich stromů. A. Souhlasí. B. Nesouhlasí. Proč? ...
- Úloha 5.** Jisté, pravděpodobné nebo nemožné? Jak to vidíš ty? Polož pokaždé tužku na pruh pravděpodobnosti. Srovnej s kamarádem.

Úloha začíná obrázkem (Obrázek 1) a v následující tabulce žáci přímo kvalitativně ohodnocují pravděpodobnost určitých jevů v různých oblastech:

*Ve škole: Sport je nejlepší školní předmět. Všichni žáci spočítají  $597 : 7$  správně. Většina žáků spočítá  $99 - 50$  správně. Z matematiky dostanu dvojku.*

*V oblasti Počasi: Zítra bude hezké počasí. O Vánocích bude určitě sníh. V zimě bude určitě sníh. Sakra! Prší už tři dny! Při házení kostkou: Nikdy se nepodaří hodit třikrát po sobě číslo 6. Teď hodím číslo 7. Když si to budu hodně přát, hodím číslo 6. Číslo 6 nehodím bohužel tak často jako číslo 1.*

(Nussknacker, 2. třída, 2014, s. 34)



Obrázek 1. Motivační obrázek ke kvalitativnímu ohodnocení pravděpodobnosti při použití pravděpodobnostní škály (Zdroj obrázku: Nussknacker 2014, s. 34, překlad – autor příspěvku)

Po zavedení kvantifikace pravděpodobnosti v podobě zlomku nebo desetinného čísla se ve vyšších třídách škála rozšiřuje na uzavřený (reálný) interval, jehož krajním bodům jsou přiřazena čísla 0 a 1 jako mezní hodnoty pravděpodobnosti. Čísla mezi 0 a 0,5 je ohraničen dílčí interval pro *málo pravděpodobné* jevy, čísla 0,5 a 1 jsou mezemi intervalu pro jev *spíše pravděpodobný*. Hodnoty ležící blízko 0 signalizují stupeň jistoty *velmi nepravděpodobný*, hodnoty blízko číslu 1 pak vyjadřují stupeň jistoty *velmi pravděpodobný*. Často se také užívá spojení *malá, střední a velká (vysoká) pravděpodobnost*. Označení středu pravděpodobnostní škály je na prvním stupni 1 : 1 nebo *fifty-fifty*, čímž se vyjadřuje stejná míra očekávání (šance), že výsledek nastane či nenastane. Každému bodu pravděpodobnostní škály tak můžeme přiřadit určitý subjektivní stupeň jistoty (stupeň důvěry) v jeho „nastání“.

#### 4.1.5 Zkoumání vlivu podmínek procesu na pravděpodobnost výsledků

Pravděpodobnost výsledku závisí na podmínkách, za kterých proces probíhá, např. na výsledný čas běhu na 60 m má vliv aktuální zdravotní a duševní stav sportovce, na jeho běžeckých dovednostech, na větrných podmínkách a jistě na mnoha dalších okolnostech. Pro sportovce po intenzivním běžeckém tréninku je výhra pravděpodobnější než pro sportovce bez

řádné přípravy. Zvláště u výsledků označených jako údajně *nemožné* rozvíjejí žáci podle zkušeností Sill a Kurtzmann (2019, s. 87) značně svou fantazii a předkládají řadu nápadů, aby našli podmínky, za kterých nenastanou odpovědi očekávané učitelem.

**Úloha 1.** *Emil chce navštívit svou babičku. Jeho maminka řekla, že je pravděpodobné, že pojedete na kole. Proč to tak jeho maminka hodnotí? Najdi vhodný důvod a vyber.*  
A. Emil jezdí rád na kole. B. Emilovo kolo je rozbité. C. Venku svítí slunce.  
D. K babičce je to daleká cesta. E. Emil dostal kolo k narozeninám. F. Hustě prší.

**Úloha 2.** *Co se musí změnit?*

1. *Je nemožné, abych si zítra ráno dal pomerančový džus, neboť maminka žádný nekoupila.*

A. *Co se musí změnit, aby to bylo možné?* B. *Co se musí změnit, aby to bylo jisté?*

2. *Je možné, že k narozeninám dostanu dárek, po kterém tak toužím.*

A. *Co se musí změnit, aby to bylo nemožné?* B. *Co se musí změnit, aby to bylo jisté?*

**Úloha 3.** *Někdo řekl, že letos bude u nás o Velikonocích ležet sníh. Za jakých podmínek je to:*  
A. *jisté?* B. *pravděpodobné?* C. *nepravděpodobné?* D. *nemožné?*

#### 4.2. Koncept propedeutiky a výuky pravděpodobnosti ve 3. a 4. ročníku ZŠ v Německu podle Sill a Kurtzmann (2019)

Koncept propedeutiky pravděpodobnosti v 3. a 4. ročníku ZŠ navazuje ve smyslu spirálového principu učiva na koncept pro 1. a 2. ročník ZŠ představený v kapitole 4.1. Podle Sill a Kurtzmann (2019, s. 129) koncept obsahuje následující body, které dále doplňujeme několika poznámkami:

- *Srovnávání a popis pravděpodobnosti se vztahuje na náročnější procesy.*
- *Požadují se písemná zdůvodnění rozhodnutí o porovnání a popisech pravděpodobnosti.*
- *Zavedou se další kategorie pro kvalitativní popis a znázornění pravděpodobnosti. Popíše se střed pravděpodobnostní škály.*
- *Zavedou se další možnosti pro interpretaci pravděpodobnosti.*
- *Příklady vlivu podmínek na pravděpodobnosti budou náročnější.*
- *Do výuky se zahrnou situace z oblasti her spojených s náhodou, jako losování objektů z nádoby, a budou prováděny experimenty ke stochastickým procesům. [...]*

Ve 3. a 4. ročníku se doporučuje obohatit kvalitativní ohodnocení pravděpodobnosti o jemnější „stupně“ především ve vztahu k jejím mezním hodnotám: *téměř nemožný, velmi nepravděpodobný, spíše nepravděpodobný, spíše pravděpodobný, velmi pravděpodobný, vysoce pravděpodobný, téměř jistý*. Hranice mezi nimi se samozřejmě nedají přesně specifikovat. Označení středu pravděpodobnostní škály např. pro hod mincí může být: *Je stejně tak pravděpodobné jako nepravděpodobné, že padne panna.*<sup>27</sup> *Stejně tak může padnout panna jako orel*. Většina žáků zná ze svého okolí a rozumí procentům, takže mohou říct: *Je na 50 % pravděpodobné, že padne panna*. Střed škály se autorům osvědčilo označit „fifty-fifty“ nebo 1 : 1, i když oba zápisy vyjadřují šance, nikoliv hodnotu pravděpodobnosti. Naopak Sill a Kurtzmann nedoporučují označovat střed škály jako *stejně pravděpodobný*, neboť toto spojení vyjadřuje vztah mezi dvěma výsledky, tedy nějakou relací: *Že padne panna, je stejně pravděpodobné, jako že padne orel*.

Ve 3. a 4. ročnících by se měly ve výuce pravděpodobnosti již objevit idealizované stochastické situace, které hrají podstatnou roli při modelování četných reálných procesů: hod mincí, házení kostkou a losování z urny. Zařadit je vhodné také hry využívající náhodu, jako

<sup>27</sup> Zde je zrovna jedno, který z obou.

např. točení kolem štěstí. Pokusy na všech výše uvedených losovacích zařízeních lze za stejných podmínek opakovat a hráči nemohou svou vůli ovlivnit výsledek. Autoři nedoporučují využít výsledky mnoha opakování pokusu k nepřímému důkazu rovnosti pravděpodobností na základě četností jednotlivých výsledků. Výsledky opakovaných hodů jsou totiž nejisté: přestože je pravděpodobnost každého výsledku hodu kostkou  $\frac{1}{6}$ , což žáci vyjádří formulací *každý výsledek je stejně pravděpodobný (stejně možný)*, nemusí na to výsledky experimentu vždy jednoznačně ukazovat. Někdy bude počet jednotlivých výsledků přesně stejný, jindy se budou absolutní i relativní četnosti jednotlivých výsledků lišit. Relativní četnost slouží tak pouze k odhadům pravděpodobnosti jevu a je její pouhou přibližnou hodnotou. Naopak Sill a Kurtzmann doporučují ke zdůvodnění využít geometrických vlastností losovacích zařízení, např. pro hrací kostku: *Všech 6 stěn kostky jsou shodné útvary podobné čtverci, mají stejnou „velikost“ a tvar. Anebo diskusí: Proč by podle tebe měl být při házení hrací kostkou hod 1 pravděpodobnější než hod 6? Z jakých důvodů by měla 1 padnout častěji než 6?*

Také se doporučuje, aby žáci místo házení více kostkami opakovali házení stejnou kostkou po dohodě, že např. první hozené číslo stojí na řádu desítek a druhé číslo na řádu jednotek každého z výsledků, kterými bude dvojčíferné číslo.

Už u žáků 1. stupně ZŠ by měly být rozvíjeny dvě interpretace pravděpodobnosti: tzv. subjektivní pravděpodobnost a objektivní pravděpodobnost. Na výsledky přírodních dějů a náhodných procesů ze společnosti nemá člověk (subjekt) vliv a proto jim přiřazené pravděpodobnosti označujeme jako objektivní, zatímco pravděpodobnosti výsledků myšlenkových procesů jsou závislé na subjektu. Oba náhledy se propojí v případech, když vyjadřujeme subjektivní hypotézy, domněnky o objektivních pravděpodobnostech jevů.

Nadále platí snaha vyhnout se užívání slova *šance* a spojení *šance na výhru*, a to touto formulací: *Pro kterou z průhledných krabic s různým počtem zelených a žlutých koulí je nejpravděpodobnější, že bude vytažena žlutá koule?* Přesto slouží *šance* k upevňování představ o pojmu pravděpodobnost, k udávání či odhadování její hodnoty. Častou chybou podle Sill (2013, s. 20) bývá, že se oba pojmy, tedy pravděpodobnost a šance nedostatečně významově odlišují. Šance  $O$  na nastání určitého jevu  $A$  označíme  $O(A)$ <sup>28</sup> a jsou podílem pravděpodobnosti „nastání“ tohoto výsledku (jevu) a pravděpodobnosti, že též výsledek (jev) nenastane:  $O(A) = \frac{P(A)}{1-P(A)}$ . Např. při hodu kostkou je pravděpodobnost jevu  $A$ : „Padne číslo 1.“  $P(A) = \frac{1}{6}$ , ale šance na nastání jevu, že „Padne číslo 1.“ je  $O(A) = \frac{1}{5} = 0,2$ , tj. 20 %. Blíží-li se pravděpodobnost 1, blíží se šance nekonečnu. Blíží-li se pravděpodobnost 0, pak jsou šance nulové. Šance se nedají znázornit na pravděpodobnostní škále. Žáci na 1. stupni šance nevyjadřují číselně, nepočítají je a měli by používat slovo *šance* opět pouze ve slovních spojeních, jako např. *Mám velkou šanci na výhru na kole štěstí.*, či při srovnáních *Na levém kole štěstí mám větší šanci na výhru než na druhém kole vpravo.* Dobře se dají šance určovat při práci s losovacími zařízeními (generátory náhody): šance na určitý jev jsou vztahem mezi příznivými výsledky a nepříznivými výsledky.

Ve 3. a 4. třídě je podle Sill a Kurtzmann (2019, s. 156) již také vhodné propojit vyučování statistiky a pravděpodobnosti: buď ze získaných dat můžeme činit závěry pro pravděpodobnosti, nebo můžeme ze známých či odhadnutých pravděpodobností usuzovat na data. Tyto dovednosti rozvíjí autoři vhodnými příklady.

<sup>28</sup> Symbol  $O$  používáme podle anglického slova *odds*, kterému odpovídá český ekvivalent šance (mn. č.).

## 5. Závěr

Výuce pravděpodobnosti je na 1. stupni ZŠ v Německu věnována odbornou veřejností velká pozornost a připisován rostoucí význam, s cílem dosáhnout úplné matematické gramotnosti žáků také na 1. stupni. V Německu jsou pro žáky, stávající i budoucí učitele vydávány didakticky vhodné materiální i elektronické materiály, které jim umožňují se pravděpodobnosti naplno věnovat. Žáci jsou povzbuzováni aktivizujícími a praktickými výukovými metodami. Budování prvotních představ o pravděpodobnosti tak probíhá v duchu konstruktivistických přístupů ve vyučování matematice. Cílem výuky pravděpodobnosti na 1. stupni německých ZŠ je především intuitivně se žáky přistoupit k seznamování („setkávání se“) se základními pojmy a pracovními postupy, které jsou pro řešení pravděpodobnostních úloh typické, provádět kvalitativní odhady pravděpodobnosti jevů (výsledků) náhodných pokusů a znázorňovat je na pravděpodobnostní škále, porovnávat subjektivní odhady pravděpodobnosti a zdůvodnit férovost či neférovost dané hry. Výuku pravděpodobnosti na 1. stupni ZŠ v Německu považujeme za vhodný zdroj inspirace pro zavádění pravděpodobnosti na českých základních školách. Promyšlený koncept propedeutiky pravděpodobnosti autorů Sill a Kurtzmann (2019) lze označit za inspirující a žákům vstřícný.

## Literatura

- Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* (2005). Dostupné z [https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen\\_beschluesse/2004/2004\\_10\\_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf](https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf).
- Cordt, S. (2012). *Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht der 2. Klasse unter Einbeziehung des Strukturmodells der Prozessbetrachtung* (Diplomová práce). Dostupné z [https://www.mathe-mv.de/storages/uni-rostock/Alle\\_MNF/Mathe-MV/Publikationen/Primarstufe/Examensarbeit\\_Cordt.pdf](https://www.mathe-mv.de/storages/uni-rostock/Alle_MNF/Mathe-MV/Publikationen/Primarstufe/Examensarbeit_Cordt.pdf).
- Empfehlung zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts.* (2003). Dostupné z <https://www.yumpu.com/de/document/read/50065312/empfehlungen-zu-zielen-und-zur-gestaltung-des-stochastikunterrichts>.
- Hošpesová, A., Stehlíková, N., & Tichá, M. (2007). *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, Ch. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Nussknacker 1-4.* (2014, 2015). Schülerbuch. Ernst Klett Verlag. Část k pravděpodobnosti dostupná z [https://www2.klett.de/sixcms/list.php?page=lehrwerk\\_extra&titelfamilie=&extra=Nussknacker-Online&modul=inhaltsammlung&inhalt=klett71prod\\_1.c.1054304.de&kapitel=1054316](https://www2.klett.de/sixcms/list.php?page=lehrwerk_extra&titelfamilie=&extra=Nussknacker-Online&modul=inhaltsammlung&inhalt=klett71prod_1.c.1054304.de&kapitel=1054316).
- Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2003). *Pedagogický slovník*. Praha: Portál.
- Sill, H.-D., & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Sill, H.-D. (2013). *Zur Stochastikausbildung für das Lehramt an Grundschulen*. Prezentace dostupná z <http://www.math.uni-rostock.de/~sill/Publikationen/Stochastik/Vortrag%20Erfurt%2013%2005%2025.pdf>.